離散数理工学 (9) 2015 年 12 月 15 日
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2016 年 1 月 5 日 講義終了時

復習問題 9.1 (離散) 確率空間 $(\Omega, \Pr)$ を考える．事象 A, B が排反であるとき，$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$ となることを証明せよ．

復習問題 9.2 公平なサイコロ 1 つの出目を確率変数 X で表すとき，以下の量が何であるか，答えよ．

1. $\mathrm{E}[X]$.
2. $\mathrm{E}[X^2]$.

復習問題 9.3 (離散) 確率空間 $(\Omega, \Pr)$ を考える．事象 A, B が $\Omega = A \cup B$ と $A \cap B = \emptyset$ を満たすとき，

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[X \mid A] \Pr(A) + \mathrm{E}[X \mid B] \Pr(B)$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 9.4 (離散) 確率空間 $(\Omega, \Pr)$ を考える．事象 A, B に対して

$$\Pr(A \cup B) \le \Pr(A) + \Pr(B)$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 9.5 (離散) 確率空間 $(\Omega, \Pr)$ を考える．非負自然数値確率変数 $X \ge 0$ と正実数 $t > 0$ に対して，$\mathrm{E}[X]$ が存在するとき，

$$\Pr(X \ge t) \le \frac{\mathrm{E}[X]}{t}$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 9.6 公平なサイコロを独立に 100 回振ったとき，その出目の総和が 500 以上になる確率が $(\frac{21}{32})^{100}$ 以下となることを，以下の手順に従って証明せよ．

1. i 回目に振ったサイコロの出目を X_i とする．このとき，$\mathrm{E}[2^{X_i}]$ が何であるか，答えよ．
2. $\mathrm{E}[2^{X_1+\cdots+X_{100}}]$ が何であるか，答えよ．
3. マルコフの不等式を用いて，
$$\Pr(X_1 + \cdots + X_{100} \ge 500) \le \left(\frac{21}{32}\right)^{100}$$
となることを示せ．

補足問題 9.7 (離散) 確率空間 $(\Omega, \Pr)$ を考える．このとき，$\Pr(\Omega) = 1$ と $\Pr(\emptyset) = 0$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 9.8 (離散) 確率空間 $(\Omega, \Pr)$ を考える．任意の事象 A に対して，$\Pr(\Omega - A) = 1 - \Pr(A)$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 9.9 (離散) 確率空間 $(\Omega, \Pr)$ を考える．2 つの自然数値確率変数 X, Y と定数 c に対して，次が成り立つことを証明せよ．

1. $\mathrm{E}[X + Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$.
2. $\mathrm{E}[cX] = c\mathrm{E}[X]$.

補足問題 9.10 (離散) 確率空間 $(\Omega, \Pr)$ を考える．

1. 2 つの自然数値確率変数 X, Y が独立であるとき，$\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$ が成り立つことを証明せよ．
2. 自然数 $n \ge 2$ に対して，n 個の自然数値確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が互いに独立であるとする．このとき，
$$\mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i]$$
が成り立つことを証明せよ．

追加問題 9.11 確率変数 X を次で定義する

$$\Pr(X = 0) = \frac{1}{3}, \quad \Pr(X = 1) = \frac{1}{3}, \quad \Pr(X = 2) = \frac{1}{3}.$$

このとき，以下の量が何になるか，答えよ．

1. $\mathrm{E}[X]$.
2. $\mathrm{E}[X^2]$.
3. $\mathrm{E}[2^X]$.

追加問題 9.12 独立な確率変数 X, Y を次で定義する

$$\Pr(X = 0) = \frac{1}{2}, \qquad \Pr(X = 1) = \frac{1}{2},$$
$$\Pr(Y = 0) = \frac{1}{2}, \qquad \Pr(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

また，$Z = X + Y \pmod 2$ として定義する．

1. X と Z が独立であることを示せ．
2. Y と Z が独立であることを示せ．
3. X, Y, Z が互いに独立ではないことを示せ．

追加問題 9.13 公平な硬貨を投げると，表が確率 1/2 で現れ，裏が確率 1/2 で現れる．公平な硬貨を独立に 100 回投げ，表が現れた回数が 90 回以上となる確率を見積もりたい．以下の問いに答えよ．

1. i 回目の硬貨投げで表が出たとき，$X_i = 1$，そうでないとき，$X_i = 0$ となる確率変数 X_i を考える．このとき，$\mathrm{E}[2^{X_i}]$ が何であるか，答えよ．

2. $\mathrm{E}[2^{X_1+\cdots+X_{100}}]$ が何であるか，答えよ．

3. マルコフの不等式を用いて，

$$\Pr(X_1 + \cdots + X_{100} \geq 90) \leq 10^{-8}$$

が成り立つことを証明せよ．