1. concours général 1990 - exercice 1

énoncé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres entiers définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{2n} = u_n \text{ et } u_{2n+1} = 1 - u_n. \end{cases}$$

1. Calculer u_{1990}.
2. Déterminer le nombre d'indices n, inférieurs ou égaux à 1990, tels que $u_n = 0$.
3. Soit p un nombre entier naturel et $N = (2^p - 1)^2$.
   Calculer u_N.

2. concours général 1990 - exercice 1

Solution 1

1. $$\begin{aligned} u_{1990} &= u_{2\times 995} \\ &= u_{995} \\ &= u_{497\times 2+1} \\ &= 1 - u_{497} \\ &= u_{248} \\ &= u_{124} \\ &= u_{62} \\ &= u_{31} \\ &= 1 - u_{15} \\ &= u_{7} \\ &= 1 - u_{3} \end{aligned}$$

$= u_1$

$= 1$

2. $u_{2n+1} = 1 - u_n$ or $u_n = u_{2n}$
   Donc $\quad u_{2n+1} = 1 - u_{2n} \Leftrightarrow u_{2n+1} + u_{2n} = 1$ Donc

$$\begin{array}{rcl} u_0 + u_1 & = & 1 \\ u_2 + u_3 & = & 1 \\ .... & = & 1 \\ u_{2n} + u_{2n+1} & = & 1 \end{array}$$

   En additionnant : $\sum\limits_{i=0}^{2n+1} u_n = n + 1$, d'où $\sum\limits_{i=0}^{1989} u_n = 995$
   $u_0 = 0$ donc $u_0 \in \{0, 1\}$
   Or si $u_n \in \{0, 1\}$ alors $u_{2n} \in \{0, 1\}$
   Et $u_{2n+1} = 1 - 0$ ou $u_{2n+1} = 1 - 1$
   Donc $u_{2n+1} \in \{0, 1\}$
   On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \{0, 1\}$
   Or $\sum\limits_{i=0}^{1989} u_n = 995$, donc il existe 995 indices n, inférieurs où égaux à 1989, tels que $u_n = 1$ et 995 indices n tels que $u_n \neq 1$ donc $u_n = 0$. Or $u_{1990} \neq 0$ donc il existe 995 indices n, inférieurs ou égaux à 1990, tels que $u_n = 0$.

3. Soit P_n la propriété : "$u_k = u_{2^n k}$", $\forall k \in \mathbb{N}$.
   $u_{2^0 k} = u_k$ donc P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie pour n quelconque. Montrons que p_{n+1} est vraie.
$u_k = u_{2^n k}$ or $u_{2^n k = u_{2 \times 2^n k}}$ Donc $u_k = u_{2^{n+1} k}$
Donc P_n est vraie. D'après le principe de récurrence P_n est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $p = 0$ alors $N = 0$ et $u_N = 0$.
Etudions le cas $p > 0$
$(2^p - 1)^2 = 2^{2p} - 2^{p+1} + 1$.
$2p > 0$ donc 2^{2p} est pair.
$p + 1 > 0$ donc $2^{p+1} estpair.$
On en déduit que N est impair. Donc

$$\begin{aligned} u_N &= 1 - u_{2^{2p-1} - 2^p} \\ &= u_{2^p \left(\frac{2^{2p-1} - 2^p}{2^p} \right)} \\ &= 1 - u_{2^{p-1} - 1} \end{aligned}$$

Soit Q_n la propriété "$u_N = 1 - u_{2^{p-2n-1} - 1}$" avec $n \in \mathbb{N}$ et $n < \frac{p}{2}$
"$u_N = 1 - u_{2^{p-1} - 1}$" donc Q_0 est vraie.
Supposons Q_n vraie pour n quelconque $\left(n < \frac{p}{2} - 1 \right)$. Montrons que Q_{n+1} est vraie :
$u_N = 1 - u_{2^{p-2n-1} - 1}$ par hypothèse de récurrence. Donc

$$\begin{aligned} u_N &= 1 - u_{2^{p-2n-1} - 2 + 1} \\ &= u_{2^{p-2n-2} - 1} \\ &= u_{2^{p-2n-2} - 2 + 1} \\ &= 1 - u_{2^{p-2n-3} - 1} \\ &= 1 - u_{2^{p-2(n+2)-1} - 1} \end{aligned}$$

Donc Q_{n+1} est vraie. Supposons p pair. Prenons $\left(n = \frac{p}{2} - 1\right)$, on a :
$u_N = 1 - u_{2^1 - 1} = 0$
Supposons p impair. Prenons $n = \frac{p-1}{2}$
$u_N = 1 - u_{2^0 - 1} = 1$
Finalement, $\forall p \in \mathbb{N}, u_N = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^p}{2}$