

提出締切：2015 年 12 月 1 日 講義終了時

復習問題 6.1 多項式 $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ を次のように定める。

$$f(x) = x^5 + x^3 + 1, \quad g(x) = x^2 + x + 1.$$

このとき、 $f(x)$ を $g(x)$ で割った商と剰余が何であるか、答えよ。

復習問題 6.2 多項式 $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ を次のように定める。

$$f(x) = x^5 + x^3 + 1, \quad g(x) = x^2 + x + 1.$$

このとき、 $f(x)$ を $g(x)$ で割った商と剰余が何であるか、答えよ。

復習問題 6.3 以下の問いに答えよ。

1. $\mathbb{Z}_2[x]$ において、 $x^2 + 1$ が $x + 1$ で割り切れることを証明せよ。
2. $\mathbb{Z}_3[x]$ において、 $x^3 + x + 2$ が $x^2 + 2x + 2$ で割り切れることを証明せよ。

復習問題 6.4 $\mathbb{Z}_3[x]$ において、多項式 $x^3 + x^2 + 2x + 2$ と $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ の最大公約元をすべて挙げよ。

復習問題 6.5 多項式 $x^4 + 2x \in \mathbb{Z}_3[x]$ の根をすべて挙げよ。

復習問題 6.6 任意の体 K と任意の要素 $\alpha \in K$ 、任意の多項式 $f(x) \in K[x]$ に対して、次が成り立つことを証明せよ。

$$f(x) \text{ が } x - \alpha \text{ で割り切れる} \Leftrightarrow f(\alpha) = 0.$$

復習問題 6.7 以下の問いに答えよ。

1. 多項式 $x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ が既約であることを証明せよ。
2. 多項式 $x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ が既約であることを証明せよ。
3. 多項式 $x^4 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ の既約分解を 1 つ与えよ。

復習問題 6.8 多項式 $x^3 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ が既約であることを証明せよ。

復習問題 6.9 多項式 $x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ が既約であることを証明せよ。

追加問題 6.10 $\mathbb{Z}_5[x]$ において、多項式 $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + 1$ と $x^3 + x^2 + x + 1$ の最大公約元をすべて挙げよ。

追加問題 6.11 多項式 $x^4 + 3x^3 + 3x \in \mathbb{Z}_7[x]$ の根をすべて挙げよ。

追加問題 6.12 多項式 $x^2 + x + 3 \in \mathbb{Z}_7[x]$ が既約であることを証明せよ。

追加問題 6.13 多項式 $x^3 + x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$ が既約であることを証明せよ。

追加問題 6.14 $\mathbb{Z}_2[x]$ の既約多項式で次数が 4 のものをすべて特定せよ。