Zur Einführung der transfiniten Zahlen

Von JOHANN v. NEUMANN in Budapest.

Einleitung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist: den Begriff der *Cantor*schen Ordnungszahl eindeutig und konkret zu fassen.

Dieser Begriff wird nach *Cantors* Vorgang gewöhnlich als „Abstraktion" einer gemeinsamen Eigenschaft aus gewissen Klassen von Mengen gewonnen.[1]) Dieses etwas vage Verfahren wollen wir durch ein anderes, auf eindeutigen Mengenoperationen beruhendes, ersetzen. Das Verfahren wird in den folgenden Zeilen in der Sprache der naiven Mengenlehre dargestellt werden, es bleibt aber (im Gegensatz zu *Cantors* Verfahren) auch in einer „formalistischen", axiomatisierten Mengenlehre richtig. So behalten unsere Schlüsse auch im Rahmen der *Zermelo*schen Axiomatik (wenn man das *Fränkel*sche Axiom[2]) hinzufügt) volle Geltung.

Wir wollen eigentlich den Satz: „Jede Ordnungszahl ist der Typus der Menge aller ihr vorangehenden Ordnungszahlen" zur Grundlage unserer Überlegungen machen. Damit aber der vage Begriff „Typus" vermieden werde, in dieser Form: „Jede Ordnungszahl ist die Menge der ihr vorangehenden Ordnungszahlen." Dies ist kein bewiesener Satz über Ordnungszahlen, es wäre vielmehr, wenn die transfinite Induktion schon begründet wäre, eine Definition derselben. Nach ihr wird (O ist die leere Menge, $(a, b, c, \ldots)$ die Menge mit den Elementen $a, b, c, \ldots$)

$$0 = O,$$
$$1 = (O),$$
$$2 = (O, (O)),$$
$$3 = (O, (O), (O, (O))),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\omega = (O, (O), (O, (O)), (O, (O), (O, (O))), \ldots\ldots),$$
$$\omega + 1 = (O, (O), (O, (O)), \ldots\ldots, (O, (O), (O, (O)) \ldots\ldots)),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Wir setzen aber natürlich die transfinite Induktion nicht als begründet voraus, wir nehmen vielmehr nur die Begriffe der „wohlgeordneten Menge" und der „Ähnlichkeit" als vorhanden an.[1]) Wir werden im übrigen streng formalistisch vorgehen, das ... Symbol und ähnliches überall vermeiden.

Unsere Bezeichnungen sind die folgenden: Wenn Ξ, H Mengen sind, so bedeutet $\Xi \leqq H$ oder $H \geqq \Xi$, dass Ξ eine Teilmenge von H ist, und $\Xi < H$ oder $H > \Xi$, dass Ξ eine echte Teilmenge von H ist. Wenn Ξ eine Menge ist, so bedeutet $x \,\varepsilon\, \Xi$, dass x ein Element von Ξ ist. — O sei die leere Menge, a, (a, b), (a, b, c) die Mengen, deren Elemente a, a und b, bzw. a, b und c sind. Wenn x, y Elemente einer geordneten Menge sind, so bedeutet $x \prec y$ oder $y \succ x$, dass bei der gegebenen Ordnung x vor y kommt.

$E(x)$ sei eine Eigenschaft, $f(x)$ eine Funktion, die für alle x, die die Eigenschaft $E(x)$ besitzen, definiert ist. Dann sei

$$M(f(x);\ E(x))$$

die Menge aller $f(x)$, wenn x alle x, die die Eigenschaft $E(x)$ besitzen, durchläuft.[3]) — Ξ sei eine geordnete Menge, x ein Element von Ξ. Dann nennen wir die Menge

$$M(y;\ y \,\varepsilon\, \Xi,\ y \prec x)$$

aller Elemente y von Ξ, die vor x liegen, den Abschnitt von x in Ξ, und bezeichnen ihn kürzer auch durch $A(x, \Xi)$.

I. Kapitel.

1. Ξ sei eine wohlgeordnete Menge. Wir nennen eine Funktion $f(x)$, die in Ξ definiert ist, eine „Zählung" von Ξ, wenn für alle Elemente x von Ξ

$$f(x) = M(f(y);\ y \,\varepsilon\, A(x, \Xi))$$

ist Wenn $f(x)$ eine Zählung von Ξ ist, so nennen wir

$$M(f(x);\ x \,\varepsilon\, \Xi)$$

eine „Ordnungszahl" von Ξ. Und wenn es überhaupt Zählungen von Ξ gibt, so nennen wir Ξ „zählbar".

Ist x_1, x_2, x_3, x_4 das 1-te, 2-te, 3-te, 4-te Element von Ξ, so ist offenbar für jede Zählung $f(x)$ von Ξ

$$\begin{aligned} f(x_1) &= O, \\ f(x_2) &= (O), \\ f(x_3) &= (O, (O)), \\ f(x_4) &= (O, (O), (O, (O))); \end{aligned}$$

folglich ist die Ordnungszahl von Ξ, wenn es 0, 1, 2 oder 3 Elemente hat, bzw.

$$0,$$
$$(0),$$
$$(0, (0)),$$
$$(0, (0), (0, (0))).$$

2. Ξ sei eine wohlgeordnete Menge. Zwei Zählungen $f(x)$, $g(x)$ von Ξ sind stets identisch.

Denn im entgegengesetztem Falle gäbe es ein erstes x, für welches $f(x) \neq g(x)$ ist. Für alle $y \prec x$ wäre also $f(y) = g(y)$, also wäre

$$M(f(y);\ y \varepsilon \Xi,\ y \prec x) = M(g(y);\ y \varepsilon \Xi,\ y \prec x)$$

und das heisst eben $f(x) = g(x)$, entgegen der Annahme.

Ein zählbares Ξ hat also eine und nur eine Zählung. Zählung und Ordnungszahl sind also für alle zählbaren Ξ eindeutig festgelegte Begriffe. Wir werden im Folgenden die Ordnungszahl von Ξ mit $OZ(\Xi)$ bezeichnen.

3. Ξ sei zählbar, $f(x)$ die Zählung von Ξ, und $\bar{x}$ ein Element von Ξ. Dann ist $A(\bar{x}, \Xi)$ zählbar und seine Ordnungszahl ist $f(\bar{x})$.

Denn die Funktion $f'(x)$, die in $A(\bar{x}, \Xi)$ definiert und dort $= f(x)$ ist, ist eine Zählung von $A(\bar{x}, \Xi)$. Es ist in der Tat für alle Elemente y von $A(\bar{x}, \Xi)$

$$M(f'(y);\ y \varepsilon A(x, A(\bar{x}, \Xi))) = M(f(y);\ y \varepsilon A(x, A(\bar{x}, \Xi))) =$$
$$= M(f(y);\ y \varepsilon A(x, \Xi)) = f(x) = f'(x).$$

Also ist $A(\bar{x}, \Xi)$ zählbar, und seine Ordnungszahl ist

$$OZ(A(\bar{x}, \Xi)) = M(f'(x);\ x \varepsilon A(\bar{x}, \Xi)) =$$
$$= M(f(x);\ x \varepsilon A(\bar{x}, \Xi)) = f(\bar{x}).$$

4. Alle Abschnitte in Ξ seien zählbar. Dann ist auch Ξ zählbar.

Wir definieren nämlich für jedes x von Ξ

$$f(x) = OZ(A(x, \Xi)).$$

(Das können wir, da alle $A(x, \Xi)$ zählbar sind.) $f(x)$ ist dann eine Zählung von Ξ. Gehört nämlich x zu Ξ, und ist $\varphi(y)$ die Zählung von $A(x, \Xi)$, so ist für jedes Element y von $A(x, \Xi)$

$$\varphi(y) = OZ(A(y, A(x, \Xi))) = OZ(A(y, \Xi)) = f(y),$$

so dass

$$f(x) = OZ(A(x, \Xi)) = M(\varphi(y);\ y \varepsilon A(x, \Xi)) =$$
$$= M(f(y);\ y \varepsilon A(x, \Xi))$$

ist.

5. Ξ sei wohlgeordnet. Dann ist Ξ zählbar.

Denn im entgegengesetztem Falle wären auch nicht alle Abschnitte in Ξ zählbar. Es gäbe also ein erstes x, für welches $A(x, \Xi)$ nicht zählbar ist. Nun ist jeder Abschnitt in $A(x, \Xi)$ gleich

$$A(y, A(x, \Xi)) = A(y, \Xi)$$

für ein Element y von $A(x, \Xi)$. Wegen $y \prec x$ ist dann $A(y, \Xi)$ zählbar. Also sind alle Abschnitte in $A(x, \Xi)$ zählbar, d. h. $A(x, \Xi)$ ist zählbar, entgegen der Annahme.

Damit haben wir bewiesen, dass Zählung und Ordnungszahl für alle wohlgeordneten Mengen eindeutig festgelegte Begriffe sind.

II. Kapitel.

6. Ξ sei wohlgeordnet und $f(x)$ die Zählung von Ξ. Dann ist, für kein Element x von Ξ, $f(x)$ ein Element von $f(x)$.

Würde nämlich, für irgendein Element x von Ξ, $f(x)$ zu $f(x)$ gehören, so gäbe es ein erstes derartiges x. Da $f(x)$ die Menge aller $f(y)$ ist, wo $y \prec x$ ist, wäre dann $f(x) = f(y)$, für ein $y \prec x$. Dann würde aber $f(y)$ zu $f(y)$ gehören und $y \prec x$ sein, entgegen der Annahme.

7. Ξ sei wohlgeordnet, $f(x)$ die Zählung von Ξ, und x, y seien zwei Elemente von Ξ, für die $x \prec y$ ist. Dann ist $f(x) < f(y)$.

Aus $x \prec y$ folgt nämlich $A(x, \Xi) < A(y, \Xi)$, also

$$M(f(u);\ u \varepsilon A(x, \Xi)) \leqq M(f(u);\ u \varepsilon A(y, \Xi)),\ f(x) \leqq f(y),$$

und weil $f(x)$ zu $f(y)$ gehört (da $x \prec y$ ist), zu $f(x)$ aber nicht, so ist $f(x)$ von $f(y)$ verschieden. Also ist $f(x) < f(y)$.

8. Wir nennen, mit einem Ausdruck von *Hessenberg*, eine Menge von Mengen Ξ „durch Subsumption ordnungsfähig", wenn für zwei verschiedene Elemente x, y von Ξ stets $x < y$ oder $x > y$ ist. Und wenn das der Fall ist, so definieren wir eine Ordnung dadurch, dass wir festsetzen, dass $x \prec y$ sei, falls $x < y$ ist. Diese Ordnung nennen wir die „Subsumptionsordnung".

Nun sei Ξ wohlgeordnet. Dann ist $OZ(\Xi)$ stets durch Subsumption ordnungsfähig und in der Subsumptionsordnung dem Ξ ähnlich.

$f(x)$ sei nämlich die Zählung von Ξ. Irgend zwei Elemente P, Q von $OZ(\Xi)$ sind dann wegen

$$OZ(\Xi) = M(f(x);\ x \varepsilon \Xi)$$

gleich $f(x)$, bzw. $f(y)$. Und da $x \prec y$ oder $x \succ y$ ist, ist $f(x) < f(y)$

oder $f(x) > f(y)$, also $P < Q$ oder $P > Q$. Also ist $OZ(\Xi)$ durch Subsumption ordnungsfähig.

Die Zuordnung von x zu $f(x)$ ist offenbar eine Abbildung von Ξ auf $OZ(\Xi)$. Und da aus $x \prec y$ stets $f(x) < f(y)$, also bei der Subsumptionsordnung $f(x) \prec f(y)$ folgt, ist die Abbildung auch ein-eindeutig und ähnlich. Also ist Ξ dem $OZ(\Xi)$ ähnlich.

9. P ist dann und nur dann eine Ordnungszahl, wenn es

1. eine durch Subsumption ordnungsfähige Menge von Mengen ist,
2. seine Subsumptionsordnung eine Wohlordnung ist,
3. für jedes Element ξ von P stets $\xi = A(\xi, P)$ ist.

Erstens nehmen wir an, dass P eine Ordnungszahl ist, dann sei P die Ordnungszahl der wohlgeordneten Menge Ξ, deren Zählung $f(x)$ ist.

P ist eine Menge von Mengen, die nach dem soeben bewiesenem Satze durch Subsumption ordnungsfähig ist (also ist 1. erfüllt) und die dem wohlgeordneten Ξ ähnlich, also selbst wohlgeordnet ist (also ist 2. erfüllt). Für jedes ξ von P ist, da $\xi = f(x)$ (x Element von Ξ) sein muss,

$$\xi = f(x) = M(f(y); y \varepsilon \Xi, y \prec x) = M(f(y); y \varepsilon \Xi, f(y) < f(x) = \\ = M(\eta; \eta \varepsilon P, \eta \prec \xi) = A(\xi, P);$$

(also ist auch 3. erfüllt).

Zweitens nehmen wir an, dass P die Bedingungen 1., 2., 3. erfüllt. Dann ist es durch Subsumption ordnungsfähig, und in der Subsumptionsordnung wohlgeordnet. Wenn wir für alle Elemente x von P als Definition $f(x) = x$ setzen, so ist $f(x)$ eine Zählung von P. In der Tat ist wegen 3. für alle ξ von P

$$f(\xi) = \xi = A(\xi, P) = M(\eta; \eta \varepsilon A(\xi, P)) = M(f(\eta); \eta \varepsilon A(\xi, P)),$$

demnach ist

$$OZ(P) = M(f(\xi); \xi \varepsilon P) = M(\xi; \xi \varepsilon P) = P,$$

also ist P eine Ordnungszahl und zwar seine eigene Ordnungszahl.

III. Kapitel.

10. P sei eine Ordnungszahl. Dann ist P die Menge aller Ordnungszahlen, die $< P$ sind.

P sei nämlich die Ordnungszahl der wohlgeordneten Menge Ξ, deren Zählung $f(x)$ ist. Erstens nehmen wir an, dass Q ein Element von P ist. Wegen 3. ist dann

$$Q = A(Q, P) < P$$

und da $Q = f(x)$, (x Element von Ξ) sein muss, und

$$f(x) = OZ(A(x, \Xi))$$

ist, ist $f(x)$, also auch Q eine Ordnungszahl.

Zweitens nehmen wir an, dass Q eine Ordnungszahl ist, für die $Q < P$ ist. Wir ordnen P durch Subsumption. Es sei $\eta \prec \xi$, ξ gehöre zu Q.

Da dann ξ zu Q und zu P gehört, und P, Q Ordnungszahlen sind, ist

$$\xi = A(\xi, Q) = A(\xi, P)$$

Da η zu P gehört und $\eta \prec \xi$ ist, gehört η zu $A(\xi, P)$. Und da

$$A(\xi, P) = A(\xi, Q) < Q$$

ist, gehört es auch zu Q. D. h.: es ist $Q < P$. Wenn $\eta \prec \xi$ ist und ξ zu Q gehört, so gehört auch η zu Q. Nach einem bekannten Satze über wohlgeordnete Mengen (P ist wohlgeordnet), ist also Q ein Abschnitt in P. Für ein Element ξ von P ist also

$$Q = A(\xi, P) = \xi,$$

also gehört Q zu P.

Wir können den jetzt bewiesenen Satz auch so aussprechen: Wenn P, Q Ordnungszahlen sind, so ist $P \prec Q$ mit $P \varepsilon Q$ gleichbedeutend. Also ist für eine Ordnungszahl P niemals $P \varepsilon P$.

11. P, Q seien zwei verschiedene Ordnungszahlen. Dann ist $P < Q$ oder $P > Q$.

R sei der Durchschnitt von P und Q. Da P durch Subsumption ordnungsfähig ist und seine Subsumptionsordnung eine Wohlordnung ist (nach 1., 2.), da weiter $R \leqq P$ ist, so gilt dasselbe von R, also erfüllt R die Bedingungen 1. und 2. Jedes Element ξ von R gehört zu P und Q, und, weil P, Q Ordnungszahlen sind, ist

$$\xi = A(\xi, R) = A(\xi, Q).$$

$A(\xi, R)$ ist der Durchschnitt von $A(\xi, P)$ und $A(\xi, Q)$, also ist

$$\xi = A(\xi, R);$$

somit erfüllt R auch 3. Also ist R eine Ordnungszahl.

Es ist $R \leqq P$ und $R \leqq Q$. Wenn $R = P$ oder $R = Q$ ist, so ist $P \leqq Q$ oder $Q \leqq P$, also $P < Q$ ode $P > Q$ (weil $P \neq Q$ ist). Dies ist aber stets der Fall; denn wäre $R < P$ und $R < Q$, so wäre, da P, Q, R Ordnungszahlen sind, $R \varepsilon P$, $R \varepsilon Q$. Also wäre $R \varepsilon R$ (weil R der Durchschnitt von P und Q ist), was unmöglich ist, denn R ist eine Ordnungszahl.

12. U sei eine Menge von Ordnungszahlen. Zwei verschiedene Elemente P, Q von U sind stets Ordnungszahlen, also ist $P < Q$ oder $P > Q$. D. h.: U ist durch Subsumption ordnungsfähig. Die Subsumptionsordnung von U ist aber eine Wohlordnung.

Um das zu beweisen müssen wir zeigen, dass jedes $V \leqq U$, $V \neq O$ ein erstes Element hat.

P sei ein Element von V. (P ist eine Ordnungszahl.) Wenn es kein Element von V gibt, das $< P$ ist, so hat V ein erstes Element, nämlich P. Wenn es solche Elemente gibt, so sei ihre Menge: W. Da alle Elemente von W Ordnungszahlen sind (wegen $W \prec V \leqq U$) und $< P$ sind, gehören sie alle zu P, also ist $W \leqq P$. Da $W \leqq P$, $W \neq 0$ ist, und P wohlgeordnet ist, hat W ein erstes Element Q. (Wegen $Q \varepsilon W$ ist $Q < P$.) Da jedes Element von V entweder $\geqq P$, also $> Q$ ist, oder $< P$, also ein Element von W, und somit $\geqq Q$ ist, ist Q auch das erste Element von V. V hat also allenfalls ein erstes Element.

13. P ist dann und nur dann eine Ordnungszahl, wenn jedes Element von P eine Ordnungszahl ist und $\leqq P$ ist.

Erstens sei P eine Ordnungszahl. Jedes Element von P ist eine Ordnungszahl und $< P$.

Zweitens genüge P unseren Bedingungen. Als Menge von Ordnungszahlen ist dann P durch Subsumption ordnungsfähig und seine Subsumptionsordnung ist eine Wohlordnung, also sind 1., 2. erfüllt. Zweitens ist für jedes Element ξ von P

$$A(\xi, P) = M(\eta; \eta \varepsilon P, \eta \prec \xi),$$

also, weil alle Elemente η von P Ordnungszahlen sind,

$$= M(\eta; \eta \varepsilon P, \eta\, OZ, \eta \prec \xi) = M(\eta; \eta \varepsilon P, \eta \varepsilon \xi)$$

und somit, da $\xi \leqq P$ ist, auch

$$= M(\eta; \eta \varepsilon \xi) = \xi;$$

somit ist auch 3. erfüllt. Also ist P eine Ordnungszahl.

Wenn P eine Menge von Ordnungszahlen ist, so bedeutet für jedes Element ξ von P (weil P eine Ordnungszahl ist) $\xi \leqq P$ dass alle Ordnungszahlen die $< \xi$ sind (d. h. alle Elemente von ξ) zu P gehören. Wir können daher den soeben bewiesenen Satz auch so aussprechen: P ist dann und nur dann eine Ordnungszahl, wenn alle Elemente von P Ordnungszahlen sind, und wenn für jedes Element ξ von P, alle Ordnungszahlen η, für die $\eta < \xi$ ist, ebenfalls Elemente von P sind.

IV. Kapitel.

14. Ξ, H seien wohlgeordnete Mengen. Ξ und H sind dann und nur dann einander ähnlich, wenn $OZ(\Xi) = OZ(H)$ ist.

Erstens sei $OZ(\Xi) = OZ(H)$. Da Ξ dem durch Subsumption geordneten $OZ(\Xi)$, und H dem durch Subsumption geordneten $OZ(H)$ ähnlich ist, ist dann wirklich Ξ dem H ähnlich.

Zweitens sei Ξ dem H ähnlich. Dann sei $\varphi(x)$ eine ähnliche Abbildung von Ξ auf H und $g(x')$ die Zählung von H. Wenn wir für alle Elemente x von Ξ als Definition $f(x) = g(\varphi(x))$ setzen, so ist $f(x)$ eine Zählung von Ξ. In der Tat ist für alle x von Ξ

$$M(f(y);\, y \,\varepsilon\, \Xi, y \prec x) = M(g(\varphi(y));\, y \,\varepsilon\, \Xi, y \prec x) =$$
$$= M(g(\varphi(y));\, y \,\varepsilon\, \Xi, \varphi(y) \prec \varphi(x)) = M(g(y');\, y' \,\varepsilon\, H, y' \prec \varphi(x)) =$$
$$= g(\varphi(x)) = f(x);$$

hieraus folgt aber

$$OZ(\Xi) = M(f(x);\; x \,\varepsilon\, \Xi) = M(g(\varphi(x));\; x \,\varepsilon\, \Xi) =$$
$$= M(g(x');\; x' \,\varepsilon\, H) = OZ(H).$$

15. Ξ ist dann und nur dann einem Abschnitt in H ähnlich, wenn $OZ(\Xi) < OZ(H)$ ist.

Erstens sei $OZ(\Xi) < OZ(H)$. Dann ist wegen 12. $OZ(\Xi)$ ein Element von $OZ(H)$, also (sein eigener) Abschnitt in H. Und da Ξ dem $OZ(\Xi)$, H dem $OZ(H)$ ähnlich ist, ist Ξ auch einem Abschnitt von H ähnlich.

Zweitens sei Ξ einem Abschnitte in H ähnlich. Die Zählung von H sei $g(x)$, der fragliche Abschnitt sei $A(\bar{x}, H)$. Dann ist wegen der Ähnlichkeit

$$OZ(\Xi) = OZ(A(\bar{x}, H)) = g(\bar{x})$$

also ist $OZ(\Xi)$ Element von $OZ(H)$, also ist wegen 12.

$$OZ(\Xi) < OZ(H).$$

16. Da stets einer und nur einer der folgenden drei Fälle eintritt (wegen 11.)

$$OZ(\Xi) < OZ(H),\quad OZ(\Xi) = OZ(H),\quad OZ(\Xi) > OZ(H),$$

so tritt auch stets einer und nur einer der drei folgenden Fälle ein:

Ξ ist einem Abschnitt von H ähnlich,
Ξ ist H ähnlich,
H ist einem Abschnitt von Ξ ähnlich.

Und diese drei Fälle sind bzw. gleichbedeutend mit

$$OZ(\Xi) < OZ(H) \text{ oder } OZ(\Xi) \varepsilon OZ(H),$$
$$OZ(\Xi) = OZ(H),$$
$$OZ(\Xi) > OZ(H) \text{ oder } OZ(H) \varepsilon OZ(\Xi).$$

17. Ξ sei wohlgeordnet. Dann gibt es eine und nur eine (durch Subsumption geordnete) Ordnungszahl die dem Ξ ähnlich ist, nämlich $OZ(\Xi)$.

$OZ(\Xi)$ ist Ξ in der Tat ähnlich. Und wenn die Ordnungszahl P dem Ξ ähnlich ist, so sei P die Ordnungszahl von H. Da H dem P, P dem Ξ ähnlich ist, ist H dem Ξ ähnlich, also

$$P = OZ(H) = OZ(\Xi);$$

hieraus folgt auch: zwei durch Subsumption geordnete Ordnungszahlen sind dann und nur dann ähnlich, wenn sie identisch sind.

Von dieser Stelle an ist es leicht die Theorie der Ordnungszahlen weiter zu entwickeln. Addition, Multiplikation von Ordnungszahlen sind unschwer zu begründen. Die „Definition durch Transfinite Induktion" ist allerdings nur dann zulässig, wenn der folgende Satz bewiesen ist:

„$f(x)$ sei eine Funktion, die für alle Mengen von Dingen eines Bereichs B definiert ist und deren Werte stets Dinge des Bereichs B sind. Es gibt dann eine und nur eine Funktion $\Phi(P)$, die für alle Ordnungszahlen P definiert ist und deren Werte stets Dinge des Bereichs B sind, mit der Eigenschaft, dass für alle Ordnungszahlen P ($P\,\overline{OZ}$ bedeute, dass P eine Ordnungszahl ist)

$$\Phi(P) = f(M(\Phi(Q);\ Q\,\overline{OZ},\ Q < P)) = f(M(\Phi(Q);\ Q \varepsilon P))$$

ist."

Der Beweis dieses überhaupt nicht selbstverständlichen Satzes ist aber unschwer zu erbringen.[4]) Ist dieser Satz bewiesen, so kann auch die Theorie des Potenzirens von Ordnungszahlen, sowie die der „stetigen" oder „normalen"[5]) Ordnungszahl-Funktionen ohne weiteres entwickelt werden.

Anmerkungen.

[1]) *Cantor,* Mathematische Annalen, Bd. 46, 49.

[2]) *Zermelo,* Mathematische Annalen, Bd. 65, *Fränkel,* Mathematische Annalen, Bd. 86.

Das Axiom von *Fränkel* lautet so: „Wenn Ξ eine Menge ist und jedes Element x von Ξ durch ein ξ ersetzt wird, so gibt es eine Menge Ξ', deren Elemente die ξ sind." Es füllt eine wesentliche Lücke der *Zermelo*schen Axiomatik aus.

[3]) Vom axiomatischen Standpunkte ist es gar nicht sicher, ob es eine solche Menge gibt. Wir müssen vielmehr fordern, dass alle x mit der Eigenschaft $E(x)$ eine Menge bilden. Dann garantiert das *Fränkel*sche Axiom die Existenz von $M(f(x); E(x))$. Diese Bedingung wird im Folgenden stets erfüllt sein.

[4]) Der Beweis des Satzes verläuft (in starker Analogie zu den Schlüssen im 1. Kap., 1–6) etwa folgendermassen:

a) P sei eine Ordnungszahl. Gibt es dann eine Funktion $\Psi(Q)$ die für alle Ordnungszahlen $Q < P$ definiert ist, und die Eigenschaft

$$\Psi(Q) = f(M(\Psi(R); R\,\overline{OZ}, R < Q))$$

besitzt? Und wieviele solche gibt es?

b) Wenn es überhaupt eine gibt, so gibt es eine einzige. In diesem Falle heisse P „normal", und Ψ heisse Ψ_P. Ferner sei für ein normales P

$$\Phi(P) = f(M(\Psi_P(Q); Q\,\overline{OZ}, Q < P)).$$

c) Wenn P normal ist, so ist jedes $Q < P$ normal, und es ist für alle $R < Q$

$$\Psi_Q(R) = \Psi_P(R), \text{ und } \Phi(Q) = \Psi_P(Q).$$

d) Wenn alle $Q < P$ normal sind, so ist auch P normal. (Es ist $\Psi_P(Q) = \Phi(Q)$.)

e) Alle P sind normal. Aus *d*) folgt unmittelbar

$$\Phi(P) = f(M(\Psi_P(Q); Q\,\overline{OZ}, Q < P)) = f(M(\Phi(Q); Q\,\overline{OZ}, Q < P)),$$

also ist $\Phi(P)$ die gewünschte Funktion.

f) Es gibt nur eine derartige Funktion.

[5]) *Hausdorff*, Grundzüge der Mengenlehre, S. 114.