離散数理工学 (8) 2015 年 12 月 8 日
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2015 年 12 月 15 日 講義終了時

この演習問題において，常に，q は素数べきであり，$\mathbb{F}_q$ は位数 q の体を表す．

復習問題 8.1 任意の $(a,b,c) \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して，原点と (a,b,c) を通る直線を $L(a,b,c) \subseteq \mathbb{F}_q^3$ で表す．このとき，

$$|\{(a',b',c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\} \mid L(a,b,c) = L(a',b',c')\}| = q-1$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 8.2 空間 $\mathbb{F}_q^3$ において，原点を通る直線の総数が q^2+q+1 となることを証明せよ．(注：演習問題 8.1 と 8.8 を用いてもよい．)

復習問題 8.3 任意の $(a,b,c) \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して

$$|\{(x,y,z) \in \mathbb{F}_q^3 \mid ax+by+cz=0\} - \{\mathbf{0}\}| = q^2-1$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 8.4 任意の $(a,b,c) \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して，

$$P(a,b,c) = \{(x,y,z) \mid ax+by+cz=0\}$$

とする．この $P(a,b,c)$ は原点を通る平面である．また，原点と (a,b,c) を通る直線を $L(a,b,c)$ で表す．このとき，任意の $(a,b,c) \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して，

$$\left|\left\{L(a',b',c') \,\middle|\, \begin{array}{l} (a',b',c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}, \\ L(a',b',c') \subseteq P(a,b,c) \end{array}\right\}\right| = q+1$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 8.1，8.3，8.8，8.9 を用いよ．)

復習問題 8.5 任意の $(a,b,c) \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して，

$$P(a,b,c) = \{(x,y,z) \mid ax+by+cz=0\}$$

とする．この $P(a,b,c)$ は原点を通る平面である．また，原点と (a,b,c) を通る直線を $L(a,b,c)$ で表す．このとき，任意の $(a',b',c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して，

$$\left|\left\{P(a,b,c) \,\middle|\, \begin{array}{l} (a,b,c) \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}, \\ L(a',b',c') \subseteq P(a,b,c) \end{array}\right\}\right| = q+1$$

となることを証明せよ．(ヒント：演習問題 8.2 と 8.4 を用いてもよい．)

復習問題 8.6 空間 $\mathbb{F}_q^3$ において，原点を通る平面の総数が q^2+q+1 となることを証明せよ．(注：演習問題 8.4 と 8.5 を用いてもよい．)

復習問題 8.7 7 種類のワインを 7 人のスタッフで品評するとき，そのとき，以下の条件を満たすようにしたい．

- どのワインも，3 人のスタッフが品評する．
- どの 2 つのワインも，あるスタッフが同時に品評する．

このような品評は可能であるが，どのように行なえばよいか，その手順を示せ．

補足問題 8.8 任意の $(a,b,c) \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して，原点と (a,b,c) を通る直線を $L(a,b,c)$ で表す．このとき，$\mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定義する．

$$(a,b,c) \sim (a',b',c') \Leftrightarrow L(a,b,c) = L(a',b',c').$$

このとき，二項関係 $\sim$ が $\mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ 上の同値関係であること，すなわち，反射性，対称性，推移性を満たすことを証明せよ．

補足問題 8.9 任意の $(a,b,c) \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して，

$$P(a,b,c) = \{(x,y,z) \mid ax+by+cz=0\}$$

とする．この $P(a,b,c)$ は原点を通る平面である．また，原点と (a,b,c) を通る直線を $L(a,b,c)$ で表す．このとき，任意の $(a,b,c),(a',b',c') \in \mathbb{F}_q^3 - \{\mathbf{0}\}$ に対して，次の 2 つが同値であることを証明せよ．

(1) $L(a',b',c') \subseteq P(a,b,c)$.

(2) $(a',b',c') \in P(a,b,c)$.

追加問題 8.10 13 人の審査委員が 13 編の論文を審査するとき，以下の条件を満たすようにしたい．

- どの論文も，4 人の委員が審査する．
- どの 2 つの論文も，ある委員が同時に審査する．

このような審査は可能であるが，どのように行なえばよいか，その手順を示せ．