

УДК: 517.957, 519.633

Коллективное влияние примесей на динамику кинков модифицированного уравнения синус-Гордона

Е. Г. Екомасов^а, А. М. Гумеров^б

Башкирский государственный университет,
450074, г. Уфа, ул. З. Валиди, д. 32

E-mail: ^а EkomasovEG@gmail.com, ^б Bgu@bk.ru

*Получено 27 января 2013 г.,
после доработки 31 марта 2013 г.*

С помощью численных методов исследована динамика кинков модифицированного уравнения синус-Гордона в модели с локализованной пространственной модуляцией периодического потенциала (или примесью). Рассмотрен случай наличия двух одинаковых примесей. Показано, что возможно наблюдение коллективных эффектов влияния примесей, которые сильно зависят от расстояния между ними. Продемонстрировано наличие определенного критического значения расстояния между примесями, которое приводит к двум качественно различным сценариям динамического поведения кинка.

Ключевые слова: кинк, бризер, уравнение синус-Гордона, квазитуннелирование

Collective influence of impurities on the dynamics of kinks of modified sine-Gordon equation

E. G. Ekomasov, A. M. Gumerov

Bashkir State University, 32 Z. Validi str., Ufa, 450074, Russia

Abstract. — We investigated numerically the dynamics of kinks of modified sine-Gordon equation in the model with localized spatial modulation of a periodic potential (or impurity). We considered the case of two identical impurities. We showed the possibility of collective effects of the influence of impurities, which are heavily dependent on the distance between them. We demonstrated the existence of a certain critical value of the distance between impurities, which has two qualitatively different scenarios of the dynamic behavior of kink.

Keywords: kink, breather, sine-Gordon equation, quasitunneling

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 3, pp. 403–412 (Russian).

Введение

Солитонные решения уравнения синус-Гордона (УСГ) широко используются в самых различных областях науки и техники. Например, для описания волновых процессов в геологических средах, динамики ДНК в молекулярной биологии, динамики доменных границ в магнетиках, дислокаций в кристаллах и флюксонов в джозефсоновских контактах и переходах [Якушевич, 2007; Браун, Кившарь, 2008; Шамсутдинов и др., 2009]. Во многих случаях поведение солитонов можно описать в модели точечной частицы, тогда их временная эволюция будет подчиняться простым дифференциальным уравнениям [Браун, Кившарь, 2008]. Поскольку часто влияние различного рода возмущений приводит к существенно нелинейному отклику системы и соответственно к изменению структуры солитонов, то в таких случаях их необходимо описывать как деформируемые частицы [Браун, Кившарь, 2008]. При этом, возможно возбуждение внутренних степеней свободы солитонов, которые могут играть определяющую роль в физических процессах. Внутренние моды включают в себя трансляционную и, связанную с долгоживущими осцилляциями ширины солитона, пульсационную моду [Willis, 2006].

Большой интерес исследователей привлекает вопрос влияния различного вида возмущений на возбуждение внутренних мод солитонов УСГ. Исследование влияния малых возмущений на решения УСГ можно проводить с помощью хорошо разработанной теории возмущений для солитонов [Браун, Кившарь, 2008; Шамсутдинов и др., 2009; Fogel et al., 1977; Алфимов, 2009], а влияние больших возмущений, в общем случае, можно проводить только с помощью численных методов [Zhang et al., 1992; Piette, Zakrzewski, 2009]. Так как УСГ описывает многие явления в различных областях физики, ясно, что задача о решении данного уравнения в присутствии локальных неоднородностей возникает вполне естественно. Например, много работ посвящено изучению влияния зависящей от координат и времени внешней силы, описываемой функциями дельтообразного, ступенчатого, гиперболического и гармонического видов [Якушевич, 2007; Браун, Кившарь, 2008].

Не менее интересен и случай пространственной модуляции (неоднородности) периодического потенциала (ПМПП), или наличие примеси в системе. Проблема взаимодействия кинков УСГ с примесями для одномерного случая обсуждается в литературе достаточно давно, см. например [Fogel et al., 1977; Currie et al., 1977]. Например, модель классической частицы для взаимодействия кинка с примесью применима в случае, когда примесь не допускает существования примесной моды – локализованного колебательного состояния на примеси. Важность примесных мод при взаимодействии кинка с примесями показана в работах [Piette, Zakrzewski, 2009; Kivshar et al., 1991; Javidan, 2008; Белова, Кудрявцев, 1997; Piette, Zakrzewski, 2007; Екомасов и др., 2008; Екомасов, Гумеров, 2012]. Исследуется в последнее время взаимодействие кинка с примесью и для двумерного случая [Bratsos, 2007; Екомасов и др., 2009]. Большое внимание исследователей привлекают и мультисолитонные решения УСГ [Белова, Кудрявцев, 1997; Kalberman, 2004].

Рассмотрим модифицированное уравнение синус-Гордона (МУСГ) следующего вида [Шамсутдинов и др., 2009; Fogel et al., 1977; Екомасов и др., 2008]:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{K(x)}{2} \sin 2\theta = 0, \quad (1)$$

где $K(x)$ — функция, характеризующая пространственную модуляцию периодического потенциала (ПМПП). В случае $K(x) = 1$ уравнение (1) переходит в известное уравнение синус-Гордона и имеет решение в виде топологического солитона (или кинка):

$$\theta(x, t) = 2 \arctg(\exp[\Delta(v_0)(x - v_0 t)]), \quad (2)$$

где $\Delta(v) = 1/\sqrt{1-v^2}$, v_0 — непрерывный параметр ($0 < v_0 < 1$), определяющий скорость движения кинка. Есть также пространственно локализованное решение уравнения (1) — покоящийся бризер:

$$\theta_{breather}(x, t, \omega) = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-\omega^2} \sin \omega t}{\omega \cosh(\sqrt{1-\omega^2}(x-x_0))} \right),$$

где ω — частота колебаний бризера, x_0 — координата его центра.

В настоящее время аналитическими и численными методами подробно изучена динамика солитонов УСГ для случая «точечной примеси» — $K(x) = 1 - \varepsilon \delta(x)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $0 < \varepsilon < 1$ [Браун, Кившарь, 2008]. Показано, что в случае приближения «недеформируемого кинка» примесь действует как потенциал. Причем, при соответствующем знаке константы ε ($\varepsilon > 0$) она действует на кинк как притягивающий потенциал, поэтому солитоны УСГ могут быть локализованы и излучать. Для случая приближения «деформируемого кинка», в дополнении к колебательному движению кинка на потенциале, создаваемом примесью, возникают эффекты деформации кинка (например, сильное изменение его формы), имеющие резонансный характер [Браун, Кившарь, 2008]. Учитывалась и возможность возбуждения примесной моды при рассеянии кинка, приводящая к существенному изменению результатов динамики кинка [Piette, Zakrzewski, 2009; Kivshar et al., 1991; Белова, Кудрявцев, 1997]. Отметим здесь такой интересный эффект, как отражение кинка притягивающей примесью из-за резонансного обмена энергией между трансляционной модой кинка и примесной модой. Рассматривался также случай многих точечных примесей дельтаобразного вида, представляющий интерес для некоторых физических приложений [Gulevich, Kusmartsev, 2006; Крючков, Капля, 2003], и даже случай пространственной модуляции периодического потенциала гармонического вида [González et al., 2007]. Также аналитическими и численными методами [Fogel et al., 1977; Ekomasov et al., 2006] исследована динамика кинков УСГ $K(x)$ ступенчатого вида. Для случая пространственно протяженной примеси, например, вида:

$$K(x) = \begin{cases} 1, & x < x_1, x > x_1 + W, \\ 1 - \Delta K, & x_1 \leq x \leq x_1 + W, \end{cases} \quad (3)$$

где W — ширина области пространственной модуляции периодического потенциала, левая граница которой находится в точке x_1 . Также исследовалось взаимодействие кинка с примесью, как для недеформируемой, так и деформируемой модели кинка [Piette, Zakrzewski, 2007; Екомасов, Гумеров, 2012; Ekomasov, Shabalin, 2006]. Найдена зависимость скорости и структуры кинка, солитона и бризера от времени, минимальная скорость необходимая кинку для преодоления потенциальной ямы, создаваемой примесью.

Учет влияния на динамику кинков возбуждаемой на одиночной примеси нелинейной волны проведен численными методами в [Екомасов, Гумеров, 2012]. В работе [Piette, Zakrzewski, 2007] численно и аналитически показана возможность резонансного взаимодействия кинка с возбуждаемой примесной модой, причем задача решена без точного анализа изменения структуры кинка при взаимодействии с примесью. Анализ структуры и свойств, возбуждаемых на примеси локализованных нелинейных волн, проведен численно в [Екомасов и др., 2008]. Рассмотрен в рамках модели синус-Гордона также случай изотопической примеси [Zhang et al., 1992] и нетривиальной метрики времени [Javidan, 2008; Kalbermann, 2001].

Для случая двух одинаковых примесей [Екомасов и др., 2010; Екомасов и др., 2012] показана возможность сильных коллективных эффектов в системе, которые можно использовать для возбуждения мультисолитонов уравнения синус-Гордона трехкинкового типа, например, тритона и воббла. Также показана возможность еще одного интересного эффекта — «квазитуннелирования», при котором кинку для прохождения через область двойной примеси требуется минимальная кинетическая энергия, меньшая, чем для прохождения одиночной примеси. Однако

в них, во-первых, рассмотрены только отдельные сценарии эволюции кинка при прохождении двух примесей. И, во-вторых, не исследованы структура и свойства четырехкинковых солитонов, возбуждаемых на примесях. В настоящей работе решается задача о нахождении всех возможных сценариев динамики кинков одномерной модели синус-Гордона с двумя одинаковыми пространственно протяженными примесями, с учетом возможности возбуждения локализованных высокоамплитудных нелинейных волн мультисолитонного типа.

Взаимодействие кинка с притягивающими примесями

Рассмотрим случай, когда размер кинка и размер, характеризующий ПМПП, одного и того же порядка. Пространственную модуляцию периодического потенциала будем моделировать в следующем виде [Екомасов и др., 2012]:

$$K(x) = \begin{cases} 1, & x < x_1, \quad x_1 + W < x < x_1 + W + d, \quad x > x_1 + 2W + d, \\ 1 - \Delta K, & x_1 \leq x \leq x_1 + W, \quad x_1 + W + d \leq x \leq x_1 + 2W + d, \end{cases} \quad (4)$$

т. е. двух одинаковых примесей, расположенных на определенном расстоянии d друг от друга, $W = x_2 - x_1 = x_4 - x_3$, $d = x_3 - x_2$. Очевидно, что при $\Delta K > 0$, примесь является потенциальной ямой для движущегося кинка, а при $\Delta K < 0$ — потенциальным барьером.

Для рассматриваемых больших возмущений УСГ, в общем случае, необходимо использовать численные методы. Уравнение (1) решалось численно, с использованием явной схемы [Екомасов и др., 2012; Гумеров и др., 2010]. Дискретизация уравнения проводилась по стандартной пятиточечной схеме типа «крест», обладающей условием устойчивости $(\Delta t / \Delta h)^2 \leq 0.5$, где Δt — шаг по времени, Δh — шаг по координате. В начальный момент времени имеем кинк вида (2), движущийся с постоянной скоростью u_0 , а граничные условия имеют вид: $\theta(-\infty, t) = 0$, $\theta(+\infty, t) = \pi$, $\theta'(\pm\infty, t) = 0$.

Типичные реализации численного решения уравнения (1) (со стандартным подходом), которые использовались в работах [Екомасов и др., 2008; Екомасов и др., 2009; Ekomasov, Shabalin, 2006], позволяют рассчитать структуру и динамику кинков с точностью вполне достаточной, чтобы наблюдать захват (или «пиннинг») и прохождение кинка через примеси, структуру и свойства возбуждаемых нелинейных волн. Однако, для изучения возможных резонансных эффектов необходима принципиально более высокая точность счета. Поэтому при аппроксимации функции $\theta(x, t)$ использовалось $N_x = 10^4$ точек, хотя это и многократно увеличивает время расчета (по сравнению с программами, использованными в более ранних наших работах). Многопоточность написанной программы позволяет эффективно использовать ресурсы современных многоядерных процессоров, что существенно экономит время расчетов.

В связи с особыми требованиями к точности проводимых расчетов, необходимо реализовать особый контроль погрешности результата. Погрешность, накапливаемая в течение вычислительного эксперимента, оценивалась с помощью известного точного решения (2). Результат сравнения численного и аналитического решений приведен на рисунке 1. Приведенная погрешность рассчитывалась следующим образом: в заданный момент времени максимальное отклонение численного решения от аналитического нормировалось на характерную величину π :

$$\varepsilon = \frac{\max |\theta(x, t) - \theta^*(x, t)|}{\pi},$$

где $\theta(x, t)$ — численное решение уравнения (1), $\theta^*(x, t)$ — аналитическое решение (2). Важным моментом является то, что для небольшого увеличения точности расчета необходимо многократное увеличение числа точек аппроксимации. Исходя из этого, используемое в расчетах значение $N_x = 10^4$ является наиболее оптимальным. При этом на точность вычисления динамических

характеристик моделируемой системы (например, частот колебаний центра кинка или бризера) наибольшее влияние оказывает не столько абсолютная величина накопленной погрешности, сколько амплитуда ее «осцилляции» (на рис. 1 кривая 1 наиболее гладкая).

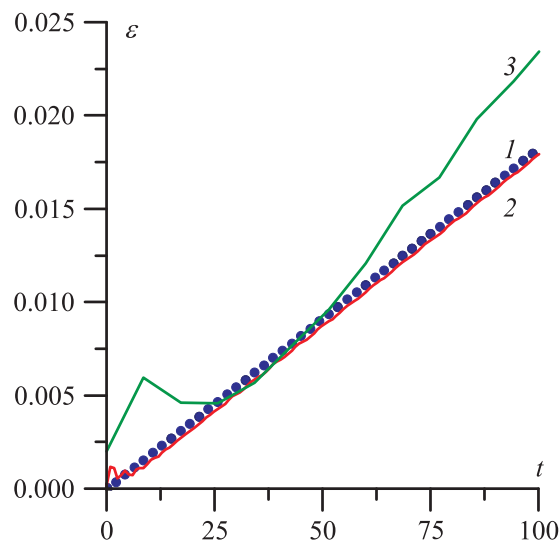


Рис. 1. Зависимость максимальной приведенной погрешности ε , накапливаемой численной схемой за типичное время численного эксперимента, от времени t при: 1) $N_x = 10^5$, 2) $N_x = 10^4$, 3) $N_x = 10^3$

В ходе проведенных численных экспериментов кинк пересекает области ПМПП, при этом в каждый момент времени рассчитывается структура кинка и его основные динамические характеристики. Среди возможных вариантов динамики кинка наблюдались следующие: кинк «захватывается» в области первой (рис. 2, кривая 2) или второй примеси (рис. 2, кривая 3), кинк осциллирует между ними продолжительное время (рис. 2, кривая 1), отражается в обратном направлении (рис. 2, кривая 5), либо проходит область примеси (рис. 2, кривая 4). В последних двух случаях на примесях возбуждаются осциллирующие локализованные высокоамплитудные нелинейные волны типа «бризер» (см. рис. 4), которые существенно влияют на исход рассеяния кинка. Во-первых, на их возбуждение может тратиться значительная часть начальной энергии кинка. Во-вторых, последующее взаимодействие с этими локализованными волнами лежит в основе механизма резонансных эффектов (в случае одиночных примесей подобные взаимодействия могут приводить к отражению от притягивающего потенциала [Kivshar et al., 1991; Piette, Zakrzewski, 2007; Екомасов, Гумеров, 2011]). Особо также можно выделить случай, когда примеси расположены достаточно близко друг к другу, тогда энергия необходимая для перехода между ними невелика и кинк может осциллировать между ними продолжительное время. К тому же, в данном случае может образоваться мультисолитонное состояние из связанных кинка и бризера [Екомасов и др., 2012]. В данном случае геометрический центр кинка уже не отражает полного состояния мультисолитонного образования. Эта область выделена на рисунке 3 как область захвата с многократным перескоком с одной примеси на другую (в течении длительного времени). На данной диаграмме приведен полученный численно полный анализ возможных сценариев динамики кинка в рассматриваемом случае в зависимости от начальной скорости кинка v_0 и расстояния между примесями d .

На рисунке 3 видно наличие некоторого критического расстояния между примесями d_{crit} , при котором качественно меняется поведение системы. Отметим, что при более детальном исследовании качественного перехода более корректным было бы рассмотрение не определенной точки d_{crit} , а некоторой переходной области. Однако для простоты условимся считать $d_{crit} \approx 3.2$ (в приведенном случае). При $d < d_{crit}$ область двойной примеси можно в целом рассматривать

как эффективную одиночную примесь. Как еще видно из рисунка 3, на котором горизонтальная линия соответствует пороговой скорости одиночной примеси $v_{\min}^{\text{one}} = 0.245$, в одной точке ($d = 0.84$) совпадают пороговые скорости, необходимые для прохождения через ПМПП как для двойной, так и для одиночной примеси с теми же параметрами ΔK и W .

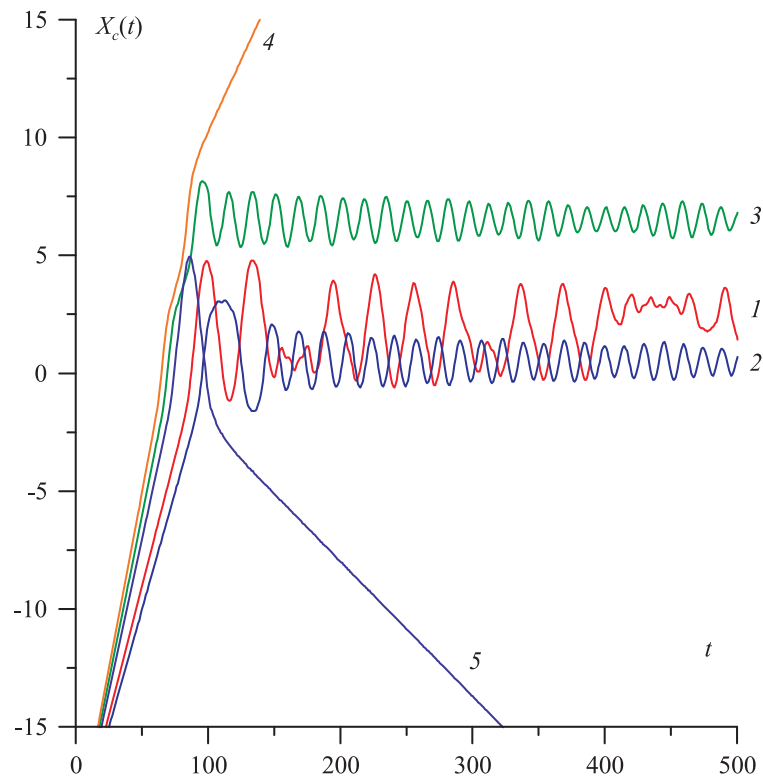


Рис. 2. Зависимость координаты центра кинка X_c от времени t для различных параметров моделирования при $\Delta K = 0.8$, $W = 1$: 1) Захват кинка на одной из примесей с длительным перескоком [при $v_0 = 0.22$, $d = 1.5$], 2) Захват на первой примеси [при $v_0 = 0.20$, $d = 5$], 3) Захват на второй примеси [при $v_0 = 0.28$, $d = 5$], 4) Прохождение [при $v_0 = 0.30$, $d = 5$], 5) Отражение [при $v_0 = 0.26$, $d = 2$]

Однако при $d > d_{\text{crit}}$ диаграмма приобретает «лепестковый» характер: области «захвата» и прохождения начинают чередоваться. Причина такого принципиально нового поведения, по нашему мнению, кроется в том, что потери энергии кинка на возбуждение локализованных волн (в области примеси) зависят от его начальной скорости с некоторой периодичностью. И когда эти потери превышают определенное значение (определяемое параметрами примеси), оставшейся энергии кинка недостаточно, чтобы «вырваться» из притягивающего потенциала двойной примеси, и происходит его «захват». На рисунке 5 приведены три «вертикальных среза» рисунка 3 в точках $d = 5$ (рис. 5а), $d = 6$ (рис. 5б), $d = 7$ (рис. 5с). Интересно отметить, что в некоторых частных случаях кинку для прохождения через область двух одинаковых примесей вида (4) требуется кинетическая энергия меньшая, чем для прохождения области одиночной примеси (3) с теми же значениями параметров ΔK и W . Область начальных скоростей кинка, позволяющих преодолевать примесные области, (ниже линии $v_0 = v_{\min}^{\text{one}} = 0.245$) можно назвать областью «квазитуннелирования» (см. рис. 3, область б). Вид полученных зависимостей v_{kon} от v_0 (рис. 5) имеет существенно меньшее число резонансных скоростей в отличие от подобных зависимостей, полученных для случая одной примеси [Екомасов, Гумеров, 2011]. Заметим также, что для случая нахождения минимальной скорости, необходимой кинку для прохождения первой примеси, наличие второй примеси можно качественно учесть введением новой эффективной

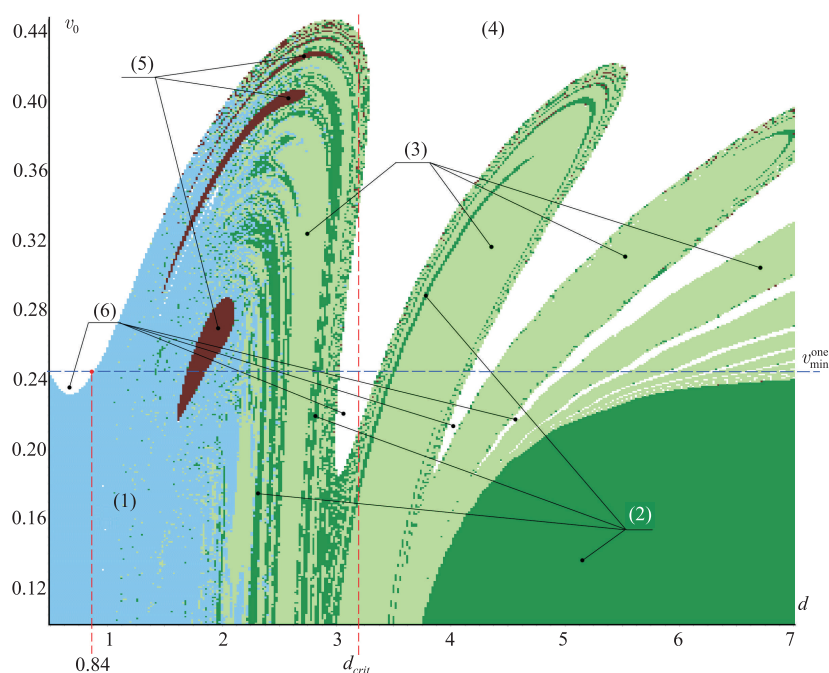


Рис. 3. Диаграмма возможной эволюции кинка в зависимости от начальной скорости кинка v_0 и расстояния d между протяженными примесями при $W = 1$, $\Delta K = 0.8$. Области диаграммы: (1) — захват кинка на одной из примесей с длительным перескоком, (2) — захват на первой примеси, (3) — захват на второй примеси, (4) — прохождение кинка через область обеих примесей, (5) — полное отражение кинка, (6) — область «квазитуннелирования», является частью области (4)

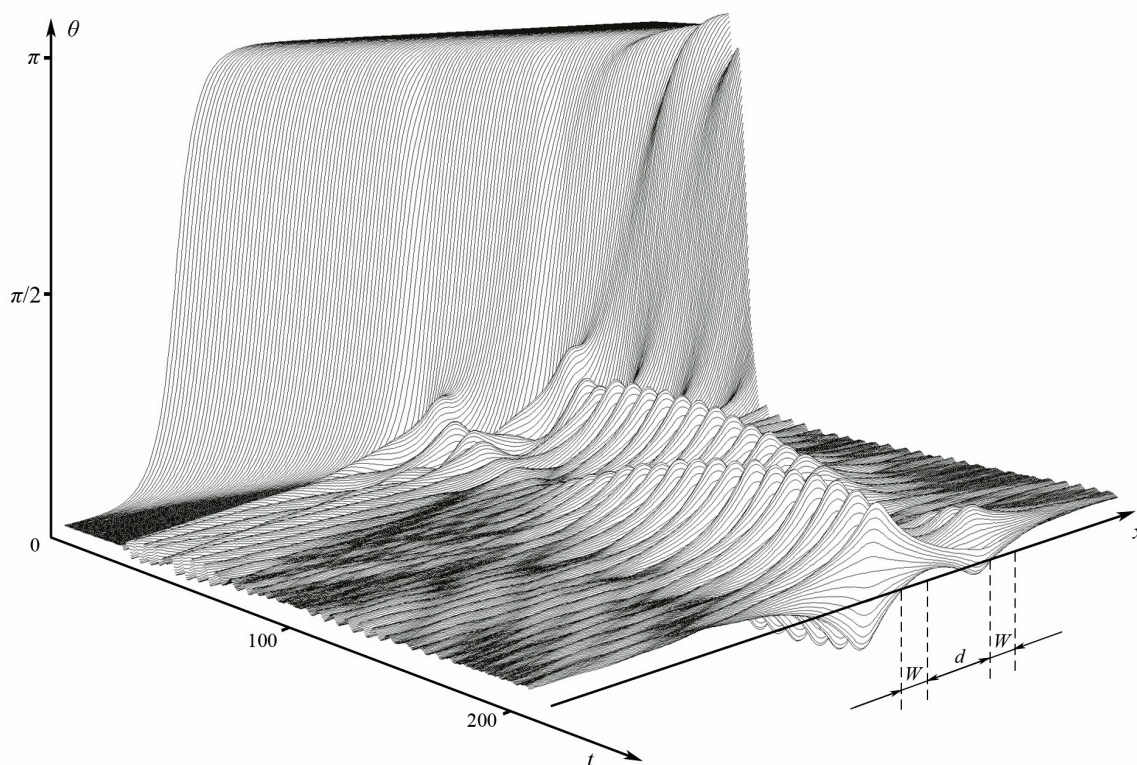


Рис. 4. Динамика прохождения кинка через область ПМПП и возбуждение в них высокоамплитудных связанных нелинейных волн бризерного типа при $\Delta K = 1.2$, $W = 1$, $d = 5$, $v_0 = 0.64$

(меньшей по ширине) одиночной примеси. А для случая нахождения минимальной скорости, необходимой кинку для прохождения обеих примесей, подобное невозможно, и уже не существует единственного значения пороговой скорости, а появляется целый ряд значений пороговой скорости.

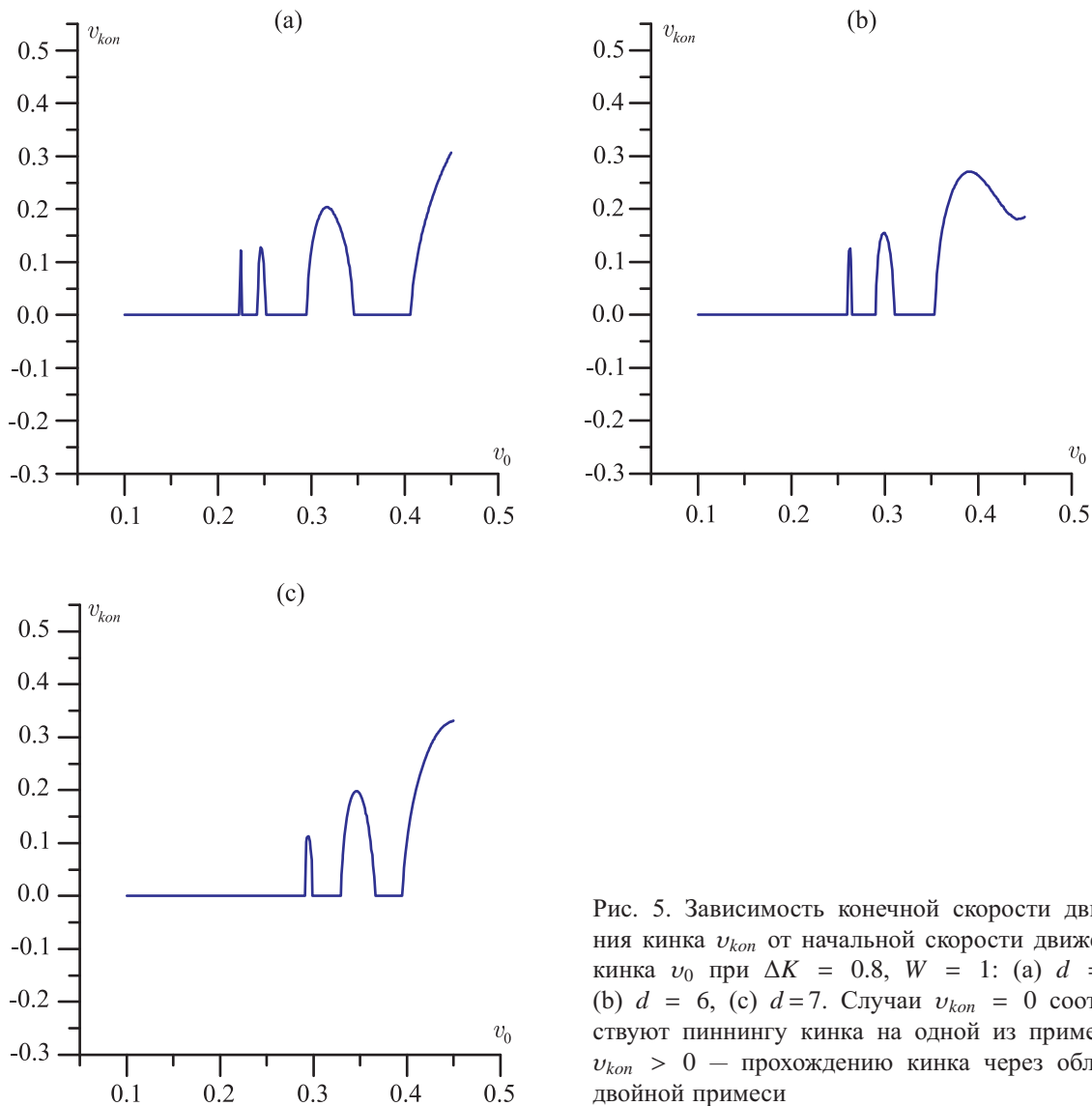


Рис. 5. Зависимость конечной скорости движения кинка v_{kon} от начальной скорости движения кинка v_0 при $\Delta K = 0.8$, $W = 1$: (a) $d = 5$, (b) $d = 6$, (c) $d = 7$. Случаи $v_{kon} = 0$ соответствуют пиннингу кинка на одной из примесей, $v_{kon} > 0$ — прохождению кинка через область двойной примеси

Анализ полученных численно результатов показывает, что критическое расстояние d_{crit} разделяет диаграмму на две области, характеризующимися сильным и слабым взаимодействием между локализованными нелинейными волнами. Свойства этих волн из второй области диаграммы (которая наиболее сильно отличается от типичной динамики кинка при наличии одиночной примеси) требуют дополнительного рассмотрения. Необходимо отметить, что впервые наличие подобного расстояния d_{crit} было отмечено в работе [Екомасов и др., 2012], где исследовались свойства мультисолитонных (трехкинковых) состояний, локализованных в области двойной примеси.

Заключение

Показано, что даже для случая двух примесей в модели синус-Гордона возможно наблюдение коллективных эффектов влияния примесей, сильно зависящих от параметров примесей и от расстояния между ними. Найдено наличие определенного критического расстояния между примесями, которое разделяет динамическое поведение кинка на два возможных сценария. В первом из них поведение кинка похоже на его поведение в случае одиночной примеси, а во втором — конечное состояние кинка, пересекающего примесные области, периодически меняется в зависимости от его начальной скорости. Это связано с фазой колебаний локализованной волны, возбуждаемой в области второй примеси.

Список литературы

- Шамсутдинов М. А., Назаров В. Н., Ломакина И. Ю. и др. Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. — М.: Наука, 2009. — 368 с.
- Екомасов Е. Г., Азаматов Ш. А., Муртазин Р. Р. Изучение зарождения и эволюции магнитных неоднородностей типа солитонов и бризеров в магнетиках с локальными неоднородностями анизотропии // Физика Металлов и Металловедение. — 2008. — Т. 105, № 4. — С. 341–349.
- Екомасов Е. Г., Азаматов Ш. А., Муртазин Р. Р. Возбуждение нелинейных уединенных изгибных волн в движущейся доменной границе // Физика Металлов и Металловедение. — 2009. — Т. 108, № 6. — С. 1–6.
- Гумеров А. М., Екомасов Е. Г., Муртазин Р. Р. Моделирование динамики доменных границ в слабых ферромагнетиках // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов <Наука и образование>, URL: <http://ofernio.ru/portal/newspaper/ofernio/2010/5.doc> (дата обращения: 11.05.2010. — 2010. — № 5.
- Екомасов Е. Г., Гумеров А. М., Рахматуллин И. И. Численное моделирование пиннинга и нелинейной динамики доменных границ в ферромагнетиках с дефектами // Вестник Башкирского университета. — 2010. — Т. 15, № 3. — С. 564–566.
- Екомасов Е. Г., Гумеров А. М., Муртазин Р. Р. О возбуждении солитонов при взаимодействии кинков уравнения синус-Гордона с притягивающей примесью // Компьютерные исследования и моделирование. — 2012. — Т. 4, № 3. — С. 509–520.
- Белова Т. И., Кудрявцев А. Е. Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля // УФН. — 1997. — Т. 167, № 4. — С. 377–406.
- Крючков С. В., Капля Е. В. Солитонная линия задержки на основе полупроводниковой сверхрешетки // Журнал технической физики. — 2003. — Т. 73. — С. 53–56.
- Браун О. М., Кившарь Ю. С. Модель Френкеля-Конторовой: Концепции, методы, приложения. — М.: Физматлит, 2008. — 519 с.
- Екомасов Е. Г., Гумеров А. М. Моделирование взаимодействия нелинейных волн в модели синус-Гордона для материалов с дефектами // Перспективные Материалы. — 2011. — № 12. — С. 104–108.
- Екомасов Е. Г., Гумеров А. М. Нелинейная динамика доменных границ в ферромагнетиках с учетом возбуждения магнитных солитонов на дефектах // Письма о материалах. — 2012. — Т. 2. — С. 17–20.
- Якушев Л. В. Нелинейная физика ДНК. — М.: Институт компьютерных исследований; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. — 252 с.
- Алфимов Г. Л. Нелокальное уравнение синус-Гордона: решения типа «кинк» в пределе слабой нелокальности // Нелинейная динамика. — 2009. — Т. 5, № 4. — С. 585–602.
- Bratsos A. G. The solution of the two-dimensional sine-Gordon equation using the method of lines // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2007. — Vol. 206, No. 1. — P. 251–277.

- Currie J. P., Trullinger S. E., Bishop A. R., Krumhandl J. A.* Numerical simulation of sine-Gordon soliton dynamics in the presence of perturbations // *Phys. Rev. B.* — 1977. — Vol. 15, No. 12. — P. 5567–5580.
- Ekomasov E. G., Shabalin M. A.* Simulation the nonlinear dynamics of domain walls in weak ferromagnets // *The Physics of Metals and Metallography.* — 2006. — Vol. 101. — P. S48–S50.
- Ekomasov E. G., Shabalin M. A., Azamatov S. A., Buharmetov A. F.* Evolution of sine-Gordon equation kinks in the presence of spatial perturbations // *Functional Materials.* — 2006. — Vol. 13, No. 3. — P. 443–446.
- Fogel M. B., Trullinger S. E., Bishop A. R., Krumhandl J. A.* Dynamics of sine-Gordon solitons in the presence of perturbations // *Phys. Rev. B.* — 1977. — Vol. 15. — P. 1578–1592.
- González J. A., Cuenda S., Sánchez A.* Kink dynamics in spatially inhomogeneous media: The role of internal modes // *Phys. Rev. E.* — 2007. — Vol. 75. — P. 036611.
- Gulevich D. R., Kusmartsev F. V.* Perturbation theory for localized solutions of the sine-Gordon equation: Decay of a breather and pinning by a microresistor // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74. — P. 214303.
- Javidan K.* Analytical formulation for soliton-potential dynamics // *Phys. Rev. E.* — 2008. — Vol. 78. — P. 046607.
- Kalberman G.* The sine-Gordon wobble // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2004. — Vol. 37. — P. 11603–11612.
- Kalbermann G.* A model for soliton trapping in a well // *Chaos, Solitons and Fractals.* — 2001. — Vol. 12, No. 13. — P. 2381–2385.
- Kivshar Y. S., Zhang F., Vazquez L.* Resonant soliton-impurity interactions // *Phys. Rev. Lett.* — 1991. — Vol. 67. — P. 1177–1180.
- Piette B., Zakrzewski W. J.* Scattering of sine-Gordon kinks on potential wells // *J. Phys. A Math. Theor.* — 2007. — Vol. 40. — P. 5995–6010.
- Piette B., Zakrzewski W. J.* Scattering of sine-Gordon breathers on a potential well // *Phys. Rev. E.* — 2009. — Vol. 79. — P. 046603.
- Willis C. R.* Comment on Existence of internal modes of sine-Gordon kinks // *Phys. Rev. E.* — 2006. — Vol. 73. — P. 068601.
- Zhang F., Kivshar Y. S., Vazquez L.* Resonant kink-impurity interactions in the sine-Gordon model // *Phys. Rev. A.* — 1992. — Vol. 45. — P. 6019–6030.