

提出締切：2015年11月10日 講義終了時

復習問題 3.1 次の漸化式を考える。

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ。

復習問題 3.2 次の漸化式を考える。

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 + f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき、

$$f_n = O\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 3.3 次の漸化式を考える。

$$g_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき、

$$f_n = O(\log n)$$

が成り立つことを証明せよ。

補足問題 3.4 次の漸化式を考える。

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ c_n + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}), \\ c_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases} \end{cases}$$

数列 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ の一般項 b_n と数列 $\{c_n\}_{n \geq 1}$ の一般項 c_n を閉じた形で与えよ。

追加問題 3.5 次の漸化式を考える。

$$t_n = \begin{cases} 5 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 24 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 4t_{n-1} + 4t_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

数列 $\{t_n\}_{n \geq 1}$ の一般項 t_n を閉じた形で与えよ。ヒント：

$$t_n = \frac{4-3\sqrt{2}}{8}(2-2\sqrt{2})^n + \frac{4+3\sqrt{2}}{8}(2+2\sqrt{2})^n.$$

追加問題 3.6 次の漸化式を考える。

$$q_n = \begin{cases} 1 & (n = 0, 1 \text{ のとき}) \\ \leq q_{\lfloor n/3 \rfloor} + q_{\lfloor n/6 \rfloor} + 1 & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき、 $q_n = O(n)$ が成り立つことを証明せよ。ヒント：帰納法の仮定に注意せよ。