離散数理工学　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**2015 年 12 月 22 日**
中間試験　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　岡本 吉央

9:00–10:30. A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可.
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと.

採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する.
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと. (その文字列は覚えておくように.) 採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する.

問題 1 次のアルゴリズムを考える.

```
def f(n)
  if n == 0
    print "T"
    return
  elsif n % 2 == 0
    print "T"
    f(n/2)
  else
    f(n-1)
  end
end
```

自然数 $n \geq 0$ に対して，`f`(n) が出力する `T` の総数を q_n で表す.

(1) 次の式が成り立つことを証明せよ.

$$q_n \leq \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 1 + q_{\lfloor n/2 \rfloor} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(2) $q_n = O(\log n)$ が成り立つことを証明せよ. (注 : 小問 (1) が解けていなくても，この小問に解答してよい.)

問題 2 次の漸化式を考える.

$$c_n = \begin{cases} 3 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 2c_{n-1} - n & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{c_n\}_{n \geq 0}$ の一般項 c_n を閉じた形で与えよ. (注 : 母関数を用いる方法によらない解答であっても，部分点を与える.)

問題 3

(1) 素数 p と整数 r が $1 \leq r \leq p-1$ を満たすとき，二項係数 $\binom{p}{r}$ は p で割り切れることを証明せよ.

(2) 素数 p と整数 x, y に対して，

$$(x+y)^p \bmod p = (x^p + y^p) \bmod p$$

が成り立つことを証明せよ. (注 : 小問 (1) が解けていなくても，この小問に解答してよい.)

問題 4 多項式 $x^3 + 4x^2 + 3x + 4 \in \mathbb{Z}_7[x]$ が既約であることを証明せよ.

以上