離散数理工学 (4) **2015 年 11 月 10 日**
演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2015 年 11 月 17 日 講義終了時

復習問題 4.1 次の数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の母関数 $A(x)$ が何であるか，x の有理関数として答えよ．

1. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$.
2. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 2^n$.
3. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n$.
4. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 3n+1$.

復習問題 4.2 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ．

復習問題 4.3 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ．

復習問題 (発展) 4.4 次の漸化式を考える．

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，任意の $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 4.5 次の漸化式を考える．

$$t_n = \begin{cases} 5 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 24 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 4t_{n-1} + 4t_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 t_n を閉じた形で与えよ．（ヒント：$t_n = \frac{4-3\sqrt{2}}{8}(2-2\sqrt{2})^n + \frac{4+3\sqrt{2}}{8}(2+2\sqrt{2})^n$．）

追加問題 4.6 次の漸化式を考える．

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2b_{n-1} - 3n + 9 & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 b_n を閉じた形で与えよ．

追加問題 4.7 次の漸化式を考える．

$$c_n = \begin{cases} 3 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 2c_{n-1} - n & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{c_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 c_n を閉じた形で与えよ．

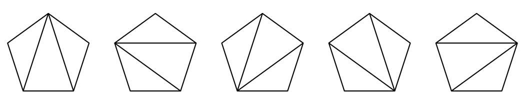
追加問題 4.8 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の母関数が $A(x)$ であるとき，次の数列 b_n の母関数 $B(x)$ が何であるか，$A(x)$ と x を用いた式として答えよ．

1. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$b_n = 5a_n$.
2. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$n \leq 4$ のとき，$b_n = 0$ であり，$n \geq 5$ のとき，$b_n = a_{n-5}$.
3. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$b_n = a_{n+3}$.
4. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，n が偶数であるとき，$b_n = a_n$ であり，n が奇数であるとき，$b_n = 0$.

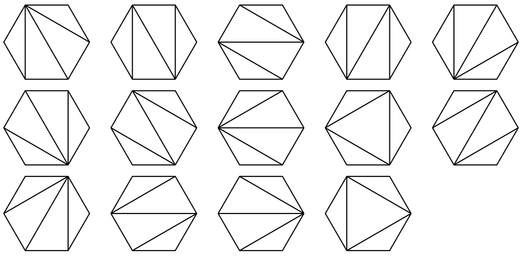
追加問題 4.9 n 個の左括弧と n 個の右括弧を 1 列に並べるとき，括弧の対応付けが取れている場合のみを考える．例えば，$n = 3$ のとき「(())()」は対応付けが取れている並べ方であるが,「())(()」は対応付けが取れていない並べ方である．つまり，左から順に見ていき，常に左括弧の数が右括弧の数以上になっている場合，その並べ方は括弧の対応付けが取れていると呼ぶ．

n 個の左括弧と n 個の右括弧を対応付けが取れるように並べる方法の総数が第 n カタラン数 C_n に等しいことを証明せよ．

追加問題 4.10 正 n 角形の三角形分割の総数を考える．例えば，$n = 5$ の場合，次の図の通り，三角形分割の総数は 5 である．



$n = 6$ の場合，次の図の通り，総数は 14 となる．



正 n 角形の三角形分割の総数が第 $n-2$ カタラン数 C_{n-2} に等しいことを証明せよ．