

離散数理工学 第3回
数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015年10月27日

最終更新：2015年10月27日 19:08

岡本 吉央 (電通大) 離散数理工学 (3) 2015年10月27日 1 / 39

スケジュール 後半 (予定)

- 9 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/15)
- ★ 中間試験 (12/22)
- 10 離散確率論：確率的離散システムの解析 (1/5)
- 11 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/12)
- 12 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/19)
- 13 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/26)
- 14 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (2/2)
- ★ 予備日 (2/9)
- ★ 期末試験 (2/16?)

注意：予定の変更もありうる

岡本 吉央 (電通大) 離散数理工学 (3) 2015年10月27日 3 / 39

線形漸化式の厳密解法

目次

- 1 線形漸化式の厳密解法
- 2 漸化式より上界を導出する方法
- 3 今日のまとめ

岡本 吉央 (電通大) 離散数理工学 (3) 2015年10月27日 5 / 39

線形漸化式の厳密解法

線形漸化式の解き方 (1)

- 1 a_n を λ^n で置き換えた式を考える

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

↓

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$$

すなわち、

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

これを考えている漸化式の特性方程式と呼ぶ

岡本 吉央 (電通大) 離散数理工学 (3) 2015年10月27日 7 / 39

スケジュール 前半 (予定)

- 1 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/6)
- ★ 休講 (体育祭) (10/13)
- 2 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/20)
- 3 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/27)
- ★ 祝日で休み (11/3)
- 4 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/10)
- 5 離散代数：整数と有限体 (11/17)
- 6 離散代数：多項式環 (11/24)
- 7 離散代数：多項式環による有限体の構成 (12/1)
- 8 離散代数：有限体の応用 (12/8)

注意：予定の変更もありうる

岡本 吉央 (電通大) 離散数理工学 (3) 2015年10月27日 2 / 39

今日の目標

今日の目標

漸化式を解けるようになる

- ▶ 線形漸化式の解法
- ▶ 上界の導出法

岡本 吉央 (電通大) 離散数理工学 (3) 2015年10月27日 4 / 39

線形漸化式の厳密解法

道 — まとめ

(第2回講義より)

a_n = グラフ P_n における独立集合の総数 とする

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n=2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

岡本 吉央 (電通大) 離散数理工学 (3) 2015年10月27日 6 / 39

線形漸化式の厳密解法

線形漸化式の解き方 (1)

- 2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち、

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\ \therefore \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

この2つの解を λ_1, λ_2 と書くとする

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

岡本 吉央 (電通大) 離散数理工学 (3) 2015年10月27日 8 / 39

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n=2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ つまり, $a_1 = 2$ と $a_2 = 3$ であることを忘れれば, $a_n = \lambda_1^n$ と $a_n = \lambda_2^n$ はこの漸化式の解である
- ▶ このとき, 線形結合 $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ もこの漸化式の解である

なぜならば, $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$

$$\begin{aligned} a_{n-1} + a_{n-2} &= c_1(\lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2}) + c_2(\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1(\lambda_1^{n-1} + \lambda_2^{n-1}) + c_2(\lambda_1^{n-2} + \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \end{aligned}$$

- ▶ $a_1 = 2$ と $a_2 = 3$ を思い出すと, c_1, c_2 が定まる

4 整理する

- ▶ $c_1 = \frac{2\lambda_2 - 3}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{2\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 3}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2})} = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}$
- ▶ $c_2 = \frac{-2\lambda_1 + 3}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{-2\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 3}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2})} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$

したがって, 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$a_n = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

となる

1 行列を用いて書き換える

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n=2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

↓

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \quad (n \geq 3 \text{ のとき})$$

2 行列の累乗を計算する

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする

- ▶ A の固有値と固有ベクトルを計算する
- ▶ A の特性方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\lambda - 1 = 0$$

- ▶ これを解くと, $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- ▶ これが A の固有値で, λ_1, λ_2 と書くことにする

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

3 λ_1^n と λ_2^n の線形結合を作る

- ▶ $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ とする
- ▶ $a_1 = 2, a_2 = 3$ なので,

$$\begin{aligned} 2 &= c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2, \\ 3 &= c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2 \end{aligned}$$

- ▶ c_1, c_2 を変数として, これを解くと

$$c_1 = \frac{2\lambda_2 - 3}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}, c_2 = \frac{-2\lambda_1 + 3}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

$a_n =$ グラフ P_n における独立集合の総数 とする

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n=2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを別の方法を用いて解いてみる

次のように線形漸化式を書けたとする

$$x_1 = c, \quad x_n = Ax_{n-1} \quad (n \geq 2 \text{ のとき})$$

A は正方行列, x_1, x_2, x_3, \dots と c はベクトル

- ▶ このとき, $x_n = A^{n-1}x_1 = A^{n-1}c$
- ▶ したがって, A^{n-1} が計算できればよい

λ_1 に対する A の固有ベクトルを $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_1 y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$ は λ_1 に対する A の固有ベクトル

λ_2 に対する A の固有ベクトルを $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned} Av_2 &= \lambda_2 v_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_2 x \\ \lambda_2 y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって, $v_2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$ は λ_2 に対する A の固有ベクトル

したがって

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5+\sqrt{5}}{20} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5-\sqrt{5}}{20} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(5-\sqrt{5})\lambda_1^n + (5+\sqrt{5})\lambda_2^n}{10} & \frac{-\sqrt{5}\lambda_1^n + \sqrt{5}\lambda_2^n}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}\lambda_1^n + \sqrt{5}\lambda_2^n}{5} & \frac{(5+\sqrt{5})\lambda_1^n + (5-\sqrt{5})\lambda_2^n}{10} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって, $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \lambda_1^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \lambda_2^n \\ &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

となる ($n=1, 2$ のときも, この式は正しい) \square

1 行列を用いて書き換える

$$\begin{aligned} b_n &= \begin{cases} 3 & (n=1 \text{ のとき}) \\ c_n + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \\ c_n &= \begin{cases} 2 & (n=1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

後は同様に, 計算する

これによって対角化: $U = (v_1 \ v_2), \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$AU = U\Lambda, \quad \text{すなわち, } A = U\Lambda U^{-1}$$

$$\triangleright A^n = (U\Lambda U^{-1})^n = U\Lambda^n U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$\triangleright U = (v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ なので, } U^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5+\sqrt{5}}{20} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5-\sqrt{5}}{20} \end{pmatrix}$$

3 まとめる

$n \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(5-\sqrt{5})\lambda_1^{n-2} + (5+\sqrt{5})\lambda_2^{n-2}}{-\sqrt{5}\lambda_1^{n-2} + \sqrt{5}\lambda_2^{n-2}} & \frac{-\sqrt{5}\lambda_1^{n-2} + \sqrt{5}\lambda_2^{n-2}}{(5+\sqrt{5})\lambda_1^{n-2} + (5-\sqrt{5})\lambda_2^{n-2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{15-7\sqrt{5}}{10} \lambda_1^{n-2} + \frac{15+7\sqrt{5}}{10} \lambda_2^{n-2} \\ \frac{5-2\sqrt{5}}{5} \lambda_1^{n-2} + \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \lambda_2^{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \lambda_1^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \lambda_2^n \\ \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \lambda_1^{n-1} + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

次のように定義

- $\triangleright b_n =$ グラフ G_n における独立集合の総数
- $\triangleright c_n =$ グラフ H_n における独立集合の総数

漸化式

$$\begin{aligned} b_n &= \begin{cases} 3 & (n=1 \text{ のとき}) \\ c_n + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \\ c_n &= \begin{cases} 2 & (n=1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

これを解いてみる

計算すると, 次が得られる (はずである): 自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})^n + \frac{1+\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^n \\ c_n &= \frac{2-\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n + \frac{2+\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n \end{aligned}$$

① 線形漸化式の厳密解法

② 漸化式より上界を導出する方法

③ 今日のまとめ

線形漸化式から上界を導く

① 定数項を取り除く

▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

▶ ここで、 $f'_n = f_n + 1$ と置く

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

▶ 帰結: f_n と f'_n のオーダーは同じ▶ 注意: ここから f'_n を厳密に求めて、 f_n を求めてもよいが、ここではそうしない

線形漸化式から上界を導く

③ 数学的帰納法で不等式を証明

ここで、次を証明する

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して、 $f'_n \leq 2\lambda^n$

証明: $n = 1$ のとき

- ▶ $f'_1 = 2$
- ▶ $2\lambda^1 = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$
- ▶ したがって、 $f'_1 < 2\lambda^1$ となる

$n = 2$ のとき

- ▶ $f'_2 = 2$
- ▶ $2\lambda^2 > 2\lambda = 1 + \sqrt{5}$
- ▶ したがって、 $f'_2 < 2\lambda^2$ となる

オーダー記法: 復習

O 記法の定義

非負の値を取る数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ と $\{b_n\}_{n \geq 1}$ に対して、

$$a_n = O(b_n)$$

であるとは、ある自然数 n_0 と正の実数 C が存在して、任意の自然数 $n \geq n_0$ に対して

$$a_n \leq Cb_n$$

が成り立つこと

$a_n = O(b_n)$ であることの直感的な意味

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の増加率は数列 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ の増加率以下である

単純な再帰アルゴリズム

アルゴリズム A

```
1: def fnct(n)
2:   print "a"
3:   if n > 2
4:     fnct(n-1)
5:     fnct(n-2)
6:   end
7: end
```

出力される a の数に対する漸化式

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 + f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここでは、簡単な上界を求めてみる
(計算量の解析において、欲しいものは上界(で十分なこと)が多い)

線形漸化式から上界を導く

② 特性方程式を解く

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

▶ 特性方程式: $\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$

▶ この方程式はただ 1 つ正の解を持ち、それは

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

である

ただ 1 つ正の解を持つことは、
例えば「デカルトの符号規則」から分かる

線形漸化式から上界を導く

証明の続き: 自然数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \\ &= 2\lambda^{k-1}\lambda^2 && (\lambda \text{ が特性方程式の解であるから}) \\ &= 2\lambda^{k+1} && (\text{整理}) \end{aligned}$$

帰結

$$f_n = O\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

ユークリッドのアルゴリズムの計算量

漸化式

$$g_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \text{ のとき} \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & n \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

まずは g_n がどのように増加するか知る必要があるなので、それを探る

- ▶ 「 \leq 」を「 $=$ 」に置き換える
- ▶ $n = 2^k$ の場合だけを考える ($n = 2^k$ のとき、 $\lfloor n/2 \rfloor = 2^{k-1}$)

注: $g_1 \leq 2 + g_{\lfloor 1/2 \rfloor} = 2 + g_0 = 2 + 1 = 3$

$$g'_k = \begin{cases} 3 & k = 0 \text{ のとき} \\ 2 + g'_{k-1} & k \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

▶ これは等差数列

▶ 任意の自然数 $k \geq 0$ に対して, $g'_k = 2k + 3$

つまり, g_n はだいたい $2 \log_2 n$

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き：自然数 k に対して,
任意の自然数 $l \leq k$ に対して $g_l \leq 3 + 2 \log_2 l$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k+1)$

$$\begin{aligned} g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\ &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \\ &\leq 2 + 3 + 2 \log_2((k+1)/2) && (\lfloor \cdot \rfloor \text{ を外す}) \\ &= 5 + 2(\log_2(k+1) - \log_2 2) && (\text{整理}) \\ &= 3 + 2 \log_2(k+1) && (\text{整理}) \end{aligned}$$

□

今日の目標

漸化式を解けるようになる

- ▶ 線形漸化式の解法
- ▶ 上界の導出法

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

帰結

$g_n = O(\log n)$

証明： $n = 1$ のとき

- ▶ 漸化式より, $g_1 \leq 2 + g_{\lfloor 1/2 \rfloor} = 2 + g_0 = 2 + 1 = 3$
- ▶ $3 + 2 \log_2 n = 3 + 2 \log_2 1 = 3 + 0 = 3$
- ▶ したがって, 左辺 \leq 右辺

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 今日のまとめ

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← **重要**
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK