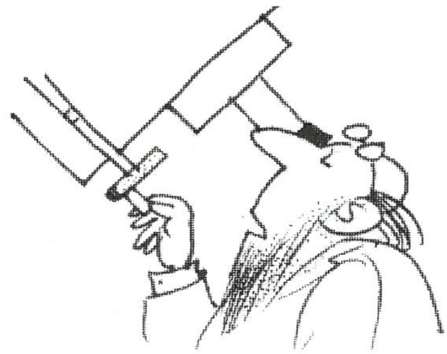
(2015) B.I.A.A. no **100** BULLETIN D'INFORMATIQUE APPROFONDIE ET APPLICATIONS
ISSN 0291-5413 (Université d'Aix-Marseille)

La cosmologie newtonnienne *(la minute d'Anselme Lanturlu)*

Jean-Pierre PETIT [1 2]

Résumé. – Note de Jean-Pierre Petit, portant sur la modélisation de l'Univers par les méthodes newtoniennes (initialement publiée dans le volume no 2 de Quadrature de Janvier-Février 1990 p. 26-28)



Historiquement, et cela on le verra dans les articles suivants, Einstein commença en 1917 par créer un modèle d'univers *stationnaire*, qui n'évoluait pas dans le temps. Tout simplement parce que personne n'aurait imaginé une seconde qu'il pu en être autrement. C'est le russe Friedman qui sauta ce pas quelques années plus tard et la cosmoslogie contemporaine est basée sur ses travaux. Rageur, Einstein avait alors lâché : « Ah, si j'avais pu imaginer que l'univers était instationaire, j'aurais trouvé ce modèle avant Friedman. » Si, comme disent les lacédémoniens... Si on avait pensé à cela, on aurait pu s'engager dans cette voix avant même que la relativité restreinte n'apparût.

Mais ceci fut redécouvert qu'en 1934, par Milne et Mac Crea, à la surprise générale, d'ailleurs. L'équation de Friedman, clef des cosmologies, avait été découverte à l'issue de calculs affreusement complexes, nécessitant des outils mathématiques comme les *tenseurs*. Or voici que Milne et Mac Crea montraient, sur moins d'une page de calcul, que tout ceci pouvait découler du simple formalisme de la mécanique des fluide la plus classique, sans transformation de Lorentz, avec une vitesse de la lumière infinie. Ceci provient du fait que la machine cosmologique est en quelque sorte « parasitée » par la relativité restreinte.

FIGURE 1

1. Le grumeau pulsant

Nous allons donner une version simplifiée de la théorie de Milne et Mac Crea. Imaginons que nous soyons au 19ème siècle. La relativité restreinte n'existe pas. Beaucoup de gents sont encore prêts à croire à la thèse des actions à distance, c'est-à-dire au fait que la gravitation agit instantanément d'un point à l'autre du cosmos. Considérons alors un milieu fait de poussières. Celles-ci vont s'attirer mutuellement. Isolons par la pensée dans ce milieu un sphère de rayon R en supposant que les particules situées en son centre resteront immobiles. Il existe alors un théorème que la mathématicien retrouvera facilement, qui montre qu'une particule située à la surface de cette sphère de rayon R subit

1. Directeur de Recherches au CNRS
2. jppetit1937@yahoo.fr

l'attraction gravitationnelle de celles qui sont situées à l'intérieur de ce volume, exactement comme si toute la masse était concentrée en son centre. Ceci découle du fait que la force gravitationnelle est en $1/r^2$ « Figure 1 ».

La force qui s'exerce sur cette particule, équivalent à une force de pesanteur, de direction radiale par raison de symétrie, est :

$$F = -\frac{GMm}{R^2}$$

M est la masse du grumeau de poussière, m celle de la particule, G la constante de gravité et $R(t)$ le rayon du grumeau sphérique. Appliquons maintenant la relation : la force égale masse multipliée par accélération. L'accélération sera la dérivée seconde de R, notée R''. Et on aura :

$$mR'' = -\frac{GMm}{R^2} \quad \text{ou} \quad R^2R'' + GM = 0$$

avec GM = constante. Ceci est une équation différentielle liant R et R''. C'est exactement le résultat trouvé par Friedman, bienque le chemin qu'il ait suivi ait été sensiblement différent. Une telle équation possède trois solutions. Friedman commença par trouver la solution *cycloïdale* :

$$R : \sqrt[3]{GM}(1 - \cos\theta)$$

avec $t = \theta - \sin\theta$. Vous pouvez vérifier en dérivant[3]. Cette solution, dite paramétrique puisque R et t se calculent à partir d'un paramètre θ, à l'allure ci-dessous (Figure 2). Dans cette solution $R(t)$ passe par la valeur 0. Le grumeau de gaz pulse et R passe par une valeur maximale. Elle évoque une univers *pulsant*.

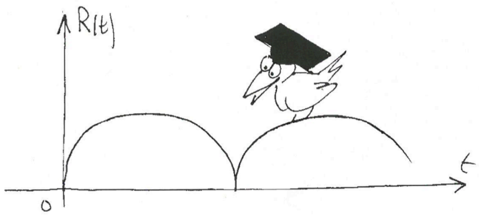


FIGURE 2. Solution cycloïdale

Einstein fut très vexé de voir un illustre inconnu lui ravir au poteau cette découverte, car il considérait la Relativité Générale, dont il avait jeté les bases, comme sa propriété... Cette solution bâtie par Friedman était en effet beaucoup plus élégante que la sienne (qui ne tenait pas debout, en vérité).

Ne faisant pas preuve d'un grand esprit sportif, il se détourna de la Relativité Générale, pendant une dizaine d'années, sans faire grand cas de la solution trouvée par l'outsider, qui ne reçu aucun prix pour son invention (et en tout cas, pas le prix Nobel, qu'il eût mérité cent fois).

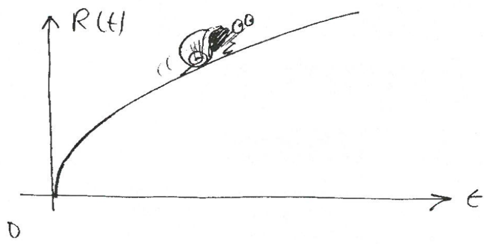


FIGURE 3. Loi parabolique d'Einstein - de Sitter

Einstein attendit tranquillement que Friedman meure et publia sous son nom et sous celui de son collègue de Sitter une autre solution de l'équation sous forme d'une fonction puissance. Retrouvons la rapidement : Soit à chercher une solution de la forme $R = at^n$. On a : $R' = amt^{m-1}$ et

$$R'' = am(m-1)t^{m-2}$$

d'où

$$a^3m(m-1)t^{3m-2} + GM = 0$$

Comme le produit GM ne dépend pas du temps, il faut que $m = 2/3$, ce qui donnera

$$\boxed{R = \sqrt[3]{\frac{9GM}{2}}t^{2/3}}$$

C'est la solution *parabolique*, dite d'Einstein-de Sitter (voir Figure 3).

Il apparut par ailleurs qu'il existait une troisième solution, dite *hyperbolique* où apparaissent cette fois des lignes hyperboliques :

$$R = \sqrt[3]{GM}(\mathrm{ch}(\theta) - 1)$$

avec $t = \mathrm{sh}(\theta) - \theta$. Tout ceci étant très facile à programmer et à tracer à l'aide d'une calculatrice scientifique programmable. (Figure 4.)

3. Rappelons qu'alors $\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\theta} / \frac{dt}{d\theta}$ et que : $R'' = \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dR}{dt}\right) / \frac{dt}{d\theta}$.

2. **Mythe de la caverne**

Pourquoi est-il possible de retrouver un des résultats majeur de la Relativité Générale à l'aide de calculs aussi simple ? En opérant plus correctement nous serions parti des équations de conservation de la mécanique des fluides, ainsi de ce qu'on appelle l'équation de Poisson (qui traduit simplement, mathématiquement, le fait que la force gravitationnelle soit en $1/r^2$). Mais, même sous cette forme, le calcul tient quand même sur une page. L'explication est la suivante. Lorsqu'on procède au tir d'un véhicule spatial en direction de la lune, en toute rigueur on devrait tenir compte des corrections relativistes liées à la vitesse du mobile et aux effets de courbure dus à la présence de la terre et de la lune. Mais ces effets sont si infimes qu'on utilise carrément les bêtes équations newtoniennes. L'espace est courbe, mais, sur d'aussi « faibles » distances et avec des concentrations de masses aussi « infimes », on l'assimile à un espace euclidien, plat (c'est comme confondre la sphère terrestre et son plan tangent, pour des opérations d'arpentage à distances modestes). La vitesse du train spatial est également si petite devant c qu'on décide de négliger les corrections de la relativité restreinte. Autrement dit, dans les équations rigoureuses, relativistes, tout ce passe comme si on faisait tendre c vers l'infini, ce qui redonnerait les équations newtoniennes, les équations « de tous les jours ».

Ces équations relativistes quelles sont-elles ? Et bien nous ne les connaissons pas, tout simplement. Nous pensons qu'elles existent, mais nous n'avons pas réussit à les construire. Tout ce qu'on peut dire, c'est que sur de courtes distances et à des vitesses V faibles devant c, ces équations doivent dégénérer selon les équations de la mécaniques des fluides classique. À la manière de Platon, nous devons considérer ces équations « usuelles » comme les « ombres » d'équations plus complexes, que nous ignorons. Le philosophe grec avait jadis aussi suggéré que tout ce qui était tangible, perceptible, n'était l'ombre d'une réalité plus complexe.

La prochaine fois, nous tenterons de vous expliquer comment s'y est pris Einstein pour jeter les bases des la Relativité Générale.

J.P.P.

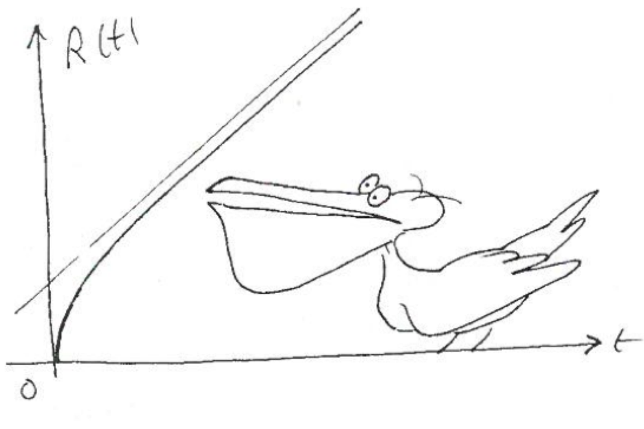


FIGURE 4. La solution hyperbolique