離散数理工学　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**2016 年 2 月 16 日**
期末試験　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　岡本 吉央

9:00–10:30．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．

採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと．(その文字列は覚えておくように．) 採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1　表の出る確率が p であり，裏の出る確率が $1-p$ であるような硬貨を考える．ただし，$0 < p \le 1$ である．この硬貨を続けて何回か独立に投げることを考える．以下の問いに答えよ．

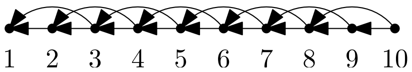
1. n 回硬貨を投げたとき，表の出る回数を表す確率変数を X とする．定数 $c > 1$ に対して $\mathrm{E}[c^X]$ が何であるか，答えよ．

2. 次の不等式を証明せよ．

$$\Pr(X \ge 2pn) \le \left(\frac{1+(c-1)p}{c^{2p}}\right)^n.$$

3. $p = 1/4$ のとき，この右辺を最小とする c を求めよ．(注意：上の小問が解けていなくても，この小問に解答してよい．)

問題 2　次のような前進問題の変種を考える．考える有向グラフの頂点集合は $\{1, 2, \ldots, n\}$ であり，頂点 2 から出る辺は頂点 1 へ向かうものしか存在せず，頂点 1, 2 以外の頂点 i から出る辺は頂点 $i-1$ と頂点 $i-2$ へ向かうものしか存在しない．このグラフにおいて，頂点 n から始めて，辺をたどることで頂点 1 に到達したい．下図は $n = 10$ の場合のグラフを表している．



乱択アルゴリズムとして「たどる辺を一様分布に従って選び，移動する」ということを繰り返すアルゴリズムを考え，このアルゴリズムがたどる辺の数を確率変数 R_n で表す．以下の問いに答えよ．

1. $\mathrm{E}[R_1] = 0, \mathrm{E}[R_2] = 1$ であることを証明せよ．

2. 任意の $k \in \{3, \ldots, n\}$ に対して，次の式が成り立つことを証明せよ．

$$\mathrm{E}[R_k] = 1 + \frac{1}{2}(\mathrm{E}[R_{k-1}] + \mathrm{E}[R_{k-2}]).$$

3. 1 以上の任意の自然数 n に対して，$\mathrm{E}[R_n] \le \dfrac{2}{3}n$ が成り立つことを証明せよ．(注意：上の小問 1, 2 が解けていなくても，この小問に解答してよい．ヒント：数列 $\{\mathrm{E}[R_n]\}_{n\ge1}$ の一般項を求めてもよいし，求めなくてもよい．)

問題 3　次の推移行列を持つマルコフ連鎖 $(X_t \mid t \in \mathbb{N})$ を考える．

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

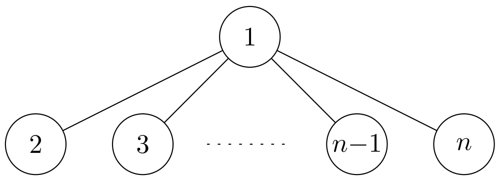
以下の問いに答えよ．

1. このマルコフ連鎖の状態遷移図を描け．

2. このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか，すべて答えよ．

3. このマルコフ連鎖において，極限 $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}^t$ が存在するかどうか答えよ．存在する場合，その極限が何であるか，答えよ．

問題 4　次の図で表されるグラフ上のランダムウォークを考える．これは頂点 1 に他の $n-1$ 個の頂点がすべて隣接するが，その他に隣接関係が存在しないものである．



このとき，頂点 1 から頂点 n への到達時刻の期待値を求めよ．

以上