PhD thesis: **Some applications of the formal method in set theory, model theory, probabilistic logics and fuzzy logics**

Author: Aleksandar Perović (1970 –)

Keywords: Lindenbaum algebra, Cohen forcing, dense embedding, completeness, qualitative probability, polynomial weight formula, interpretation method, quantifier elimination, compactness.

References: 52

Area: Set theory, model theory, probabilistic logic, fuzzy logic.

PhD committee: Aleksandar Jovanović (supervisor), Žarko Mijajlović, Miodrag Rašković, Zoran Ognjanović.

Date: 2008

Language: Serbian

Abstract

Introduction. This part gives a brief overview of the contents of the thesis and the obtained results.

Lindenbaum algebras and forcing. Here is presented a simple and elementary proof of the fact that Cohen forcing with finite partial functions produces the same generic extensions as the forcing with propositional Lindenbaum algebra.

Qualitative probability. Here is presented a strongly complete axiomatization of the notion of qualitative probability. Probabilistic logics LPP_2, $LPP_2^{FR(n)}$ and LPP^S are extended with the qualitative probability operator $\preceq$. Two axiom schemata and an infinitary inference rule are added. The extended completeness theorem and decidability are proved.

Polynomial weight formulas. In this part we give a strongly complete axiomatization of the logic of polynomial weight formulas, semantically introduced by Fagin, Halpern and Megiddo in 1990. The noncompactness phenomena is tamed by an infinitary inference rule. The extended completeness theorem is proved.

Applications of the interpretation method. We use the interpretation method in order to prove the compactness theorem for the hyperreal valued polynomial weight formulas and to provide a complete axiomatization of the $L\Pi$ fuzzy logic, with particular emphasis on the application to the prioritized fuzzy constraint satisfaction problem. Using the proved compactness theorem and decidability of the logic of polynomial weight formulas, we give its finitary strongly complete axiomatization.

Appendices. There are two appendices in this thesis: *Logical background* and *Forcing.* They are given here in order to make the thesis self contained.

Neke primene formalne metode u teoriji skupova, teoriji modela, verovatnosnim logikama i fazi logikama

Aleksandar Perović

Sadržaj

1

Uvod

Ova teza predstavlja sintezu mojih istraživanja u prethodne tiri godine i posledica je saradnje sa profesorima Aleksandrom Jovanovićem, Žarkom Mijajlovićem, Miodragom Raškovićem i Zoranom Ognjanovićem. Mada je tema poprilično široka (naslov teze je *Neke primene formalne metode u teoriji skupova, teoriji modela, verovatnosnim logikama i fazi logikama*), reklo bi se čak nepovezana, jedinstvenom je čini upravo korišćena metodologija. Iako se koriste razne formalne tehnike poput eliminacije kvantora, indukcije, "up and down"-argumenta, kompaktnosti, kompletiranja, infinitarnih pravila, ω_1-zasićenosti itd., lajtmotiv ove teze je metod interpretacije. Pored ovog uvodnog poglavlja, teza se sastoji od još četiri poglavlja i dva dodatka, koja ću vam ukratko prikazati.

U drugom poglavlju *Lindenbaumove algebre i forsing* se daje elementarni dokaz činjenice da je Cohenov forsing sa konačnim parcijalnim funkcijama ekvivalentan forsingu preko Lindenbaumove algebre iskaznog računa. Ključne tehnike korišćene u dokazu glavnog rezultata su gusta utapanja i iskazno kodiranje, tj. varijanta metode interpretacije. Rezultati iz ovog poglavlja su publikovani u radu [40].

U trećem poglavlju *Kvalitativna verovatnoća* se daje prva jako potpuna aksiomatizacija pojma kvalitativne verovatnoće. Ovde se koriste razne formalne tehnike poput infinitarnih pravila, eliminacije kvantora i implicitno metode interpretacije. Rezultati izneseni u ovom poglavlju su objavljeni u radu [39].

U četvrtom poglavlju *Polinomijalne težinske formule* se rešava 18 godina star otvoren problem jako potpune aksiomatizacije logike o polinomijalnim težinskim formulama, koju su semantički uveli Fagin, Halpern i Megiddo 1990. Rezultati navedeni u ovom poglavlju su publikovani u radu [43].

U petom poglavlju *Primene metode interpretacije* se dokazuje stav kompaktnosti za hiper-realno vrednosnu logiku sa polinomijalnim težinskim formulama, daje finitarna potpuna aksiomatizacija ove logike (alternativno rešenje problema razmatranog u prethodnom poglavlju), i metod interpretacije se koristi na primeru $L\Pi$ fazi logike. Rezultati prikazani u ovom poglavlju su ili na recenziji, ili su objavljeni u radu [42].

Konačno, dva dodatna poglavlja (tzv apendiksi) *Logičke osnove* i *Forsing* su namenjena širem krugu čitalaca i neophodan su preduslov za razumevanje izloženih rezultata.

Naučni doprinosi ove teze se sastoje u sledećem:

- Na elementaran način je dokazana jednakost Cohenovog forsinga i forsinga preko Lindenbaumove algebre iskaznog računa.

- Data je prva jako potpuna aksiomatizacija pojma kvalitativne verovatnoće.

- Rešen je 18 godina otvoren problem jako potpune aksiomatizacije logike sa polinomijalnim težinskim formulama.

- Dokazan je stav kompaktnosti za hiper-realno vrednosnu logiku sa polinomijalnim težinskim formulama i data je njena finitarna jako potpuna aksiomatizacija.

- Prvi put je upotrebljena metoda RCF-interpretacije u fazi logikama.

Na samom kraju ovog uvoda bih se zahvalio profesorima Aleksandru Jovanoviću, Žarku Mijajloviću, Miodragu Raškoviću i Zoranu Ognjanoviću, bez čijih saveta i sugestija ova teza ne bi bila moguća.

U Beogradu, 14. marta 2008.

Aleksandar Perović

2

Lindenbaumove algebre i forsing

Šta je ustvari forsing? Ukratko, to je tehnika kojom se, polazeći od prebrojivog tranzitivnog modela M teorije T (T je neka teorija jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$) i skupa $G \notin M$, konstruiše model $M[G]$ sa sledećim svojstvima:

- $M[G] \models T$;
- $M[G]$ je prebrojiv i tranzitivan;
- $M \subseteq M[G]$ i $G \in M[G]$;
- M i $M[G]$ imaju iste ordinale, tj. istu visinu;
- $M[G]$ je u odnosu na inkluziju najmanji model sa prethodnim svojstvima.

Ovde kao gratis (bez obzira na G) dobijamo dokaz nezavisnosti aksiome konstruktibilnosti $V = L$ i teorije ZF. S jedne strane, metodom unutrašnjih modela smo pokazali da

$$\mathrm{ZF} \vdash Con(\mathrm{ZF}) \Rightarrow Con(\mathrm{ZF} + V = L)$$

(Gödelov konstruktibilni univerzum). S druge strane, primenjujući forsing, ako je T teorija $\mathrm{ZF} + V = L$, onda je $M = L_\alpha$ za neki granični prebrojivi ordinal α. Odavde će slediti da je

$$M = L^M = L^{M[G]} = L_\alpha,$$

pa kako $G \in M[G] \setminus M$, imamo da

$$M[G] \models \neg(V = L).$$

Da li odavde sledi da

$$Con(\mathrm{ZF}) \Rightarrow Con(\mathrm{ZF} + V \neq L)?$$

Prividno ne, jer je, u opštem slučaju, pretpostavka o egzistenciji tranzitivnog modela jača od pretpostavke o egzistencij bilo kakvog modela, pa, makar i samo teoretski, postoji mogućnost da su svi modeli teorije ZF loše zasnovani (svaki dobro zasnovan se može "kolapsirati" do tranzitivnog). Međutim, da bismo (ZF sredstvima) dokazali da

$$Con(\mathrm{ZF}) \Rightarrow Con(\mathrm{ZF} + V \neq L),$$

dovoljno je da za svaku konačnu podteoriju T teorije ZF pokažemo da

$$Con(T) \Rightarrow Con(T + V \neq L).$$

Ovo dokazujemo na sledeći način:

Neka je $\langle \mathcal{M}, E \rangle$ proizvoljan model teorije ZF. U $\langle \mathcal{M}, E \rangle$ važi teorema refleksije, pa postoji $M \in \mathcal{M}$ tako da

$$\langle \mathcal{M}, E \rangle \models \text{"}M \text{ je prebrojiv tranzitivan model teorije } T\text{"}.$$

Primenom forsinga u $\langle \mathcal{M}, E \rangle$ dobijamo $M[G] \in \mathcal{M}$ tako da

$$\langle \mathcal{M}, E \rangle \models \text{"}M[G] \text{ je prebrojiv tranzitivan model teorije } T + V \neq L\text{"},$$

čime je dokaz završen.

Važno je istaći da skup G nije baš sasvim proizvoljan. O tome šta sve mora da zadovoljava skup G i kako se do njega dolazi se detaljno govori u Dodatku (appendix).

Kako izgleda forsing konstrukcija? U Dodotku su izložena dva pristupa: pristup preko separativnih uređenja, i pristup preko Booleovski vrednosnih modela, koji su uveli Dana Scott i Robert Solovay 1964. godine. U BVM (Booloevsko vrednosni modeli) pristupu, forsing plan izgleda ovako:

M

$M^{\mathcal{B}}$ $\quad /G \quad$ $M^{\mathcal{B}}/G$

$\subseteq$ $\qquad\qquad$ $*$

$M[G]$

k $\qquad\qquad$ $\langle A^*, \in^* \rangle$

2.1: Forsing plan

Dakle, polazimo od prebrojivog modela M npr. teorije ZFC i u njemu kompletne bezatomične Booleove algebre $\mathcal{B}$. U njemu konstruišemo unutrašnji $\mathcal{B}$-model $M^{\mathcal{B}}$. Zatim izaberemo proizvoljan tzv. M-generički ultrafilter G u $\mathcal{B}$, i pomoću njega dobijemo **2**-model $M^{\mathcal{B}}/G$:

$$\|\varphi\|_{\mathbf{2}} = \begin{cases} \mathbf{1} & , \quad \|\varphi\| \in G \\ \mathbf{0} & , \quad \|\varphi\| \notin G \end{cases}$$

za proizvoljnu rečenicu φ. Na primer, u dokazu nezavisnosti CH $\mathcal{B}$

se bira tako da $\|\neg\mathrm{CH}\| \in G$ za svaki tzv. M-generički ultrafilter G. Dalje, $\langle A^*, \in^* \rangle$ je klasičan dobro zasnovan model koji se dobija od $M^{\mathcal{B}}/G$. Njegov tranzitivni kolaps je $M[G]$. Na osnovu teorije Booleovsko vrednosnih modela imamo da

$$M[G] \models \varphi \quad \text{akko} \quad \|\varphi\| \in G,$$

kao i da svaka valjana formula jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$ ima Booleovsku vrednost $\mathbf{1}$. Model $M^{\mathcal{B}}$ se konstruiše tako da svaka aksioma teorije ZFC ima Booleovsku vrednsot $\mathbf{1}$ bez obzira na izbor Booleove algebre $\mathcal{B}$.

Neka je $\mathbb{P}$ beskonačan skup iskaznih slova i neka je $For\mathbb{P}$ odgovarajući skup iskaznih formula. Lako se proverava da je binarna relacija $\sim$ na skupu $For\mathbb{P}$ definisana sa

$$A \sim B \quad \text{iff} \quad A \Leftrightarrow B \text{ is tautology},$$

Booleovska kongruencija. Lindenbaumova algebra od $\mathbb{P}$, u oznaci $\mathcal{B}(\mathbb{P})$, se definiše na sledeći način:

- Skup nošač algebre $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ je skup $For\mathbb{P}/\sim$;
- $[A] \leqslant [B]$ akko $A \Rightarrow B$ je tautologija.

Kao što je to uobičajeno u matematici, neznatno ćemo zloupotrebiti notaciju i identifikovati $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ sa njenim nosačem. Lako se polazuje da je $\mathcal{B}(\mathbb{P}) \setminus \{[A \wedge \neg A]\}$ bezatomično separativno uređenje, pa forsing sa $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ dodaje nove skupove u generičkim proširenjima. Mi ćemo pokazati da je forsing sa iskaznim Lindenbaumovim algebrama ekvivalentan Cohenovom forsingu sa konačnim parcijalnim funkcijama.

2.1 Gusta utapanja

Notacija koju koristimo je standardna, videti npr. [18]. Što se tiče definicije forsinga i njegovih osnovnih osobina, upučujemo čitaoca na dodatak B, kao i na [8, 9, 18]. Ovde ćemo navesti neke činjenice u vezi sa gustim utapanjima. Sama gusta utapanja su glavni alat za unifikaciju različitih forsinga. Kao i ranije, neznatno ćemo zloupotrabiti notaciju i identifikovati parcijalna uređenja sa njihovim skupovima nosačima.

2.1.1 Definicija Neka su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ proizvoljna parcijalna uređenja i neka $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$. Kažemo da je *i kompletno utapanje* ako važi:

1. za svako $p, p' \in \mathcal{P}$, $p \leqslant p'$ povlači $i(p) \leqslant i(p')$;
2. za svako $p, p' \in \mathcal{P}$, p i p' su inkompatibilni u $\mathcal{P}$ akko su $i(p)$ i $i(p')$ inkompatibilni u $\mathcal{Q}$;
3. za svako $q \in \mathcal{Q}$ postoji $p \in \mathcal{P}$ tako da su $i(p')$ i q kompatibilni u $\mathcal{Q}$ za svako $p' \leqslant p$.

2.1.2 Definicija Neka su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ proizvoljna parcijalna uređenja i neka $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$. Kažemo da je *i gusto utapanje* ukoliko važi sledeće:

1. za svako $p, p' \in \mathcal{P}$, $p \leqslant p'$ povlači $i(p) \leqslant i(p')$;
2. za svako $p, p' \in \mathcal{P}$, p i p' su inko9mpatibilni u $\mathcal{P}$ akko $i(p)$ i $i(p')$ su inkompatibilni u $\mathcal{Q}$;
3. $i[\mathcal{P}]$ je gust u $\mathcal{Q}$, tj. za svako $q \in \mathcal{Q}$ postoji $p \in \mathcal{P}$ tako da $i(p) \leqslant q$.

Lako se pokazuje da je svako gusto utapanje ujedno i kompletno utapanje. Ako je $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ gusto utapanje, onda definišemo $i_* : V^{\mathcal{P}} \longrightarrow V^{\mathcal{Q}}$ na sledeći način:

$$i_*(\sigma) = \{\langle i_*(\tau, i(p))\rangle \mid \langle \tau, p\rangle \in \sigma\}.$$

Sledeća teorema nam daje vezu između gustih utapanja i forsinga. Čitalac može naći dokaz u dodatku B, kao i u [18].

2.1.3 Teorema *Neka je M prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC, $i, \mathcal{P}, \mathcal{Q} \in M$, i*

$$M \models \text{"}i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q} \text{ je gusto utapanje"}.$$

Za $G \subseteq \mathcal{P}$, neka je

$$\tilde{i}(G) = \{q \in \mathcal{Q} \mid (\exists p \in G)(i(p) \leqslant q)\}.$$

Tada:

1. *Ako je $H \subseteq \mathcal{Q}$ $\mathcal{Q}$-generički nad M, onda je $i^{-1}(H)$ $\mathcal{P}$-generički nad M i $H = \tilde{i}(i^{-1}(H))$.*

2. *Ako je $G \subseteq \mathcal{P})$ $\mathcal{P}$-generički nad M, onda je $\tilde{i}(G)$ $\mathcal{Q}$-generički nad M i $G = i^{-1}(\tilde{i}(G))$.*

3. *Ako je $G = i^{-1}(H)$ (ili, ekvivalentno, $H = \tilde{i}(G)$, onda je $M[G] = M[H]$.*

Primetimo da su pojmovi kompletnog i gustog utapanja apsolutni za tranzitivne modele teorije ZFC.

Za glavni rezultat u ovom poglavlju (ujednačavanje Cohenovog forsinga i forsinga preko Lindenbaumove algebre iskaznog računa) nam je neophodan Cohenov forsing. Uslov u Cohenovom forsingu je konačna funkcija čiji je domen konačan podskup beskonačnog kardinala κ, a kodomen je $2 = \{0, 1\}$. Uređenje se definiše kao obrnuta inkluzija. Uobičajena oznaka za Cohenov poset je $\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$.

2.2 Glavna teorema

U ovoj sekciji ćemo pokazati ekvivalenciju između Cohenovog forsinga sa konačnim funkcijama i forsinga preko Lindenbaumove algebre iskaznog računa.

2.2.1 Teorema *Neka je $\mathbb{P}$ beskonačan skup iskaznih slova. Tada je forsing sa $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ ekvivalentan Cohenovom forsingu sa* $\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$*, pri čemu je $\kappa = |\mathbb{P}|$.*

Dokaz Prema (3) teoreme 2.1.3, dovoljno je pokazati da se $\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$ gusto utapa u $\mathcal{B}(\mathbb{P})$. Ovde umesto $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ mi zapravo posmatramo $\mathcal{B}(\mathbb{P}) \setminus \{[A \wedge \neg A]\}$. Neka je

$$\mathbb{P} = \{\mathtt{p}_\xi \mid \xi < \kappa\}.$$

Definišimo funkciju $i : \mathrm{Fn}(\kappa, 2) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P})$ sa

$$i(p) = [\bigwedge_{\xi \in \mathrm{dom}(p)} \mathtt{p}_\xi^{p(\xi)}],$$

gde je $\mathtt{p}^0 = \neg \mathtt{p}$ i $\mathtt{p}^1 = \mathtt{p}$. Preostaje da pokažemo da i zadovoljava (1), (2) i (3) definicije 2.1.2.

(1): Neka $p, q \in \mathrm{Fn}(\kappa, 2)$ i neka je $p \supseteq q$. Tada, $\mathrm{dom}(q) = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$, $\mathrm{dom}(p) = \{\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_n\}$, $\xi_k \neq \eta_j$, i $p(\xi_k) = q(\xi_k)$. Po definiciji funkcije i,

$$i(p) = [\bigwedge_{j=1}^{m} \mathtt{p}_{\xi_j}^{q(\xi_j)} \ \wedge \ \bigwedge_{k=1}^{n} \mathtt{p}_{\eta_k}^{p(\eta_k)}], \ i(q) = [\bigwedge_{j=1}^{m} \mathtt{p}_{\xi_j}^{q(\xi_j)}],$$

a kako je formula

$$\bigwedge_{j=1}^{m} \mathtt{p}_{\xi_j}^{q(\xi_j)} \ \wedge \ \bigwedge_{k=1}^{n} \mathtt{p}_{\eta_k}^{p(\eta_k)} \ \Rightarrow \ \bigwedge_{j=1}^{m} \mathtt{p}_{\xi_j}^{q(\xi_j)}$$

očigledno tautologija, imamo da je $i(p) \leqslant i(q)$. Otuda važi (1).

(2): Neka su $p, q \in \mathrm{Fn}(\kappa, 2)$ inkompatibilni. Tada postoji $\xi \in \mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q)$ tako da

$$p(\xi) = 1 - q(\xi).$$

Posebno, $i(p) \leqslant_{\mathcal{B}(\mathbb{P})} [\mathtt{p}_\xi^{p(\xi)}]$, $i(q) \leqslant_{\mathcal{B}(\mathbb{P})} [\mathtt{p}_\xi^{q(\xi)}]$, i $[\mathtt{p}_\xi^{p(\xi)}]$ i $[\mathtt{p}_\xi^{q(\xi)}]$ su inkompatibilni u $\mathcal{B}(\mathbb{P})$, jer je formula

$$\neg(\mathtt{p}_\xi^{p(\xi)} \ \wedge \ \mathtt{p}_\xi^{q(\xi)})$$

tautologija. Stoga, $i(p)$ i $i(q)$ su takođe inkompatibilni. Obratna implikacija u (2) se slično dokazuje.

(3): Izaberimo proizvoljno $[A] \in \mathcal{B}(\mathbb{P})$. Po teoremi o disjunktivnoj normalnoj formi,

$$[A] = [\bigvee_{j=1}^{m} \bigwedge_{k=1}^{n} \mathtt{p}_{\xi_{jk}}^{a_{jk}}],$$

pri čemu je $a_{jk} \in 2$. Ako definišemo uslov $p \in \mathrm{Fn}(\kappa, 2)$ sa $\mathrm{dom}(p) = \{\xi_{11}, \ldots, \xi_{1n}\}$ i

$$p(\xi_{1k}) = a_{1k},$$

onda se lako proverava da je $i(p) \leqslant [A]$, čime je dokazano (3), a time i teorema u potpunosti. $\square$

2.3 Napomene

Prvo, primetimo da je utapanje i definisanom u dokazu teoreme 2.2.1 sasvim prirodno: $\mathtt{p}_\xi$ je zamena za "ξ maps to 1", dok je $\neg\mathtt{p}_\xi$ zamena za "ξ maps to 0". Na ovaj način konačne konjunkcije literala prirodno kodiraju konačne parcijalne funkcije.

Drugo, dobro je poznato da su, do na izomorfizam, sve Booleove algebre su iskazne Lindenbaum-Tarski algebre $\mathcal{B}(T)$ (videti [17]). Podsetimo se da je algebra $\mathcal{B}(T)$ definisana sa

$$A \sim B \quad \text{iff} \quad T \vdash A \Leftrightarrow B,$$

pri čemu je T iskazna teorija (skup formula). Posebno, svaki forsing je zapravo $\mathcal{B}(T)$ forsing. Ono što je posebno interesantno je pronalaženje onih iskaznih teorija koje prirodno kodiraju poznate forsinge. Ovde pod prirodnošću podrazumevamo onu vrstu korespodencije koja postoji između konjunkcija literala i konačnih parcijalnih funkcija. Primetimo da takva korespodencija nije data u dokazu teoreme o karakterizaciji Booleovih algebri preko iskaznih Lindenbvaum-Tarski algebri.

Rezultati prikazani u ovom poglavlju su publikovani u [40].

3

Kvalitativna verovatnoća

Kvalitaivno rezonovanje privlači posebnu pažnju poslednjih decenija usled svoje široke primenljivosti na svakodnevne zadatke poput dijagnostike, obučavanja, nadgledanja u realnom vremenu, identifikacije rizika itd. Kvalitativno rezonovanje o verovatnoći je prominentan oblik kvalitativnog rezonovanja. Razni oblici kvalitativne verovatnoće su razmatrani u [52]. Razmatranja u ovom poglavlju predstavljaju prvu jako potpunu aksiomatizaciju pojma kvalitativne verovatnoće. Kvalitativne verovatnoće su karakterizovane preko verovatnosnih mera, te su u predloženom pristupu one ujedno i komparativne verovatnoće.

U radu [33] se stimulišu ekstenzivna istraživanja formalnih sistema za modeliranje rezonovanja sa prisustvom nesigurnosti, i propagira uvođenje verovatnosnih ograničenja (operatora) na logičke formule. Standardni pristup verovatnosnim logikama [5, 37] podrazumeva raširenja klasičnih logika verovatnosnim operatorima tipa $P_{\geqslant s}(A)$, koji formalno reprezentuju rečenicu "verovatnoća formule A je bar s", pri čemu su indeksi racionalni brojevi iz intervala $[0,1]$. Odgovarajuća semantika se definiše preko posebne vrste Kripkeovih modela.

Dobro je poznato (videti [37, 51]) da stav kompaktnosti ne važi u standardnom pristupu verovatnosnim logikama. Postoji nekoliko načina da se prevaziđe ova teškoća. Jedan od načina je da se forsiraju konačni kodomeni verovatnosnih mera. Drugi od načina je da se infinitarnim pravilima izvođenja spreče nearhimedovske verovatnoće. Ova metodologija je primenjivana u radovima [36, 37, 38, 46, 47].

Interesantno je pomenuti i rad [25], gde se koriste infinitarne formule kako bi se dobila jako kompletna aksiomatizacija verovatnosnog rezonovanja. Iako je logika izložena u tom radu neodlučiva i kvalitativna razmatranja se ne pominju, kvalitativna verovatnoća se može definisati. Primera radi, rečenica " i-ti igrač misli da je formula B verovatna bar koliko i formula A" se može formalno zapisati sa

$$\bigwedge_{s\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} p_i^s(A) \Rightarrow p_i^s(B).$$

Konačno, u prevazilaženju problema nekompaktnosti mogu se koristiti i nearhimedovske mere (videti [47]).

U prisustvu verovatnosnih operatora $P_{\geqslant s}$ kvalitativnu verovatnoću semantički možemo definisati na sledeći način: formula B je verovatna bar koliko i formula A akko $P_{\geqslant s}(A)$ implicira $P_{\geqslant s}(B)$ za svako $s \in S$. Verovatnosni jezik ćemo proširiti binarnim operatorom $A \preceq B$, koji treba da formalizuje rečenicu "formula B je bar verovatna koliko i formula A". U zavisnosti od izbora indeksnog skupa S i kodomena verovatnsonih funkcija, ovde ćemo proširiti logike LPP_2 i $LPP_2^{FR(n)}$ uvedene u[37], kao i logiku LPP^S uvedenu u [47]. Pokazaćemo da će odgovarajuće logike biti jako potpune i odlučive.

3.1 Sintaksa i semantika logike $LPP_{2,\preceq}$

Neka je Var prebrojiv skup iskaznih slova i neka je S skup svih racionalnih brojeva iz intervala $[0,1]$. Sa For_C ćemo označiti skup svih iskaznih formula nad skupom iskaznih slova Var. Promenljive za iskazne formule su A, B and C, uz korišćenje indeksa u slučaju potrebe.

Osnovne verovatnosne formule imaju sledeća dva oblika:

- $P_{\geqslant s}(A)$, gde $s \in S$ i $A \in For_C$;

- $A \preceq B$, gde $A, B \in For_C$.

Skup For_P svih verovatnosnih formula je skup svih Booleovskih kombinacija osnovnih verovatnosnih formula. Promenljive za verovatnosne formule su φ, ψ i θ, indeksirane u slučaju potrebe.

3.1.1 Primer Sintaksno se ne dozvoljava kombinovanje klasičnih i verovatnosnih formula, kao ni iterirana upotreba verovatnsonih operatora. Primera radi, $A \preceq P_{\geqslant s}(B)$, $A \wedge P_{\geqslant s}(B)$ i $P_{\geqslant s} P_{\geqslant r}(A)$ su sintaksno neispravne. □

Kako bismo pojednostavili notaciju, umesto $\neg P_{\geqslant s}(A)$, $P_{\geqslant 1-s}(\neg A)$, $\neg P_{\geqslant 1-s}(\neg A)$ i $P_{\geqslant s}(A) \wedge P_{\geqslant 1-s}(\neg A)$ ćemo redom pisati $P_{<s}(A)$, $P_{\leqslant s}(A)$, $P_{>s}(A)$ and $P_{=s}(A)$.

Skup For svih $LPP_{2,\preceq}$-formula je disjunktna unija skupova For_C i For_P. Promenljive za formule su α, β i γ, indeksirane u slučaju potrebe.

Semantiku logike $LPP_{2,\preceq}$ definišemo preko Kripkeovih modela (videti npr [36]).

3.1.2 Definicija *LPP-model* je struktura $\langle W, H, \mu, v \rangle$ sa sledećim svojstvima:

- W je neprazan skup, čiji se elementi nazivaju svetovi;
- H je algebra skupova na W;
- $\mu : H \longrightarrow [0, 1]$ je konačno aditivna verovatnosna mera;
- v je istinitosna evaluacija koja svakom svetu $w \in W$ pridružuje iskazni model $v(w)$.

Neka je M LPP-model. Sa $[A]_M$ ćemo označavati skup svih svetova w such that $v(w)(A) = 1$. Uobičajeno je da se M izostavlja iz indeksa ukoliko je kontekst jasan.

3.1.3 Definicija LPP-model M je *merljiv* ukoliko je svaki od skupova $[A]$ is merljiv (pripada H). Klasu svih merljivih LPP-modela ćemo označavati sa LP_{Meas}.

3.1.4 Definicija Relaciju zadovoljenja $\models$ na LP_{Meas}-models, klasičnim i verovatnosnim formulama rekurzivno definišemo na sledeći način:

- $M \models A$ ako je $[A] = W$;
- $M \models A \preceq B$ ako je $\mu([A]) \leqslant \mu([B])$;
- $M \models P_{\geqslant s}(A)$ if $\mu([A]) \geqslant s$;
- $M \models \neg\varphi$ if $M \not\models \varphi$;
- $M \models \varphi \wedge \psi$ if $M \models \varphi$ and $M \models \psi$.

Pojmovi zadovoljivosti i valjanosti se uvode na uobičajen način.

3.2 $LPP_{2,\preceq}$ logika

3.2.1 Aksiomatizacija

Kao što ćemo pokazati, LPP_{Meas}-valjane verovatnosne formule su jako potpuno aksiomatizovane na sledeći način:
Aksiome

A1 Substitucione instance tautologija;

A2 $P_{\geqslant 0}(A)$;

A3 $P_{\leqslant r}(A) \Rightarrow P_{<s}(A)$, u slučaju kada je $r < s$;

A4 $P_{<s}(A) \Rightarrow P_{\leqslant s}(A)$;

A5 $(P_{\geqslant r}(A) \wedge P_{\geqslant s}(B) \wedge P_{\geqslant 1}(\neg A \vee \neg B)) \Rightarrow P_{\geqslant \min\{1,r+s\}}(A \vee B)$;

A6 $(P_{\leqslant r}(A) \wedge P_{<s}(B)) \Rightarrow P_{<r+s}(A \vee B)$, u slučaju kada je $r + s \leqslant 1$;

A7 $(P_{\leqslant s}(A) \wedge P_{\geqslant s}(B)) \Rightarrow A \preceq B$;

A8 $(A \preceq B \wedge P_{\geqslant s}(A)) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)$.

Pravila izvođenja

R1 Modus ponens za klasične formule i modus ponens za verovatnosne formule;

R2 Iz A se izvodi $P_{\geqslant 1}(A)$;

R3 Iz $\varphi \Rightarrow P_{\geqslant s-\frac{1}{k}}(A)$ za svako $k \geqslant \frac{1}{s}$ $(s \neq 0)$, izvodi se $\varphi \Rightarrow P_{\geqslant s}(A)$;

R4 Iz $\varphi \Rightarrow (P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B))$ za svako $s \in S$, izvodi se

$$\varphi \Rightarrow A \preceq B.$$

Aksiome A7 i A8, kao i pravilo R4 predstavljaju proširenje sistema LPP_2

Pojmovi dokaza i teoreme se uvode na uobičajeni način. Treba istaći da je uvedena logika infinitarna usled pravila R3 i R4, pa su dužine dokaza najviše prebrojivi sledbenik ordinali. Sledeća teorema nam daje neke korisne osobine verovatnosnih operatora$P_{\geqslant s}$. Detaljan dokaz se može naći u [46].

3.2.1 Teorema *Neka su A i B proizvoljne klasične formule. Tada:*

1. $\vdash P_{\geqslant 1}(A \Rightarrow B) \Rightarrow (P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B))$, *za svako* $s \in S$;
2. *AKo je* $A \Leftrightarrow B$ *tautologija, onda* $\vdash P_{\geqslant s}(A) \Leftrightarrow P_{\geqslant s}(B)$, *za svako* $\in S$.

3.2.2 Teorema [Teorema dedukcije]

Neka je T skup formula i neka su α i β formule istog tipa (ili obe klasične, ili obe verovatnosne). Tada

$$T \vdash \alpha \Rightarrow \beta \quad \textit{akko} \quad T, \alpha \vdash \beta.$$

Dokaz Kao i u klasičnoj logici, dokaz se izvodi indukcijom po dužini dokaza. U cilju ilustracije primene infinitarnih pravila, neka je β formula $\theta \Rightarrow A \preceq B$, i neka je ona izvedena iz skupa premisa

$$\{\theta \Rightarrow (P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)) \mid s \in S\}$$

primenom pravila R4. Po induktivnoj hipotezi,

$$T \vdash \alpha \Rightarrow (\theta \Rightarrow (P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)))$$

za svako $s \in S$, što je ekvivalentno sa

$$T \vdash \alpha \wedge \theta \Rightarrow (P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)), \quad s \in S.$$

Primenom pravila R4 dobijamo

$$T \vdash \alpha \wedge \theta \Rightarrow A \preceq B,$$

što je ekvivalentno sa $T \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. □

3.2.3 Teorema *Neka je T skup formula i neka su A, B i C klasične formule. Tada važi:*

1. $T \vdash A \preceq B$ *akko* $T \vdash P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)$ *za svako* $s \in S$*;*
2. $\vdash A \preceq B \vee B \preceq A$*;*
3. $\vdash (A \preceq B \wedge B \preceq C) \Rightarrow A \preceq C$*;*
4. $\vdash A \preceq A$*;*
5. *If* $T \vdash P_{\geqslant 1}(A \Rightarrow B)$ *then* $T \vdash A \preceq B$*;*
6. *If* $T \vdash A \Rightarrow B$ *then* $T \vdash A \preceq B$*.*

Dokaz Kako je (5) direktna posledica od (1), (4) direktna posledica od (2), i kako je (6) posledica od (5) i pravila R2, pokazaćemo samo prve tri stavke.

1 : Neka $T \vdash A \preceq B$. Po aksiomama A1 i A8 imamo da

$$T \vdash A \preceq B \Rightarrow (P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)).$$

Primenom pravila R1 dobijamo da $T \vdash P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)$.

Obratno, neka $T \vdash P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)$ za svako $s \in S$. Po askiomi A1 imamo da

$$T \vdash P_{\geqslant 0}(A) \Rightarrow (P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B))$$

za svako $s \in S$. Primenom pravila R4 dobijamo da $T \vdash P_{\geqslant 0}(A) \Rightarrow A \preceq B$. Konačno, zbog $T \vdash P_{\geqslant 0}(A)$ (aksioma A2), primenom pravila R1 dobijamo da $T \vdash A \preceq B$.

2 : Prvo primetimo da je aksioma A7 is ekvivalentna sa

$$\neg(A \preceq B) \Rightarrow (P_{\geqslant s}(B) \Rightarrow P_{>s}(A)).$$

Zaista,

$$\begin{aligned}
(P_{\leqslant s}(A) \wedge P_{\geqslant s}(B)) \Rightarrow A \preceq B \quad &\text{akko} \quad \neg(A \preceq B) \Rightarrow \neg(P_{\leqslant s}(A) \wedge P_{\geqslant s}(B)) \\
&\text{akko} \quad \neg(A \preceq B) \Rightarrow (\neg P_{\leqslant s}(A) \vee \neg P_{\geqslant s}(B)) \\
&\text{akko} \quad \neg(A \preceq B) \Rightarrow (P_{\leqslant s}(A) \Rightarrow \neg P_{\geqslant s}(B)) \\
&\text{akko} \quad \neg(A \preceq B) \Rightarrow (P_{\geqslant s}(B) \Rightarrow \neg P_{\leqslant s}(A)) \\
&\text{akko} \quad \neg(A \preceq B) \Rightarrow (P_{\geqslant s}(B) \Rightarrow P_{>s}(A)).
\end{aligned}$$

Iz $\vdash P_{>s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(A)$ sledi da

$$\vdash \neg(A \preceq B) \Rightarrow (P_{\geqslant s}(B) \Rightarrow P_{\geqslant s}(A)).$$

Poslednje važi za svako $s \in S$, pa primenom pravila R4 dobijamo

$$\vdash \neg(A \preceq B) \Rightarrow B \preceq A,$$

što je ekvivalentno sa $\vdash A \preceq B \vee B \preceq A$.

3 : Na osnovu Teoreme dedukcije je dovoljno pokazati da

$$A \preceq B, B \preceq C \vdash A \preceq C.$$

Kako je $A \preceq B \vdash P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)$ i $B \preceq C \vdash P_{\geqslant s}(B) \Rightarrow P_{\geqslant s}(C)$, dobijamo da

$$A \preceq B, B \preceq C \vdash P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(C).$$

Ovo važi za svako $s \in S$, pa primenom (1) dobijamo da

$$A \preceq B, B \preceq C \vdash A \preceq C.$$

$\square$

Sledeća tehnička lema omogućuje konstrukciju maksimalnog (u odnosu na verovatnosne formule) konsistentnog skupa formula.

3.2.4 Lema *Neka je T konsistentan skup formula.*

1. *Ako je $T \cup \{\varphi \Rightarrow A \preceq B\}$ nekonsistentan, onda postoji $s \in S$ tako da je $T \cup \{\varphi \Rightarrow \neg(P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B))\}$ konsistentan;*
2. *Ako je $T \cup \{\varphi \Rightarrow P_{\geqslant s}(A)\}$ nekonsistnetan, onda postoji prirodan broj $n > 0$ takav da je $T \cup \{\varphi \Rightarrow \neg P_{\geqslant s-\frac{1}{n}}(A)\}$ konsistentan.*

Dokaz

Dokazaćemo samo prvo tvrđenje, pošto se drugo dokazuje sasvim slično. Nekonsistentnost skupa $T \cup \{\varphi \Rightarrow A \preceq B\}$ povlači inkonsistentnost od $T \cup \{A \preceq B\}$, stoga $T \vdash \neg(A \preceq B)$. Tvrdimo da postoji $s \in S$ tako da je $T \cup \{\neg(P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B))\}$ konsistentan. Zaista, ukoliko je svaki od skupova

$$T \cup \{\neg(P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B))\}$$

inkonsistentan, onda $T \vdash P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)$ za svako $s \in S$, pa $T \vdash A \preceq B$ po teoremi 3.2.3. Međutim, ovo je nemoguće jer je T konsistentan skup formula i $T \vdash \neg(A \preceq B)$.

Dakle, postoji $s \in S$ tako da je $T \cup \{\neg(P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B))\}$ konsistentan. Konačno, konsisntentnost skupa $T \cup \{\neg(P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B))\}$ implicira konsistentnost skupa $T \cup \{\varphi \Rightarrow \neg(P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B))\}$. $\square$

Prelazimo na opis kompletiranja T^* datog konsistentnog skupa formula T. Neka je $For_P = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\}$. Rekurzivna konstrukcija skupa T^* se izvodi na sledeći način:

1. $T_0 = T \cup \{A \in For_C \mid T \vdash A\} \cup \{P_{\geqslant 1}(A) \mid A \in For_C \text{ and } T \vdash A\}$;
2. Ako je $T_i \cup \{\varphi_i\}$ konsistentan, onda je $T_{i+1} = T_i \cup \{\varphi_i\}$.
3. Ako je $T_i \cup \{\varphi_i\}$ inkonsistentan, onda:
   (a) Ako je φ_i formula $\psi \Rightarrow P_{\geqslant s}(A)$, onda je
   $$T_{i+1} = T_i \cup \{\psi \Rightarrow \neg P_{\geqslant s - \frac{1}{n}}(A)\},$$
   pri čemu je n najmanji pozitivan ceo broj takav da je skup T_{i+1} konsistentan (takav n psotoji po lemi 3.2.4).

   (b) Ako je φ_i formula $\psi \Rightarrow A \preceq B$, onda je
   $$T_{i+1} = T_i \cup \{\psi \Rightarrow \neg(P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B))\},$$
   pri čemu je s proizvoljan element od S takav da je skup T_{i+1} konsistentan. (takvo s postoji po lemi 3.2.4).

   (c) U svim preostalim slučajevima je $T_{i+1} = T_i$;
4. $T^* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_i$.

Jasno je da je svaki od skupova T_i konsistentan. U sledećoj teoremi ćemo dokazati korektnost konstrukcije i istaći neka svojstva od T^* bitna za dokaz teoreme potpunosti.

3.2.5 Teorema *Neka je T^* kao i malo pre. Tada važi:*

1. *T^* je deduktivno zatvoren;*
2. *T^* je konsistentan;*
3. *Za svako $\varphi \in For_P$, $\varphi \in T^*$ ili $\neg\varphi \in T^*$;*

4. *$\alpha \wedge \beta \in T^*$ akko $\alpha \in T^*$ and $\beta \in T^*$;*

5. *Ako $\vdash \alpha$, onda $\alpha \in T^*$;*

6. *Ako $\alpha \in T^*$ i $\alpha \Rightarrow \beta \in T^*$, onda $\beta \in T^*$;*

7. *Ako $P_{\geqslant s}(A) \in T^*$ and $r \leqslant s$ ($r \in S$), onda $P_{\geqslant r}(A) \in T^*$;*

8. *Ako je $r = \sup\{s \in S \mid P_{\geqslant s}(A) \in T^*\}$ racionalan broj, onda $P_{\geqslant r}(A) \in T^*$;*

9. *$A \preceq B \in T^*$ ili $B \preceq A \in T^*$.*

Dokaz Stavke 4–8 su neposredne posledice prve stavke i aksiomatizacije logike $LPP_{2,\preceq}$, a druga i tre ca stavka se dokazuju na isti način kao i u klasičnoj logici. Stoga preostaje da se pokažu prva i poslednja stavka.

1: Treba polazati da $\varphi \in T^*$ ukoliko $T^* \vdash \varphi$. U tom cilju, dovoljno je pokazati sledeće:

(i) Ako je α instanca aksiome, onda $\alpha \in T^*$.

(ii) Ako α i $\alpha \Rightarrow \beta$ pripadaju T^*, onda i β pripada T^*.

(iii) Ako A pripada T^*, onda i $P_{\geqslant 1}(A)$ pripada T^*.

(iv) Ako $\psi \Rightarrow P_{\geqslant s-\frac{1}{n}}(A)$ pripada T^* za svako $n > \frac{1}{s}$, onda i $\psi \Rightarrow P_{\geqslant s}(A)$ pripada T^*.

(v) Ako $\psi \Rightarrow (P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B))$ pripada T^* za svako $s \in S$, onda i $\psi \Rightarrow A \preceq B$ pripada T^*.

(iii) je direktna posledica konstrukcije T^* (prva stavka), a (i) i (ii) se dokazuju isto kao i u slučaju klasične logike. (iv) i (v) se dokazuju sasvim slično, pa ćemo stoga pokazati samo (v).

(v): Pretpostavimo da za svako $s \in S$, $\psi \Rightarrow (P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B))$ pripada T^*. Tada je $\{\psi \Rightarrow (P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)) \mid s \in S\}$ konsistentan sa savkom od skupova T_j. neka je $\psi \Rightarrow A \preceq B$ i-ta formula u enumeraciji svih verovatnosnih formula. Ako je formula $\psi \Rightarrow A \preceq B$ konsistentna sa T_i, onda je po konstrukciji T^* $\psi \Rightarrow A \preceq B \in T_{i+1}$, pa ostaje da pokažemo da je to zaista tako.

Pretpostavimo suprotno, neka je formula $\psi \Rightarrow A \preceq B$ inkonsistentna sa T_i. Tada $T_i \vdash \neg(\psi \Rightarrow A \preceq B)$. S druge strane, skup formula

$$\Gamma = T_i \cup \{\psi \Rightarrow (P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)) \mid s \in S\}$$

je konsistentan. Međutim, $\Gamma \vdash \neg(\psi \Rightarrow A \preceq B)$ (zbog $T_i \vdash \neg(\psi \Rightarrow A \preceq B)$) i

$$\Gamma \vdash \psi \Rightarrow A \preceq B$$

(po R4), odakle sledi inkonsistentnost Γ: kontradikcija.

9: Neka $A \preceq B \notin T^*$. Po stavki 3, $\neg(A \preceq B) \in T^*$. Posebno, $T^* \vdash B \preceq A$ ($T^* \vdash A \preceq B \vee B \preceq A$ i $T^* \vdash \neg(A \preceq B)$), odakle po prvoj stavki dobijamo $B \preceq A \in T^*$. □

3.2.6 Definicija Neka je T^* kao i gore. Kanonski model M_{T^*} definišemo na sledeći način:

- W je skup svih iskaznih modela $w : Var \longrightarrow 2$ iskazne teorije $\{A \mid T \vdash A\}$;
- Za svaki svet $w \in W$, v(w) definišemo na sledeći način:
  1. $v(w)(p) = 1$ akko $w(p) = 1$, $p \in Var$;
  2. $v(w)(\neg A) = 1$ akko je $v(w)(A) = 0$;
  3. $v(w)(A \wedge B) = 1$ akko je $v(w)(A) = 1$ i $v(w)(B) = 1$;
- $H = \{[A] \mid A \in For_C\}$;
- $\mu([A]) = \sup\{s \in S \mid P_{\geqslant s}(A) \in T^*\}$.

Dokaz činjenice da je M_{T^*} LPP_{Meas}-model se može naći u [36].

3.2.7 Lema *Neka su T^* i M_{T^*} kao i malo pre. Tada:*

1. $P_{\geqslant s}(A) \in T^*$ *akko* $\mu([A]) \geqslant s$*;*

2. $P_{<s}(A) \in T^*$ *akko* $\mu([A]) < s$*;*

3. $A \preceq B \in T^*$ *akko* $\mu([A]) \leqslant \mu([B])$*.*

Dokaz

1: Neka $P_{\geqslant s}(A) \in T^*$. Kako je

$$\mu([A]) = \sup\{r \in S \mid P_{\geqslant r}(A) \in T^*\},$$

očigledno je $\mu([A]) \geqslant s$. Obratno, neka je $\mu([A]) \geqslant s$. Tada je

$$a = \sup\{r \in S \mid P_{\geqslant r}(A) \in T^*\} \geqslant s.$$

Ako je $a > s$, onda postoji $r \in S$ tako da je $r > s$ i da $P_{\geqslant r}(A) \in T^*$. T^* je deduktivno zatvoren i $\vdash P_{\geqslant r}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(A)$, odakle i $P_{\geqslant s}(A) \in T^*$. Ako je $a = s$, onda i $P_{\geqslant s}(A) \in T^*$ po teoremi 3.2.5(8).

2: Direktna posledica 1 i teoreme 3.2.5(druga i treća stavka).

3: Neka $A \preceq B \in T^*$. T^* je deduktivno zatvoren i $\vdash A \preceq B \Rightarrow (P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B))$ za svako $s \in S$, pa po definiciji kanonskog modela imamo da $\mu([A]) \geqslant \mu([B])$. Obratno, neka $\mu([A]) \leqslant \mu([B])$. Tvrdimo da $A \preceq B \in T^*$. U suprotnom, $P_{\geqslant 0}(A) \Rightarrow A \preceq B \notin T^*$, pa po konstrukciji T^* postoji $s \in S$ tako da

$$P_{\geqslant 0}(A) \Rightarrow \neg(P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)) \in T^*.$$

Na osnovu pete i šeste stavke teoreme 3.2.5, $\neg(P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)) \in T^*$, pa $P_{\geqslant s}(A), P_{<s}(B) \in T^*$ (prva i četvrta stavka teoreme 3.2.5). Međutim, prve dve stavke ove leme povlače da je $\mu([A]) \geqslant s$ i da je $\mu([B]) < s$, što protivreči $\mu([A]) \leqslant \mu([B])$. □

Prethodnu diskusiju sumiramo teoremom potpunosti $LPP_{2,\preceq}$ logike.

3.2.8 Teorema [Jaka potpunost]

Skup formula $T \subseteq For$ *je konsistentan akko ima* LPP_{Meas}*-model.*

Dokaz

Neka je T konsistentan skup formula, T^* njegovo kompletiranje i neka je M_{T^*} odgovarajući kanonski model. Dovoljno je pokazati da $\varphi \in T^*$ akko $M_{T_*} \models \varphi$. Dokaz izvodimo indukcijom po složenosti formule φ. Baza indukcije je ispunjena na osnovu leme 3.2.7.

Neka je φ formula $\neg\psi$. Ako $\neg\psi \in T^*$, onda $\psi \notin T^*$ (teorema 3.2.5), p[a po induktivnoj hipotezi $M_{T^*} \not\models \psi$, odakle $M_{T^*} \models \neg\psi$. Obratna implikacija se dokazuje slično.

Neka je φ formula $\psi \wedge \theta$. Ako $\psi \wedge \theta \in T^*$, onda $\psi \in T^*$ i $\theta \in T^*$ (teorema 3.2.5), pa po induktivnoj hipotezi $M_{T*} \models \psi$ i $M_{T^*} \models \theta$, odakle sledi da $M_{T^*} \models \psi \wedge \theta$. Obratno, ako $M_{T^*} \models \psi \wedge \theta$, onda $M_{T*} \models \psi$ i $M_{T^*} \models \theta$, pa po induktivnoj hipotezi $\psi \in T^*$ i $\theta \in T^*$, odakle sledi da $\psi \wedge \theta \in T^*$ (teorema 3.2.5). $\square$

3.2.2 Odlučivost

Neposredna posledica uvedene aksiomatizacije je teorema o disjunktivnoj normalnoj formi za verovatnosne formule. Stoga, zadovoljivost proizvoljne verovatnosne formule se svodi na zadovoljivost konjunkcije literala, pri čemu je literal ili osnovna verovatnosna formula, ili njena negacija. U opštem slučaju, konjunkcije literala su oblika

$$\bigwedge_{i=1}^{m_1} P_{\geqslant s_i}(A_{1,i}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{m_2} P_{<r_i}(A_{2,i}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{m_3} (A_{3,i} \preceq A_{4,i}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{m_4} \neg(A_{5,i} \preceq A_{6,i}) \tag{3.1}$$

Neka su $p_1, \ldots, p_n$ sva iskazna slova koja se javljaju u formulama $A_{i,j}$. Kompletna DNF formule $A_{i,j}$ nad slovima $p_1, \ldots, p_n$ se označava sa $\mathrm{CDNF}(A_{i,j})$. Atom je ma koja iskazna formula oblika $\pm p_1 \wedge \cdots \wedge \pm p_n$, gde je $+p_l = p_l$ i $-p_l = \neg p_l$. Jasno je da imamo tačno 2^n atoma, recimo $a_1, \ldots, a_{2^n}$. Sa $a_k \in \mathrm{CDNF}(A_{i,j})$ ćemo označavati činjenicu da se atom a_k javlja u $\mathrm{CDNF}(A_{i,j})$. Neka su $x_1, \ldots, x_{2^n}$ međusobno različite promenljive jezika teorije realno zatvorenih polja (RCF). Verovatnosnoj formuli φ oblika (3.1) pridružujemo sledeću rečenicu σ_φ jezika teorije RCF:

$$\begin{aligned}\exists x_1 \ldots \exists x_{2^n} \quad (& \bigwedge_{i=1}^{m_1} (\sum_{a_k \in \mathrm{CDNF}(A_{1,i})} x_k \geqslant s_i) \\ \wedge & \bigwedge_{i=1}^{m_2} (\sum_{a_k \in \mathrm{CDNF}(A_{2,i})} x_k < r_i) \\ \wedge & \bigwedge_{i=1}^{m_3} (\sum_{a_k \in \mathrm{CDNF}(A_{3,i})} x_k \leqslant \sum_{a_k \in \mathrm{CDNF}(A_{4,i})} x_k) \\ \wedge & \bigwedge_{i=1}^{m_4} (\sum_{a_k \in \mathrm{CDNF}(A_{5,i})} x_k > \sum_{a_k \in \mathrm{CDNF}(A_{6,i})} x_k) \\ \wedge & \bigwedge_{k=1}^{2^n} (x_k \geqslant 0) \ \wedge \ \sum_{k=1}^{2^n} x_k = 1 \ )\end{aligned}$$

S obzirom da teorija RCF dopušta eliminaciju kvantora i da je valjanost formula bez kvantora jezika teorije RCF odlučiva, valjanost rečenice σ_φ je odlučiva. Ostaje da se pokaže da je formula φ zadovoljiva akko je rečenica σ_φ valjana.

Neka LPP_{Meas}-model $M = \langle W, H, \mu, v \rangle$ zadovoljava φ. Kako

$$\mu([A_{i,j}]) = \sum_{a_k \in \mathrm{CDNF}(A_{i,j})} \mu([a_k]),$$

važi sledeće:

- $\bigwedge_{i=1}^{m_1} (\sum_{a_k \in \mathrm{CDNF}(A_{1,i})} \mu([a_k]) \geqslant s_i);$
- $\bigwedge_{i=1}^{m_2} (\sum_{a_k \in \mathrm{CDNF}(A_{2,i})} \mu([a_k]) < r_i);$
- $\bigwedge_{i=1}^{m_3} (\sum_{a_k \in \mathrm{CDNF}(A_{3,i})} \mu([a_k]) \leqslant \sum_{a_k \in \mathrm{CDNF}(A_{4,i})} \mu([a_k]));$
- $\bigwedge_{i=1}^{m_4} (\sum_{a_k \in \mathrm{CDNF}(A_{6,i})} \mu([a_k]) > \sum_{a_k \in \mathrm{CDNF}(A_{6,i})} \mu([a_k]));$

- $\bigwedge_{k=1}^{2^n} (\mu([a_k]) \geqslant 0)$;

- $\sum_{k=1}^{2^n} \mu([a_k]) = 1$.

Stoga korektno možemo definisati valuaciju promenljivih x_k sa

$$x_k \mapsto \mu([a_k]), \quad k = 1, \ldots, 2^n.$$

Korektnost se ogleda u činjenici da $\mathbb{R} \models \sigma_\varphi$. S obzirom da su svaka dva realno zatvorena polja elementarno ekvivalentna, σ_φ je valjana.

Obratno, ako je rečenica σ_φ valjana, onda postoji realna valuacija ν koja je verifikuje u $\mathbb{R}$. Sada definišemo LPP_{Meas}-model formule φ na sledeći način:

- W je skup svih modela $w : For_C \longrightarrow 2$ koji zadovoljavaju svaku od formula $A_{i,j}$;

- $H = \{[A] \mid A \in For_C\}$;

- $v(w)(A) = 1$ akko $w(A) = 1$;

- μ je ma koja mera na H sa sledećim svojstvima:

  1. $\mu([a_k]) = \nu(x_k)$, $k = 1, \ldots, 2^n$;
  2. $\mu([A]) = 0$ ukoliko je za svako $k = 1, \ldots, 2^n$ formula $\neg(a_k \Rightarrow A)$ tautologija.

Konačno, kako je α valjana akko $\neg\alpha$ nije zadovoljiva, problem valjanosti je takođe odlučiv.

3.2.9 Primer Neka je φ formula

$$p \preceq q \wedge q \preceq r \Rightarrow p \preceq r,$$

pri čemu su p, q i r iskazna slova. Da bismo ispitali valjanost φ, dovoljno je ispitati zadovoljivost formule $\neg\varphi$. Sledeći gornju proceduru, formiramo osam atoma:

$$\begin{aligned}
a_1 &: \ p \wedge q \wedge r \\
a_2 &: \ p \wedge q \wedge \neg r \\
a_3 &: \ p \wedge \neg q \wedge r \\
a_4 &: \ p \wedge \neg q \wedge \neg r \\
a_5 &: \ \neg p \wedge q \wedge r \\
a_6 &: \ \neg p \wedge q \wedge \neg r \\
a_7 &: \ \neg p \wedge \neg q \wedge r \\
a_8 &: \ \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r.
\end{aligned}$$

Rečenica $\sigma_{\neg\varphi}$ je definisana sa

$$\begin{aligned}
\exists x_1 \ldots \exists x_8 (\ & \bigwedge_{i=1}^{8} x_i \geqslant 0 \\
& \wedge \sum_{i=1}^{8} x_i = 1 \\
& \wedge x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant x_1 + x_2 + x_5 + x_6 \\
& \wedge x_1 + x_2 + x_5 + x_6 \leqslant x_1 + x_3 + x_5 + x_7 \\
& \wedge x_1 + x_3 + x_5 + x_7 < x_1 + x_2 + x_3 + x_4).
\end{aligned}$$

Procedura za eliminaciju kvantora pokazuje da je $\sigma_{\neg\varphi}$ ekvivalentno sa $0 = 1$. Dakle, φ je valjana. $\square$

3.3 $LPP^S_{\preceq}$ logika

Logike $LPP_{2,\preceq}$ $LPP^S_{\preceq}$ se razlikuju u jednom pravilu izvođenja. Naime, u $LPP^S_{\preceq}$ umesto pravila R4 imamo novo pravilo

R5: Iz $\varphi \Rightarrow P_{\neq s}(A)$ za svako $s \in S$ se izvodi $\neg\varphi$.

Ovim pravilom se forsira da kodomen mere svakog modela bude sadržan u S.

Dokaz teoreme A.2.8 se lako modifikuje kako bi se dobio dokaz Teoreme dedukcije za $LPP^S_{\preceq}$ logiju: umesto $\neg\varphi$ u R5 se koristi equivalentna formula $\varphi \Rightarrow \bot$, gde je $\bot$ ma koja verovatnosna kontradikcija. Ostatak dokaza ide sasvim slično kao i u slučaju teoreme A.2.8.

Sledeća teorema pokazuje da je pravilo R4 izvodivo u $LPP^S_{\preceq}$. Kao posledicu imamo činjenicu da se rezultati dokazani za $LPP_{2,\preceq}$ prenose i na $LPP^S_{\preceq}$.

3.3.1 Teorema *Neka je T konsistentan skup formula. Tada $T \vdash A \preceq B$ akko $T \vdash P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)$ za svako $s \in S$.*

Dokaz

Implikacija s leva na desno je direktna posledica aksiome A8, pa preostaje da se pokaže suprotna implikacija. Neka

$$T \vdash P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)$$

za svako $s \in S$.

Pretpostavimo suprotno, neka $T \nvdash A \preceq B$. Tada je

$$T \cup \{\neg(A \preceq B)\}$$

konsistentan skup formula. Tvrdimo da za svako $s \in S$,

$$T, \neg(A \preceq B) \vdash P_{\neq s}(A)$$

Zaista, dovoljno je pokazati da za svako $s \in S$,

$$T, \neg(A \preceq B), P_{=s}(A) \vdash A \preceq B,$$

tj. pokazati da je svaki od skupova $T \cup \{\neg(A \preceq B), P_{=s}(A)\}$ nekonsistentan. Fiksirajmo $s \in S$. Kako $T \vdash P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)$ i kako $\neg(A \preceq B) \vdash P_{\geqslant s}(B) \Rightarrow P_{\geqslant s}(A)$ (po A8 i $\neg(A \preceq B) \vdash B \preceq A$), dobijamo da

$$T, \neg(A \preceq B) \vdash P_{\geqslant s}(A) \Leftrightarrow P_{\geqslant s}(B)$$

a otud i

$$T, \neg(A \preceq B), P_{=s}(A) \vdash P_{=s}(B).$$

Dalje, $\vdash P_{=s}(A) \Rightarrow P_{\leqslant s}(A)$, $\vdash P_{=s}(B) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)$ i $\vdash$ A7, pa

$$T, \neg(A \preceq B), P_{=s}(A) \vdash A \preceq B.$$

Kao posledicu imamo da

$$T, \neg(A \preceq B) \vdash P_{\geqslant 0}(A) \Rightarrow P_{\neq s}(A)$$

za svako $s \in S$, pa primenom pravila R5 dobijamo da

$$T, \neg(A \preceq B) \vdash \neg P_{\geqslant 0}(A).$$

Stoga je $T \cup \{\neg(A \preceq B)\}$ inkonsistentan, pa $T \vdash A \preceq B$. $\square$

3.4 $LPP_{2,\preceq}^{FR(n)}$ logika

Osnovna karakteristika logike $LPP_2^{FR(n)}$ je ta da je indeksni skup S konačan, i to oblika

$$S = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}.$$

Kompletna aksiomatizacija logike $LPP_2^{FR(n)}$ sadrži prvih šest aksioma, pravila R1 i R2, kao i dodatnu aksiomu

A9 $P_{=0}(A) \vee P_{=\frac{1}{n}}(A) \vee P_{=\frac{2}{n}}(A) \vee \cdots \vee P_{=\frac{n-1}{n}}(A) \vee P_{=1}(A)$.

Posebno, operator kvalitativne verovatnoće $A \preceq B$ se definiše u logici $LPP_2^{FR(n)}$ preko formule

$$\bigwedge_{s \in S} (P_{\geqslant s}(A) \Rightarrow P_{\geqslant s}(B)).$$

Dakle, logika $LPP_{2,\preceq}^{FR(n)}$ koja bi se od logike $LPP_2^{FR(n)}$ dobila dodavanjem aksioma A7 i A8 nije ništa drugo do definiciona ekstenzija polazne logike.

3.5 Napomene

U ovom poglavlju je data prva jako kompletna aksiomatizacija pojma kvalitativne verovatnoće. Odlučivost je pokazana kombinacijom metoda interpretacije i eliminacije kvantora. Rezultati su publikovani u radu [39].

4

Polinomijalne težinske formule

U ovom poglavlju se daje rešenje 18 godina otvorenog problema aksiomatizacije logike o polinomijalnim težinskim formulama, uvedene u radu [5]. Fagin, Halpern i Meggido su u tom radu semantički uveli logiku o polinomijalnim težinskim formulama, dokazali njenu odlučivost i PSPACE ograničenje složenosti. Takođe su indirektno upotrebili i metod interpretacije kako bi dobili slabo potpunu aksiomatizaciju, odnosno sintaksni opis valjanih polinomijalnih težinskih formula.

Aksiomatizacija prezentovana ovde je u Hilbertovom stilu i jako je potpuna.

4.1 Sintaksa i semantika

Neka je $Var = \{p_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ skup iskaznih slova. Sa For_C ćemo označavati skup svih klasičnih iskaznih formula nad skupom iskaznih slova Var. Promenljive za klasične formule su α, β i γ, indeksirane u slučaju potrebe.

4.1.1 Definicija Skup $Term$ težinskih (verovatnosnih) termova definišemo rekurzivno na sledeći način:

- $Term(0) = \{\underline{s} \mid s \in \mathbb{Q}\} \cup \{P(\alpha) \mid \alpha \in For_C\}$.
- $Term(n+1) = Term(n) \cup \{(\mathtt{f}+\mathtt{g}), (\mathtt{f}\cdot\mathtt{g}), (-\mathtt{f}) \mid \mathtt{f}, \mathtt{g} \in Term(n)\}$
- $Term = \bigcup_{n=0}^{\infty} Term(n)$. $\square$

Promenljive za verovatnosne (težinske) termove su $\mathtt{f}, \mathtt{g}$ i $\mathtt{h}$, indeksirane u slučaju potrebe. U cilju pojednostavljenja notacije uvodimo sledeće oznake $\mathtt{f}+\mathtt{g}$ je $(\mathtt{f}+\mathtt{g})$, $\mathtt{f}+\mathtt{g}+\mathtt{h}$ je $((\mathtt{f}+\mathtt{g})+\mathtt{h})$. For $n > 3$, $\sum_{i=1}^{n} \mathtt{f}_i$ je $((\cdots((\mathtt{f}_1+\mathtt{f}_2)+\mathtt{f}_3)+\cdots)+\mathtt{f}_n)$. Slično, $\mathtt{f}\cdot\mathtt{g}$ je $(\mathtt{f}\cdot\mathtt{g})$ itd. Konačno, $-\mathtt{f}$ je $(-\mathtt{f})$ i $\mathtt{f}-\mathtt{g}$ je $(\mathtt{f}+(-\mathtt{g}))$.

4.1.2 Definicija Osnovna verovatnosna (polinomijalna težinska) formula je ma koja formula oblika

$$\mathtt{f} \geqslant \underline{0}.$$

Verovatnosna (polinomijalna težinska) formula je Booleovska kombinacija osnovnih verovatnosnih formula. $\square$

Radi dodatnog pojednostavljenja notacije uvodimo sledeću konvenciju:

- $\mathtt{f} \leqslant \underline{0}$ je $-\mathtt{f} \geqslant \underline{0}$.
- $\mathtt{f} > \underline{0}$ je $\neg(\mathtt{f} \leqslant \underline{0})$.
- $\mathtt{f} < \underline{0}$ je $\neg(\mathtt{f} \geqslant \underline{0})$.
- $\mathtt{f} = \underline{0}$ je $\mathtt{f} \leqslant \underline{0} \ \wedge \ \mathtt{f} \geqslant \underline{0}$.
- $\mathtt{f} \neq \underline{0}$ je $\neg(\mathtt{f} = \underline{0})$.

- $\mathtt{f} \geqslant \mathtt{g}$ je $\mathtt{f} - \mathtt{g} \geqslant \underline{0}$. Slično se definišu $\mathtt{f} \leqslant \mathtt{g}$, $\mathtt{f} > \mathtt{g}$, $\mathtt{f} < \mathtt{g}$, $\mathtt{f} = \mathtt{g}$ i $\mathtt{f} \neq \mathtt{g}$.

Promenljive za verovatnosne formule su ϕ, ψ i θ, indeksirane u slučaju potrebe. Skup svih verovatnosnih formula označavamo sa For_P.

Skup For definišemo isto kao i u prethodnom poglavlju. Takođe na isti način definišemo i pojam merljivog modela.

4.1.3 Definicija Neka je $M = \langle W, H, \mu, v \rangle$ merljiv model. Relaciju zadovoljivosti $\models$ definišemo rekurzivno na sledeći način:

- $M \models \alpha$ ako je $[\alpha] = W$.
- $M \models \mathtt{f} \geqslant \underline{0}$ ako je $\mathtt{f}^M \geqslant 0$, pri čemu $\mathtt{f}^M$ definišemo na sledeći način:
  - $\underline{s}^M = s$.
  - $P(\alpha)^M = \mu([\alpha])$.
  - $(\mathtt{f} + \mathtt{g})^M = \mathtt{f}^M + \mathtt{g}^M$.
  - $(\mathtt{f} \cdot \mathtt{g})^M = \mathtt{f}^M \cdot \mathtt{g}^M$.
  - $(-\mathtt{f})^M = -(\mathtt{f}^M)$.
- $M \models \neg\phi$ ako $M \not\models \phi$.
- $M \models \phi \wedge \psi$ ako $M \models \phi$ i $M \models \psi$. □

Pojmovi zadovoljivosti i valjanosti se definišu na uobičajeni način.

4.2 Aksiomatizacija

Aksiome smo podelili u četiri grupe:

- iskazne aksiome;
- verovatnosne aksiome;

- aksiome o racionalnim brojevima;
- aksiome o uređenim komutativnim prstenima.

Iskazne aksiome

A1. Supstitucione instance tautologija.

Verovatnosne aksiome.

A2. $P(\alpha) \geqslant \underline{0}$.

A3. $P(\top) = \underline{1}$.

A4. $P(\bot) = \underline{0}$.

A5. $P(\alpha \leftrightarrow \beta) = \underline{1} \ \rightarrow \ P(\alpha) = P(\beta)$.

A6. $P(\alpha \vee \beta) = P(\alpha) + P(\beta) - P(\alpha \wedge \beta)$.

Aksiome o racionalnim brojevima

A7. $\underline{r} \geqslant \underline{s}$, ukoliko je $r \geqslant s$.

A8. $\underline{s} \cdot \underline{r} = \underline{sr}$.

A9. $\underline{s} + \underline{r} = \underline{s + r}$.

Aksiome o uređenim komutativnim prstenovima

A10. $\mathtt{f} + \mathtt{g} = \mathtt{g} + \mathtt{f}$.

A11. $(\mathtt{f} + \mathtt{g}) + \mathtt{h} = \mathtt{f} + (\mathtt{g} + \mathtt{h})$.

A12. $\mathtt{f} + \underline{0} = \mathtt{f}$.

A13. $\mathtt{f} - \mathtt{f} = \underline{0}$.

A14. $\mathtt{f} \cdot \mathtt{g} = \mathtt{g} \cdot \mathtt{f}$.

A15. $\mathtt{f} \cdot (\mathtt{g} \cdot \mathtt{h}) = (\mathtt{f} \cdot \mathtt{g}) \cdot \mathtt{h}$.

A16. $\mathtt{f} \cdot \underline{1} = \mathtt{f}$.

A17. $\mathtt{f} \cdot (\mathtt{g} + \mathtt{h}) = (\mathtt{f} \cdot \mathtt{g}) + (\mathtt{f} \cdot \mathtt{h})$.

A18. $\mathtt{f} \geqslant \mathtt{g} \ \vee \ \mathtt{g} \geqslant \mathtt{f}$.

A19. $(\mathtt{f} \geqslant \mathtt{g} \ \wedge \ \mathtt{g} \geqslant \mathtt{h}) \rightarrow \mathtt{f} \geqslant \mathtt{h}$.

A20. $\mathtt{f} \geqslant \mathtt{g} \ \rightarrow \ \mathtt{f} + \mathtt{h} \geqslant \mathtt{g} + \mathtt{h}$.

A21. $(\mathtt{f} \geqslant \mathtt{g} \ \wedge \ \mathtt{h} > 0) \ \rightarrow \mathtt{f} \cdot \mathtt{h} \geqslant \mathtt{g} \cdot \mathtt{h}$.

Pravila izvođenja

R1. Modus ponens za klasične formule i modus ponens za verovatnosne formule.

R2. Iz α se izvodi $P(\alpha) = \underline{1}$.

R3. is skupa premisa

$$\{\phi \ \rightarrow \ \mathtt{f} \geqslant \underline{-n^{-1}} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

se izvodi $\phi \rightarrow \mathtt{f} \geqslant \underline{0}$.

Pojmovi dokaza i teoreme se uvode na uobičajeni način. S obzirom da je uvedena logika infinitarna, dužina dokaza može biti proizvoljan najviše prebrojivi sledbenik ordinal.

4.3 Potpunost

Sasvim slično kao i u prethodnom poglavlju se dokazuje Teorema dedukcije:

4.3.1 Teorema [Teorema dedukcije] *Neka je T proizvoljan skup formula i neka su $\Phi, \Psi \in For$ istog tipa. Tada $T \vdash \Phi \to \Psi$ akko $T \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$.*

4.3.2 Primer Pokažimo da je

$$P(\alpha \to \beta) = \underline{1} \ \to \ P(\alpha) \leqslant P(\beta)$$

teorema. Napomenimo da ova formula podseća na poznatu modalnu aksiomu K. Prvo pokažimo da važi:

$$\vdash P(\neg\alpha) = \underline{1} - P(\alpha). \tag{4.1}$$

Zaista,

$$\begin{aligned} P(\alpha \vee \neg\alpha) &= P(\alpha) + P(\neg\alpha) - P(\alpha \wedge \neg\alpha) \\ &= P(\alpha) + P(\neg\alpha) - \underline{0} \\ &= P(\alpha) + P(\neg\alpha). \end{aligned}$$

Po A3, $P(\alpha \vee \neg\alpha) = \underline{1}$, pa

$$\underline{1} = P(\alpha) + P(\neg\alpha).$$

Stoga,

$$\underline{1} - P(\neg\alpha) = (P(\alpha) + P(\neg\alpha)) - P(\neg\alpha),$$

a otud i

$$\begin{aligned} \underline{1} - P(\neg\alpha) &= (P(\alpha) + P(\neg\alpha)) - P(\neg\alpha) \\ &= P(\alpha) + (P(\neg\alpha) - P(\neg\alpha)) \\ &= P(\alpha) + \underline{0} \\ &= P(\alpha). \end{aligned}$$

Dakle, uzimajući $\neg\alpha$ umesto α, direktno po A5 dobijamo (4.1).

$$\begin{aligned} P(\alpha \to \beta) &= P(\neg\alpha \vee \beta) \\ &= P(\neg\alpha) + P(\beta) - P(\neg\alpha \wedge \beta) \\ &= \underline{1} - P(\alpha) + P(\beta) - P(\neg\alpha \wedge \beta). \end{aligned}$$

Stoga, $P(\alpha \to \beta) - \underline{1} + P(\alpha) = P(\beta) - P(\neg\alpha \wedge \beta)$. Kako je

$$P(\alpha \to \beta) = \underline{1},$$

iammo da $P(\alpha) = P(\beta) - P(\neg\alpha \wedge \beta)$. Ostaje da se pokaže da je

$$P(\beta) \geqslant P(\beta) - P(\neg\alpha \wedge \beta).$$

To je ekvivalentno sa $\underline{0} \geqslant -P(\neg\alpha \wedge \beta)$, što je opet ekvivalentno sa

$$P(\neg\alpha \wedge \beta) \geqslant \underline{0}.$$

Konačno, poslednja formula je instanca aksiome A2. $\square$

4.3.3 Lema *Neka je T konsistentan skup formula. Ako je*

$$T \cup \{\phi \to \mathtt{f} \geqslant \underline{0}\}$$

nekonsistentan, onda postoji pozitivan ceo broj n takav da je skup

$$T \cup \{\phi \to \mathtt{f} < \underline{-n^{-1}}\}$$

konsistentan.

Dokaz Pretpostavimo suprotno, neka je $T \cup \{\phi \to \mathtt{f} < \underline{-n^{-1}}\}$ nekonsistentan za svako n. Odavde sledi da

$$T \vdash \phi \to \mathtt{f} \geqslant \underline{-n^{-1}}$$

za svako pozitivno n. Primenom pravila R3 bijamo da $T \vdash \phi \to \mathtt{f} \geqslant \underline{0}$, pa je T nekonsistentan; kontradikcija.

$\square$

4.3.4 Definicija *Neka je T konsistentan skup formula i neka je $For_P = \{\phi_i \mid i = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Kompletiranje T^* skupa T definišemo rekurzivno na seldeći način:*

1. $T_0 = T \cup \{\alpha \in For_C \mid T \vdash \alpha\} \cup \{P(\alpha) = 1 \mid T \vdash \alpha\}$.
2. *Ako je $T_i \cup \{\phi_i\}$ konsistentan, onda $T_{i+1} = T_i \cup \{\phi_i\}$.*
3. *Ako je $T_i \cup \{\phi_i\}$ nekonsistentan, onda:*
   (a) *Ako je ϕ_i oblika $\psi \to \mathtt{f} \geqslant \underline{0}$, onda*
   $$T_{i+1} = T_i \cup \{\psi \to \mathtt{f} < \underline{-n^{-1}}\},$$
   pri čemu je $n > 0$ tako da je T_{i+1} is consistent. Egzistencija n je obezbeđena lemom 4.3.3.
   (b) *U svim ostalim slučajevima je $T_{i+1} = T_i$.*
4. $T^* = \bigcup_{i<\omega} T_i$. $\square$

Očigledno je svaki od skupova T_i konsistentan. U sledećoj teoremi ćemo pokazati da je T^* deduktivno zatvoren, konsistentan i kompletan u odnosu na For_P.

4.3.5 Teorema *Neka je T konsistentan skup formula i neka je T^* konstruisan kao gore. Tada:*

1. *T^* je deduktivno zatvoren.*
2. *Postoji $\phi \in For_P$ tako da $\phi \notin T^*$.*
3. *Za svako $\phi \in For_P$, ili $\phi \in T^*$, ili $\neg\phi \in T^*$.*

Dokaz Pokazaćemo samo prvu stavku, jer se preostale dokazuju isto kao i u klasičnoj logici. Za dokaz prve stavke je dovoljno pokazati sledeće:

(i) Svaka instanca ma koje aksiome je u T^*.

(ii) $\Phi \in T^*$ je zatvoren za pravila izvođenja.

(i): Ako $\Phi \in For_C$, onda $\Phi \in T_0$. U suprotnom, psotoji pozitivno i tako da je $\Phi = \phi_i$. S obzirom da $\vdash \phi_i$, imamo da $T_i \vdash \phi_i$, pa po konstrukciji $\phi_i \in T_{i+1}$.

(ii): Ako $\Phi, \Phi \to \Psi \in For_C$, onda $\Psi \in T_0$. U suprotnom, neka je $\Phi = \phi_i$, $\Psi = \phi_j$, i $\Phi \to \Psi = \phi_k$. Tada je Ψ deduktivna posledica svakog T_l, gde je $l \geqslant \max(i,k)+1$. Neka je $\neg\Psi = \phi_m$. Ako $\phi_m \in T_{m+1}$, tada je $\neg\Psi$ deduktivna posledica svakog T_n, za $n \geqslant m+1$. Stoga, za svako $n \geqslant \max(i,k,m)+1$, $T_n \vdash \Psi \wedge \neg\Psi$, što je kontradikcija. Dakle, $\neg\Psi \notin T^*$. S druge strane, ako $\Psi \notin T^*$, onda $T_n \cup \{\Psi\} \vdash \bot$, i $T_n \cup \{\neg\Psi\} \vdash \bot$, za $n \geqslant \max(j,m)+1$, što je u kontradikciji sa T_n. Dakle, $\Psi \in T^*$.

Ako $\alpha \in T^*$, onda $\alpha \in T_0$, pa $P(\alpha) = \underline{1} \in T_0$.

Neka je $\{\phi \to P(\alpha) \geqslant \underline{-n^{-1}} \mid n = 0,1,2,\ldots\}$ podskup od T^*. Pokazujemo da $\phi \to P(\alpha) \geqslant \underline{0} \in T^*$. Pretpostavimo suprotno, neka $\phi \to P(\alpha) \geqslant \underline{0} = \phi_i$ i neka je $T_i \cup \{\phi_i\}$ nekonsistentan. Po 3.(a) definicije 4.3.4, postoji $n > 0$ tako da

$$T_{i+1} = T_i \cup \{\phi \to P(\alpha) < \underline{-n^{-1}}\}$$

i T_{i+1} je konsistentan. Tada, za kofinitno mnogo indeksa k,

$$T_k \vdash \phi \to P(\alpha) < \underline{-n^{-1}}$$

i

$$T_k \vdash \phi \to P(\alpha) \geqslant \underline{-n^{-1}},$$

pa $T_k \vdash \phi \to \psi$ za svako $\psi \in For_P$. Posebno, $T_k \vdash \phi \to P(\alpha) \geqslant \underline{0}$, tj. $T_k \vdash \phi_i$ za kofinitno mnogo indeksa k. Međutim, $\phi_i \notin T^*$, pa je ϕ_i nekonsistentno sa T_k za kofinitno mnogo indeksa k. Odavde sledi da su skoro svi skupovi T_k protivrečni, što je u kontradikciji sa konstrukcijom T^*.

Otud, $T_i \cup \{\phi_i\}$ je neprotivrečan, pa $\phi \to P(\alpha) \geqslant \underline{0} \in T_{i+1}$. $\square$

Za dato kompletiranje T^* definišemo *kanonski model* M^* na sledeći način:

- W je skup svih iskaznih modela skupa $T^* \cap For_C$.
- $v : For_C \times W \longrightarrow \{0,1\}$ je definisano sa $v(\alpha, w) = 1$ akko $w(\alpha) = 1$.
- $H = \{[\alpha] \mid \alpha \in For_C\}$.
- $\mu : H \longrightarrow [0,1]$ je definisano sa

$$\mu([\alpha]) = \sup\{s \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \mid T^* \vdash P(\alpha) \geqslant \underline{s}\}.$$

4.3.6 Lema *M^* je merljiv model.*

Dokaz Jedino što nije sasvim očigledno je konačna aditivnost μ. Stoga pokažimo da je

$$\mu([\alpha \vee \beta]) = \mu([\alpha]) + \mu([\beta]) - \mu([\alpha \wedge \beta]).$$

Neka je $a = \mu([\alpha])$, $b = \mu([\beta])$ i $c = \mu([\alpha \wedge \beta])$. Kako je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, možemo izabrati nizove $r_0 < r_1 < r_2 < \cdots$, $s_0 < s_1 < s_2 < \cdots$, $k_0 < k_1 < k_2 < \cdots$ i $l_0 > l_1 > l_2 > \cdots$ u $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ takve da je $\lim r_n = a$, $\lim s_n = b$ i $\lim k_n = \lim l_n = c$. Iz definicije μ sledi da

$$T^* \vdash P(\alpha) \geqslant \underline{r_n} \wedge P(\beta) \geqslant \underline{s_n} \wedge \underline{k_n} \leqslant P(\alpha \wedge \beta) \leqslant \underline{l_n}$$

za svako n. Odavde dobijamo da

$$T^* \vdash \underline{r_n} + \underline{s_n} - \underline{l_n} \leqslant P(\alpha) + P(\beta) - P(\alpha \wedge \beta) \leqslant \underline{r_n} + \underline{s_n} - \underline{k_n}$$

za svako n. Kako $T^* \vdash \underline{r} + \underline{s} = \underline{r+s}$ za svako $r, s \in \mathbb{Q}$, imamo da

$$T^* \vdash \underline{r_n + s_n - l_n} \leqslant P(\alpha) + P(\beta) - P(\alpha \wedge \beta) \leqslant \underline{r_n + s_n - k_n}$$

za svako n. Odavde sledi:

$$\begin{aligned}
\mu([\alpha \vee \beta]) &= \sup\{s \mid T^* \vdash P(\alpha \vee \beta) \geqslant \underline{s}\} \\
&= \sup\{s \mid T^* \vdash P(\alpha) + P(\beta) - P(\alpha \wedge \beta) \geqslant \underline{s}\} \\
&= \lim_{n\to\infty}(r_n + s_n - l_n) = \lim_{n\to\infty}(r_n + s_n - k_n) \\
&= a + b - c \\
&= \mu([\alpha]) + \mu([\beta]) - \mu([\alpha \wedge \beta]).
\end{aligned}$$

□

4.3.7 Teorema [Jaka potpunost] $M^* \models T^*$. *Posebno, svaki neprotivrečan skup formula ima merljiv model.*

Dokaz Indukcijom po složenosti formule Φ dokazujemo da $M^* \models \Phi$ akko $\Phi \in T^*$.

Neka je $\Phi = \alpha \in For_C$. Ako $\alpha \in T^*$, tj. $T^* \vdash \alpha$, onda iz definicije M^* sledi da $M^* \models \alpha$. Obratno, ako $M^* \models \alpha$, onda je $w(\alpha) = 1$ za svako $w \in W$. Kako je W skup svih iskaznih modela od $T_0 \cap For_C$, imamo da $T_0 \cap For_C \models \alpha$. Po stavu potpunosti iskaznog računa, $T_0 \cap For_C \vdash \alpha$, a time i $\alpha \in T^*$.

Neka $\mathtt{f} \geqslant \underline{0} \in T^*$. Tada

$$T^* \vdash \mathtt{f} = \sum_{i=1}^{m} \underline{s_i} \cdot P(\alpha_1)^{n_{i1}} \cdots P(\alpha_k)^{n_{ik}}$$

i

$$T^* \vdash \sum_{i=1}^{m} \underline{s_i} \cdot P(\alpha_1)^{n_{i1}} \cdots P(\alpha_k)^{n_{ik}} \geqslant \underline{0},$$

za neke $s_i \in \mathbb{Q}$ i neke $\alpha_j \in For_C$ takve da $T^* \vdash P(\alpha_j) > \underline{0}$. Neka je $a_j = \mu([\alpha_j])$. Ostaje da pokažemo da je

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \cdot a_1^{n_{i1}} \cdots a_k^{n_{ik}} \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Neka su $\langle r_{jl} \mid l < \omega \rangle$, $j = 1, \ldots, k$, rastući nizovi u $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ takvi da je

$$a_j = \lim_{l \to \infty} r_{jl}.$$

Zbog neprekidnosti funkcije $\langle x_1, \ldots, x_k \rangle \mapsto \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot x_1^{n_{i1}} \cdots x_k^{n_{ik}}$ imamo da je

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \cdot a_1^{n_{i1}} \cdots a_k^{n_{ik}} = \lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{m} s_i \cdot r_{1j}^{n_{i1}} \cdots r_{kj}^{n_{ik}}.$$

Iz prethodnih razmatranja sledi da za svako malo $\varepsilon \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$

$$T^* \vdash \underline{-\varepsilon} \leqslant \underline{\sum_{i=1}^{m} s_i \cdot r_{1j}^{n_{i1}} \cdots r_{kj}^{n_{ik}}}$$

za kofinitno mnogo indeksa j. S obzirom da $T^* \vdash \underline{r} \geqslant \underline{s}$ akko $r \geqslant s$, mora važiti (4.2).

Suprotna implikacija se identično pokazuje kontrapozicijom.

Neka je $\Phi = \neg\phi \in For_P$. Tada $M^* \models \neg\phi$ akko $M^* \not\models \phi$ akko $\phi \notin T^*$ akko (teorema 4.3.5) $\neg\phi \in T^*$.

Konačno, neka je $\Phi = \phi \wedge \psi \in For_P$. $M^* \models \phi \wedge \psi$ akko $M^* \models \phi$ i $M^* \models \psi$ akko ϕ, $\psi \in T^*$ akko (teorema 4.3.5) $\phi \wedge \psi \in T^*$. $\Box$

4.4 Odlučivost

Odlučivost logike o polinomijalnim težinskim formulama je pokazana u [5], kao i odgovarajuća PSPACE složenost pomenute procedure. Sama procedura je bazirana na teoremama o malom modelu (teoreme 5.1 i 5.2 u [5]) kao i Cannyjevoj PSPACE proceduri odlučivosti za egzistencijalni deo RCF, videti [1].

4.5 Napomene

U ovom poglavlju smo rešili 18 godina otvoren problem jako kompletne aksiomatizacije logike o polinomijalnim težinskim formulama, koju su semantički uveli Fagin, Halpern i Megiddo u radu [5]. Ovde predstavljeni rezultati su publikovani u [43].

5

Primene metode interpretacije

U ovom poglavlju ćemo koristiti metod interpretacije kako bismo dokazali teoremu kompaktnosti za hiper-realno vrednosne polinomijalne težinske formule, kao i za aksiomatizaciju Łukasiewiczeve i proizvod logike (u pitanju su fazi logike).

Polinomijalne težinske formule smo definisali u prethodnom poglavlju. Semantiku ćemo neznatno izmeniti: mere μ u modelima će biti ${}^*\mathbb{R}$-vrednosne, pri čemu je ${}^*\mathbb{R}$ neka ω_1-zasićena elementarna ekstenzija uređenog polja realnih brojeva.

5.1 Kompaktnost

5.1.1 Teorema *Neka je skup formula T konačno zadovoljiv. Tada T ima model.*

Dokaz

Neka je $\mathcal{L}_{OF} = \{+, \cdot, \leqslant, 0, 1\}$ jezik uređenih polja i neka je

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{OF} \cup \{P(\alpha) \mid \alpha \in For_{\mathcal{P}}\},$$

pri čemu je svako $P(\alpha)$ novi simbol konstante. Očigledno se T može se može posmatrati i kao skup Σ_0 $\mathcal{L}$-rečenica. Definišimo $\mathcal{L}$-teoriju Γ kao uniju sledećih $\mathcal{L}$-teorija:

1. RCF;
2. T;
3. $\{P(\alpha) \geqslant 0 \mid \alpha \in For_P\}$;
4. $\{P(\alpha) = 1 \mid w(\alpha)$ je tautologija$\}$;
5. $\{P(\neg\alpha) = 1 - P(\alpha) \mid \alpha \in For_{\mathcal{P}}\}$
6. $\{P(\alpha) = P(\beta) \mid \alpha \leftrightarrow \beta$ je tautologija$\}$
7. $\{P(\alpha \vee \beta) = P(\alpha) + P(\beta) - P(\alpha \wedge \beta) \mid \alpha, \beta \in For_{\mathcal{P}}\}$.

Na osnovu teoreme kompaktnosti za predikatski račun prvog reda, da bismo pokazali da je teorija Γ neprotivrečna, dovoljno je da pokažemo da je konačno zadovoljiva.

Neka je $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq T$. Kako je T konačno zadovoljiv skup polinomijalnih težinskih formula, postoji merljiv model M koji zadovoljava ϕ_1, …, ϕ_n. Definišimo $\mathcal{L}$-model $\mathcal{M}$ na sledeći način:

- univerzum modela $\mathcal{M}$ je ${}^*\mathbb{R}$.
- $\mathcal{L}_{OF}$ se interpretira na isti način u $\mathcal{M}$ kao i u ${}^*\mathbb{R}$.
- Svako $P(\alpha)$ se interpretira u $\mathcal{M}$ kao $\mu([\alpha])$.

Sasvim lako se proverava da $\mathcal{M} \models (\Gamma \setminus T) \cup \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$, pa je teorija Γ konačno zadovoljiva.

Po donjoj Löwenheim-Skolem-Tarski teoremi, Γ ima prebrojiv model $\mathcal{N}$. Kako je ${}^*\mathbb{R}$ ω_1-zasićen, postoji elementarno utapanje (uređenih polja) $F : \mathcal{N} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$. Konačno, model M skupa T definišemo na sledeći način:

- W je skup svih klasičnih iskaznih modela.
- $v(\alpha, w) = 1$ if $w(\alpha) = 1$
- $H = \{[\alpha] \mid \alpha \in For_{\mathcal{P}}\}$
- $\mu([\alpha]) = F(w(\alpha)^{\mathcal{N}})$.

Korektnost konstrukcije modela M se sasvim lako proverava. $\square$

5.2 Aksiomatizacija

Posledica teoreme kompaknosti je činjenica da je svaka slabo kompletna aksiomatizacija ujedno i jako kompletna. S obzirom da je logika o polinomijalnim težinskim formulama odlučiva, imamo trivijalnu aksiomatizaciju koju čini jedna shema aksioma:

- ϕ, ukoliko je ϕ valjana formula formula.

U ovom trivijalnom slučaju nam nisu potrebna nikakva pravila izvođenja. Ozbiljan izazov predstavlja pronalaženje netrivijalne kompletne aksiomatizacije.

Sledeća lema je direktna posledica definicije relacije zadovoljivosti $\models$.

5.2.1 Lema *Neka je T proizvoljan skup polinomijalnih težinskih formula. Tada:*

1. *(L$\rightarrow$) $T \models \phi \rightarrow \psi$ akko $T \cup \{\phi\} \models \psi$.*
2. *(L$\neg\neg$) $T \models \neg\neg\phi$ akko $T \models \phi$.*
3. *(L$\neg\rightarrow$) $T \models \neg(\phi \rightarrow \psi)$ akko $T \models \phi$ i $T \models \neg\psi$.*
4. *(R$\neg\neg$) $T \cup \{\neg\neg\phi\} \models \psi$ akko $T \cup \{\phi\} \models \psi$.*
5. *(R$\neg\rightarrow$) $T \cup \{\neg(\phi \rightarrow \psi)\} \models \theta$ akko $T \cup \{\phi, \neg\psi\} \models \theta$.*

6. *(R→ $T \cup \{\phi \to \psi\} \models \theta$ akko $T \cup \{\neg\theta\} \models \phi$ i $T \cup \{\neg\theta\} \models \neg\psi$.*

L i R "pravila" prethodne leme koristimo kako bi redukovali složenost podformula date verovatnosne formule ϕ, u cilju ekvivalentne redukcije $\models \phi$ na konačnu konjunkciju sekvenata oblika

$$\{\pm(\mathtt{f}_1 \geqslant 0), \cdots, \pm(\mathtt{f}_n \geqslant 0)\} \models \pm(\mathtt{g} \geqslant 0).$$

Strategiju redukcije pokušaćemo da pojasnimo sa sledeća dva primera:

5.2.2 Primer

$$\begin{array}{lll} & \models (\mathtt{f} \geqslant 0 \to \mathtt{g} \geqslant 0) \to \mathtt{h} \geqslant 0 & \\ \text{akko} & \{\mathtt{f} \geqslant 0 \to \mathtt{g} \geqslant 0\} \models \mathtt{h} \geqslant 0 & (\mathrm{L}\!\to)\ \text{leme 5.2.1} \\ \text{akko} & \mathtt{h} < 0 \models \mathtt{f} \geqslant 0 \text{ i } \mathtt{h} < 0 \models \mathtt{g} < 0 & (\mathrm{R}\!\to)\ \text{leme 5.2.1} \end{array}$$

5.2.3 Primer

$$\begin{array}{lll} & \models (\neg\psi \to \neg\phi) \to (\phi \to \psi) & \\ \text{akko} & \{\neg\psi \to \neg\phi\} \models \phi \to \psi & (\mathrm{L}\!\to)\ \text{leme 5.2.1} \\ \text{akko} & \{\neg\psi \to \neg\phi, \phi\} \models \psi & (\mathrm{L}\!\to)\ \text{leme 5.2.1} \\ \text{akko} & \{\neg\psi, \phi\} \models \neg\psi \text{ i } \{\neg\psi, \phi\} \models \neg\neg\phi & (\mathrm{R}\!\to)\ \text{leme 5.2.1} \\ \text{akko} & \{\neg\psi, \phi\} \models \neg\psi \text{ i } \{\neg\psi, \phi\} \models \phi & (\mathrm{L}\neg)\ \text{leme 5.2.1} \end{array}$$

Prelazimo na najavljenu aksiomatizaciju.

5.2.1 Iskazne aksiome

ova grupa aksiome se sastoji iz dve sheme:

A1 Substitucione instance tautologija.

A2 Sve valjane formule oblika

$$\pm(\mathtt{f}_1 \geqslant 0) \wedge \cdots \wedge \pm(\mathtt{f}_n \geqslant 0) \to \pm(\mathtt{g} \geqslant 0),$$

pri čemu su $\mathtt{f}_1, \ldots, \mathtt{f}_n, \mathtt{g}$ u tzv. *normalnoj formi*

$$\sum_i k_i \prod_{a \in {}^m 2} (w(p^a))^{l_{ai}}.$$

5.2.2 Verovatnosne aksiome

ovu grupu čini pet shema:

A3 $P(\alpha) = 1$, ukoliko je α tautologija.

A4 $P(\neg\alpha) = 1 - P(\alpha)$.

A5 $P(\alpha) = P(\beta)$, ukoliko je $\alpha \to \beta$ tautologija.

A6 $P(\alpha \vee \beta) = P(\alpha) + P(\beta) - P(\alpha \wedge \beta)$.

A7 $P(\alpha) \geqslant 0$.

5.2.3 Algebarske aksiome

Ovu grupu aksioma čine sledeće sheme:

A8 $\mathtt{f} + \mathtt{g} = \mathtt{g} + \mathtt{f}$.

A9 $(\mathtt{f} + \mathtt{g}) + \mathtt{h} = \mathtt{f} + (\mathtt{g} + \mathtt{h})$.

A10 $\mathtt{f} + 0 = \mathtt{f}$.

A11 $\mathtt{f} - \mathtt{f} = 0$.

A12 $\mathtt{f} \cdot \mathtt{g} = \mathtt{g} \cdot \mathtt{f}$.

A13 $(\mathtt{f} \cdot \mathtt{g}) \cdot \mathtt{h} = \mathtt{f} \cdot (\mathtt{g} \cdot \mathtt{h})$.

A14 $\mathtt{f} \cdot 1 = \mathtt{f}$.

A15 $\mathtt{f} \cdot (\mathtt{g} + \mathtt{h}) = (\mathtt{f} \cdot \mathtt{g}) + (\mathtt{f} \cdot \mathtt{h})$.

A16 $\mathtt{f} \geqslant \mathtt{g} \vee \mathtt{g} \geqslant \mathtt{f}$.

A17 $(\mathtt{f} \geqslant \mathtt{g} \wedge \mathtt{g} \geqslant \mathtt{h}) \to \mathtt{f} \geqslant \mathtt{h}$.

A18 $\mathtt{f} \geqslant \mathtt{g} \to \mathtt{f} + \mathtt{h} \geqslant \mathtt{g} + \mathtt{h}$.

A19 $(\mathtt{f} \geqslant \mathtt{g} \wedge \mathtt{h} > 0) \to \mathtt{f} \cdot \mathtt{h} \geqslant \mathtt{g} \cdot \mathtt{h}$.

5.2.4 Pravila izvođenja

The only inference rule is modus ponens:

MP From ϕ and $\phi \to \psi$ derive ψ.

Pojmovi dokaza, konsistentnosti, teoreme itd. se uvode na uobičajeni način.

5.2.5 Teorema potpunosti

Lako se proverava da je uvedena aksiomatizacija saglasna u odnosu na klasu merlivih modela. Sledeća lema je direktna posledica A1 i MP.

5.2.4 Lema *Neka je T proizvoljan skup polinomijalnih težinskih formula. Tada:*

1. *(L$\to$) $T \vdash \phi \to \psi$ akko $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$.*
2. *(L$\neg\neg$) $T \vdash \neg\neg\phi$ akko $T \vdash \phi$.*
3. *(L$\neg \to$) $T \vdash \neg(\phi \to \psi)$ akko $T \vdash \phi$ i $T \vdash \neg\psi$.*
4. *(R$\neg\neg$) $T \cup \{\neg\neg\phi\} \vdash \psi$ akko $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$.*
5. *(R$\neg \to$) $T \cup \{\neg(\phi \to \psi)\} \vdash \theta$ akko $T \cup \{\phi, \neg\psi\} \vdash \theta$.*
6. *(R$\to$ $T \cup \{\phi \to \psi\} \vdash \theta$ akko $T \cup \{\neg\theta\} \vdash \phi$ i $T \cup \{\neg\theta\} \vdash \neg\psi$.*

5.2.5 Teorema *Svaki knosistentan skup T polinomijalnih težinskih formula ima merljiv model.*

Dokaz S obzirom na teoremu kompaktnosti, dovoljno je pokazati slabu potpunost:

$$\vdash \phi \quad \text{iff} \quad \models \phi.$$

Saglasnost se lako pokazuje, pa stoga pretpostavimo da je formula ϕ valjana. Koristeći MP, A1, algebarske i verovatnosne aksiome, možemo ekvivalentno transformisati ϕ u formulu ψ u kojoj se od veznika javljaju jedino negacija i implikacija, i svaki težinski term koji se javlja u *psi* je u normalnoj formi. Jasno je da i ψ mora biti valjana. Primenom leme 5.2.1 i redukcije ilustrovane u prethodnim primerima, dobijamo konačno mnogo sekvenata oblika

$$\{\pm(\mathtt{f}_1 \geqslant 0), \cdots, \pm(\mathtt{f}_n \geqslant 0)\} \models \pm(\mathtt{g} \geqslant 0).$$

kako je svaki od ovih sekvenata zadovoljen, po A2 i lemi 5.2.4, možemo zameniti $\models$ sa $\vdash$ u celoj redukciji formule ψ. Odavde sledi da je ψ teorema, čime je dokaz završen. $\square$

5.3 $RCF_{Ł\Pi}$

U ovoj sekciji ćemo interpretirati Łukasiewiczevu fazi logiku i proizvod fazi logiku u teoriji RCF. Na ovaj način dobijamo jako kompletnu aksiomatizaciju u slučaju $^*\mathbb{R}$-vrednosnih veznika. Odlučivost teorije $RCF_{Ł\Pi}$ će biti takođe dokazana metodom interpretacije. Sama formalizacija je nešto složenija, kako bi ukazala na primene i u fazi relacionim bazama podataka.

Zašto baš interpretacija u RCF? Brojni su razlozi za to, ovde ćemo navesti samo neke od njih:

- RCF je najbolja aproksimacija prvog reda uređenog polja $\mathbb{R}$ realnih brojeva, koje je i prirodno semantičko okruženje fazi logika. Medjutim, ona ima i nestandardne modele, što je dodatna pogodnost u aksiomatizaciji jer omogućuje dokaz stava kompaktnosti.

- Najvažnije t-norme (proizvod norma, Gödelova norma i Łukasiewiczeva norma), kao i njihove s-norme i rezidualne implikacije su definabilne u RCF, što omogućuje primene metoda interpretacije.

- RCF dopušta eliminaciju kvantora, što ima mnoge značajne teoretske i praktične primene.

- RCF odlučiva teorija, sa EXPSPACE složenošću za opštu proceduru odlučivanja i PSPACE složenošću za odlučivanje egzistencijalnog fragmenta.

Poznate su Hilbertovske aksiomatizacije Łukasiewiczeve logike, proizvod logike i Gödelove logike. Za detalje čitaoca upućujemo na [6]. Naš cilj je da metodom interpretacije dobijemo kompletnu aksiomatizaciju $L\Pi$ logike (videti [23]) u sledećem smislu: ako je *phi* proizvoljna $L\Pi$-formula, onda je njena maksimalna zadovoljivost jednaka s akko je $C_\phi = s$ teorema teorije $RCF_{L\Pi}$. Na ovaj način možemo formalno govoriti o stepenu zadovoljivosti fazi formule unutar RCF teorije.

Kakva je veza sa tzv pFCSP (prioritized fuzzy constraint satisfaction problem)? Osnovni atributi su zapravo iskazna slova, a upiti (složenije) iskazne formule. Ovo je sasvim dovoljno da se analizira FCSP. Međutim, prioritet unosi dodatne tehničke komplikacije, tako da smo se odlučili za sledeću konvenciju: kao ulaz imamo sledeća dva podatka:

- Lokalni stepen zadovoljivosti atributa, koji se računa na osnovu mekih i striktnih ograničenja. Meka ograničenja se uvode preko fazi skupova.
- Prioritet atributa.

Otud su naša iskazna slova parovi oblika $\langle v, p\rangle$, gde prva koordinata predstavlja lokalni stepen zadovoljivosti atributa, a druga njegov prioritet. Upiti su $L\Pi$-formule na dovakvim iskaznim slovima.

Prelazimo na tehničke detalje. Koristićemo standardnu notaciju, videti [24]. Neka je $\mathcal{L}_{OF} = \{+, -, \cdot, ^{-1}, \leqslant, 0, 1\}$ jezik uređenih polja i neka je $\mathcal{V} = \{v_n \mid n < \omega\}$, $\mathcal{P} = \{P\} \cup \{p_n \mid n < \omega\}$ $\mathcal{C} = \{\langle v, p\rangle \mid v \in \mathcal{V}$ and $p \in \mathcal{P}\}$. Slova u, v i w su promenljive za elemente skupa $\mathcal{V}$, dok su p, q i r promenljive za elemente skupa $\mathcal{P}$. Skup For svih fazi iskaznih formula definišemo na sledeći način:

- $For_0 = \mathcal{C}$.

- $For_{n+1} = For_N \cup \{\neg_L \alpha \mid \alpha \in For_n\} \cup \{(\alpha * \beta) \mid \alpha, \beta \in For_n\}$, gde $* \in \{\wedge_L, \wedge_\Pi, \vee_L, \vee_\Pi\}$.
- $For = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} For_n$.

As it is usual, we will omit the uttermost brackets in any fuzzy formula. The elements of For will be denoted by α, β and γ, indexed or primed if necessary.

5.3.1 Definicija
Neka je $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_{OF} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{P} \cup \{\mathtt{C}_\alpha \mid \alpha \in For\}$, pri čemu se elementi skupa $\mathcal{L}^* \backslash \mathcal{L}_{OF}$ tretiraju kao novi simboli konstanti. $\mathcal{L}^*$–teorija $RCF_{L\Pi}$ se sastoji od sledećih aksioma:

1. RCF.
2. $0 \leqslant v_n \wedge v_n \leqslant 1$, $n < \omega$.
3. $0 < p_0$.
4. $p_n < p_m$, ukoliko je $n < m$.
5. $p_n < P$, $n < \omega$.
6. $\mathtt{C}_{\langle v,p \rangle} = 1 - (1 - v) \cdot p \cdot P^{-1}$.
7. $\mathtt{C}_{\neg_L \alpha} = 1 - \mathtt{C}_\alpha$.
8. $\mathtt{C}_{\alpha \wedge_L \beta} = \max(\mathtt{C}_\alpha + \mathtt{C}_\beta - 1, 0)$.
9. $\mathtt{C}_{\alpha \vee_L \beta} = \min(\mathtt{C}_\alpha + \mathtt{C}_\beta, 1)$.
10. $\mathtt{C}_{\alpha \wedge_\Pi \beta} = \mathtt{C}_\alpha \cdot \mathtt{C}_\beta$.
11. $\mathtt{C}_\alpha \leqslant \mathtt{C}_\beta \rightarrow \mathtt{C}_{\alpha \rightarrow_\Pi \beta} = 1$.
12. $\mathtt{C}_\beta < \mathtt{C}_\alpha \rightarrow \mathtt{C}_\beta \cdot \mathtt{C}_{\alpha \rightarrow_\Pi \beta} = \mathtt{C}_\alpha$.

Prokomentarišimo gornje aksiome. Parovi $\langle v, p\rangle$ su tipični za jezik prioriteta. Prva koordinata predstavlja lokalni stepen zadovoljivosti atributa, dok druga koordinata predstavlja njegov prioritet. $\mathtt{C}_\alpha$ predstavlja stepen zadovoljivosti upita $\alpha \in For$. Drugom aksiomom se postulira da su stepeni zadovoljivosti između 0 and 1. Trećom, četvrtom i petom aksiomom se postulira da prioriteti čine pozitivan niz čiji je tip uređenja $\omega + 1$. Šestom aksiomom se prioritet uvodi u računanje globalnog stepena zadovoljivosti. Ostale aksiome slede uobičajene istinitosne tablice za korišćene fazi veznike. Napomenimo da su u ovom kontekstu $+, -, \cdot, ^{-1}$, max i min sintaksni objekti.

5.3.2 Teorema *$RCF_{\text{Ł}\Pi}$ je neprotivrečna teorija.*

Dokaz U dokazu ćemo koristiti stav kompaktnosti za logiku prvog reda. Dakle, za neprotivrečnost teorije $RCF_{\text{Ł}\Pi}$ je dovoljno pokazati njenu konačnu zadovoljivost. Neka je Γ konačan podskup od $RCF_{\text{Ł}\Pi}$ i neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sve fazi formule koje se javljaju u Γ. Model $\mathcal{M}$ teorije Γ definišemo na sledeći način:

- Univerzum M modela $\mathcal{M}$ je univerzum proizvoljnog realno zatvorenog polja $\mathbb{M}$. Jezik uređenih polja se interpretira u $\mathcal{M}$ isto kao i u $\mathbb{M}$. Bez umanjenja opštosti podrazumevamo da je $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{M}$.
- Svako v_m koje se javlja u formulama $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ interpretiramo kao $\frac{1}{n+1}$.
- Svako p_m se interpretira sa $m + 1$. Ako je k maksimum ovih interpretacija, onda P interpretiramo kao $k + 1$.
- $\mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\langle v,p\rangle} = 1 -^{\mathbb{M}} (1 -^{\mathbb{M}} v^{\mathcal{M}}) \cdot^{\mathbb{M}} p^{\mathcal{M}} \cdot (P^{\mathcal{M}})^{-1^{\mathbb{M}}}$.
- $\mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\neg_L \alpha} = 1 -^{\mathbb{M}} \mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\alpha}$.
- $\mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\alpha \wedge_L \beta} = \max^{\mathbb{M}}(\mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\alpha} +^{\mathbb{M}} \mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\beta} -^{\mathbb{M}} 1, 0)$.
- $\mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\alpha \vee_L \beta} = \min^{\mathbb{M}}(\mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\alpha} +^{\mathbb{M}} \mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\beta}, 1)$.

- $\mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\alpha\wedge_\Pi\beta} = \mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\alpha} \cdot \mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\beta}$.
- $\mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\alpha\rightarrow_\Pi\beta} = 1$ ukoliko je $\mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\alpha} \leqslant^{\mathbb{M}} \mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\beta}$. U suprotnom je $\mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\alpha\rightarrow_\Pi\beta} = \mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\beta} \cdot^{\mathbb{M}} (\mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\alpha})^{-1^{\mathbb{M}}}$.

Lako se proverava da je $\langle \mathbb{M}, \mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\alpha_1}, \ldots, \mathtt{C}^{\mathcal{M}}_{\alpha_n} \rangle$ model teorije Γ, čime je dokaz završen. □

5.3.3 Teorema *Za svaku rečenicu φ jezika $\mathcal{L}^*$ postoji rečenica φ^* jezika $\mathcal{L}_{OF}$ takva da $RCF_{L\Pi} \vdash \varphi$ akko $RCF \vdash \varphi^*$. Drugim rečima, teorija $RCF_{L\Pi}$ je interpretabilna u teoriji RCF.*

Dokaz Primetimo da je za dokaz teoreme dovoljno ekvivalentno eliminisati nove simbole konstanti $\mathtt{C}_\alpha$. Iz definicije neposredno sledi da je svako $\mathtt{C}_\alpha$ oblika

$$F(\mathtt{C}_{\langle v',p'\rangle}, \mathtt{C}_{\langle v'',p''\rangle}, \ldots, \mathtt{C}_{\langle v^{(k)},p^{(k)}\rangle}), \tag{5.1}$$

gde je F neka kompozicija simbola $+, -, \cdot, ^{-1}$, max i min. kako je F definabilna u RCF, preostaje eliminacija simbola $\mathtt{C}_{\langle v,p\rangle}$'s. Nije teško pokazati da

$$RCF_{L\Pi} \vdash \varphi(F(\mathtt{C}_{\langle v',p'\rangle}, \mathtt{C}_{\langle v'',p''\rangle}, \ldots, \mathtt{C}_{\langle v^{(k)},p^{(k)}\rangle}))$$

akko

$$RCF \vdash \exists \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t(\varphi(F(\bar{z}))\wedge$$
$$\bigwedge_{i=1}^{k} z_i = 1 - \frac{(1-x_i)y_i}{t} \wedge \psi(\bar{x}) \wedge \theta(\bar{y}, t)),$$

pri čemu je, $\psi(\bar{x})$ formula

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1 \wedge \cdots \wedge 0 \leqslant x_k \leqslant 1,$$

a $\theta(\bar{y}, t)$ je formula

$$0 < y_1 < t \wedge \cdots \wedge 0 < y_k < t.$$

Odavde sledi i tvrđenje u celini. □

5.3.4 Posledica *Teorija $RCF_{\text{Ł}\Pi}$ je odlučiva.*

Dokaz Na osnovu prethodne teoreme, svakoj rečenici φ jezika $\mathcal{L}^*$ odgovara rečenica φ^* jezika $\mathcal{L}_{OF}$ takva da $RCF_{\text{Ł}\Pi} \vdash \varphi$ akko $RCF \vdash \varphi^*$. Sada tvrđenje sledi iz odlučivosti teorije RCF. □

Što se tiče složenosti, i RCF i $RCF_{\text{Ł}\Pi}$ su obe na EXPSPACE stepenu hijerarhije. Međutim, za upite su relevantne Σ_0-rečenice jezika $\mathcal{L}^*$. Kako ovakvim rečenicama odgovaraju egzistencijalne rečenice u preneksnoj formi, imamo PSPACE ograničenje složenosti za Σ_0-rečenice.

5.4 Napomene

Kao što smo ranije istakli, uz Stav kompaktnosti je jaka teorema potpunosti posledica slabe teoreme potpunosti. Zajedno sa odlučivošću, ovo je dovoljno da zaključimo da postoji rekurzivna jako potpuna aksiomatizacija hiper-realno vrednosne logike sa polinomijalnim težinskim formulama.

Rezultati prezentovani u ovom poglavlju se mogu naći u radovima [44, 42].

Dodatak A

Logičke osnove

A.1 O formalnoj metodi

Analizirajući strukturu svake definicije, vidimo da se novi pojmovi uvode preko nekih ranije uvedenih, što nužno dovodi do zaključka da neki pojmovi moraju ostati nedefinisani. Takve pojmove zovemo osnovnim ili primitivnim pojmovima.

Slično, u dokazu nekog tvrđenja pozivamo se na neka druga (ranija) tvrđenja, pa opet vidimo da se sva tvrđenja ne mogu dokazati. Polazna tvrđenja koja ne dokazujemo zovemo aksiomama.

Matematizacija deduktivne metode je dovela do pojma formalne teorije kao čisto sintaksnog okvira u kome se izlaže matematika.

A.1.1 Definicija *Formalna teorija* (formalni sistem) se sastoji od sledećih komponenti:

- Nepraznog skupa simbola, koji nazivamo i jezikom formalne teorije;
- Skupa svih konačnih nizova simbola jezika formalne teorije, koji nazivamo i skupom reči formalne teorije;
- Skupa formula, koji je podskup skupa svih reči;

- Skupa aksioma, koji je podskup skupa formula;
- Pravila izvođenja, koja su parcijalne funkcije[1] oblika

$$R : P(For) \longrightarrow For.$$

  Pravilo izvođenja R je finitarno ukoliko je svaki $S \in \operatorname{dom} R$ konačan. U suprotnom je pravilo R infinitarno.

A.1.2 Primer Neka je $\mathcal{L} = \{a, b\}$ i neka se skup formula poklapa sa skupom reči nad $\mathcal{L}$. Dalje, neka su jedine dve aksiome a i b, i neka su R_1 i R_2 sledeća pravila izvođenja:

$$R_1 \ \frac{Xa}{Xab} \qquad\qquad R_2 \ \frac{Xb}{Xba},$$

pri čemu je X proizvoljna reč (moguće prazna). Na ovaj način smo definisali jednu formalnu teoriju.

A.1.3 Primer Iskazni račun kao formalnu teoriju definišemo na sledeći način:

- Jezik se sastoji iz dva dela i to:
  - logičkog dela, koji čine znak za negaciju $\neg$, znak za implikaciju $\Rightarrow$, leva i desna zagrada;
  - nepraznog skupa P, koji nazivamo skupom iskaznih slova.

  Menjajući skup iskaznih slova P dobijamo potencijalno različite iskazne račune. Ukoliko su skupovi P i P' iste kardinalnosti, onda su odgovarajući iskazni računi ekvivalentni, pa ih stoga i poistovećujemo;
- Skupa iskaznih fromula $ForP$, koji se definiše na sledeći način:
  - iskazna slova su iskazne formule;

[1] $f : A \longrightarrow B$ je *parcijhalna funkcija* ukoliko je njen domen podskup skupa A.

- ako su φ i ψ iskazne formule, onda su i $\neg\varphi$ i $(\varphi \Rightarrow \psi)$ takođe iskazne formule;
- iskazne formule se dobijaju isključivo konačnom primenom prethodne dve stavke.

Radi preglednosti zapisa, spoljne zagrade se najčešće izostavljaju. Takođe se uvode i formalna konjunkcija, disjunkcija i ekvivalencija na sledeći način:

- $\varphi \wedge \psi$ je zamena za $\neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi)$;
- $\varphi \vee \psi$ je zamena za $\neg\varphi \Rightarrow \psi$;
- $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je zamena za $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$;

- Aksiome se dobijaju primenom sledeće tri sheme:

  `S1` $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$;

  `S2` $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta))$;

  `S3` $(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$.

  Pritom su φ, ψ i θ proizvoljne iskazne formule;

- Jedino pravilo izvođenja je modus ponens:

$$\mathtt{MP}\ \frac{\varphi \quad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}.$$

A.1.4 Definicija Neka je T proizvoljna *teorija* (podskup skupa svih formula) nekog fiksiranog formalnog sistema. *Dokaz u teoriji T* u datoj formalnoj teoriji je svaki konačan niz formula takav da je svaka formula u nizu ili aksioma, ili pripada teoriji T, ili se dobija iz nekih prethodnih članova niza po nekom pravilu izvođenja. Sa

$$T \vdash \varphi$$

se označava činjenica da postoji dokaz u teoriji T koji se završava formulom φ. Za formulu φ kažemo da je *teorema* teorije T.

Ako je $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, onda umesto $T \vdash \varphi$ pišemo

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi.$$

Dalje, umesto $T_1 \cup T_2 \vdash \varphi$ pišemo

$$T_1, T_2 \vdash \varphi.$$

Konačno, ako je $T = \emptyset$, onda umesto $\emptyset \vdash \varphi$ pišemo

$$\vdash \varphi.$$

A.1.5 Primer Pokažimo da važi $\vdash baba$ u formalnoj teoriji iz primera A.1.2. Zaista, jedan od mogućih formalnih dokaza je i niz

$$b, ba, bab, baba.$$

Naime, prvi član niza je aksioma, drugi se dobija iz prvog po R_1, treći iz drugog po R_2 i četvrti iz trećeg po R_1.

A.1.6 Primer U iskaznom računu (primer A.1.3), pokažimo da važi $\vdash \varphi \Rightarrow \varphi$ za proizvoljnu iskaznu formulu φ. Zaista:

$$\begin{array}{lcl}
a & (\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) & \mathtt{S2} \\
b & \varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi) & \mathtt{S1} \\
c & (\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) & \mathtt{MP}(b, a) \\
d & \varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) & \mathtt{S1} \\
e & \varphi \Rightarrow \varphi & \mathtt{MP}(d, c)
\end{array}$$

A.1.7 Teorema *Neka su T_1 i T_2 teorije unutar fiksiranog formalnog sistema. Tada važi:*

1. *Ako $T_1 \vdash \varphi$, onda i $T_1, T_2 \vdash \varphi$;*

2. *Ako $T_1 \vdash \varphi$ i $\varphi \vdash \psi$, onda i $T_1 \vdash \psi$.*

Dokaz

Ako je niz

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$$

dokaz formule φ u teoriji T_1, onda je direktno po definiciji isti taj niz dokaz formule φ u teoriji $T_1 \cup T_2$, pa imamo da iz $T_1 \vdash \varphi$ sledi da $T_1, T_2 \vdash \varphi$.

Prelazimo na dokaz preostalog dela tvrđenja. Neka je niz

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi \tag{A.1}$$

dokaz u teoriji T_1 formule φ i neka je niz

$$\psi_1, \ldots, \psi_m, \psi \tag{A.2}$$

dokaz formule ψ u teoriji $\{\varphi\}$. Sada dokaz formule ψ u T_1 dobijamo tako što umesto svakog javljanja formule φ u nizu (A.2) stavimo niz (A.1). $\square$

A.1.8 Zadatak Neka je T proizvoljna iskazna teorija i neka su φ i ψ proizvoljne iskazne formule. Dokazati:

1. Ako $T \vdash \varphi$ i $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$, onda $T \vdash \psi$;
2. Ako $T \vdash \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$, onda $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$.

Formalne teorije ne predstavljaju puku igru simbolima već su, naprotiv, pokušaj da se čisto sintaksnim sredstvima sagledaju neki važni matematički koncepti. U slučaju iskaznog računa, postignuta je potpuna sintaksna karakterizacija tautologija, što ćemo u nastavku i obrazložiti.

Neformalno, iskaz je rečenica govornog jezika koja može biti ili tačna ili netačna. Polazeći od primitivnih (osnovnih) iskaza, složeniji iskazi se dobijaju upotrebom logičkih operacija negacije, implikacije, konjunkcije, disjunkcije i ekvivalencije. Pritom je konjunkcija dva iskaza tačna jedino ukoliko su oba iskaza tačna, negacija iskaza menja njegovu istinitosnu vrednost itd. Matematizacijom ovog koncepta dolazimo do *semantike* iskaznog računa, koja se ostvaruje u *iskaznoj algebri*

$$\mathbf{2} = \langle \{0,1\}, \wedge^{\mathbf{2}}, \vee^{\mathbf{2}}, \neg^{\mathbf{2}}, \Rightarrow^{\mathbf{2}}, \Leftrightarrow^{\mathbf{2}} \rangle$$

na sledeći način:

- Navedene operacije su definisane sledećim tablicama:

$$\begin{array}{c|cc} \wedge^{\mathbf{2}} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \vee^{\mathbf{2}} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \Rightarrow^{\mathbf{2}} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \Leftrightarrow^{\mathbf{2}} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \neg^{\mathbf{2}} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

- *Valuacija* skupa iskaznih slova P je proizvoljna funkcija

$$\mu : P \longrightarrow \{0,1\};$$

- *Vrednost* iskazne formule φ pri valuaciji μ, u oznaci $\varphi[\mu]$, se definiše na sledeći način:

  - $p[\mu] = \mu(p)$, $p \in P$;
  - $(\neg\varphi)[\mu] = \neg^{\mathbf{2}}(\varphi[\mu])$;
  - $(\varphi \Rightarrow \psi)[\mu] = \varphi[\mu] \Rightarrow^{\mathbf{2}} \psi[\mu]$;

  Za iskaznu formulu φ kažemo da je tačna pri valuaciji μ, u oznaci $\mu \models \varphi$, ukoliko je $\varphi[\mu] = 1$. U tom slučaju za valuaciju μ kažemo i da je *model* formule φ. Ako je T iskazna teorija, onda je valuacije μ njen model ukoliko je model za svaku formulu koja se javlja u njoj. Iskazna formula φ je *tautologija*, u oznaci $\models \varphi$, ukoliko je tačna pri svim valuacijama. Iskazna formula φ je *kontradickija* ukoliko je njena negacija tautologija;

- Kažemo da je iskazna formula φ *semantička posledica* iskazne teorije T, u oznaci $T \models \varphi$, ukoliko je svaki modeteorije T ujedno i model formule φ.

A.1.9 Zadatak Neka je φ proizvoljna iskazna formula i neka su μ i ν valuacije takve da za svako iskazno slovo p koje se javlja u formuli φ važi

$$\mu(p) = \nu(p).$$

Dokazati da tada $\mu \models \varphi$ akko $\nu \models \varphi$.

Uputstvo Koristiti indukciju po složenosti formule, pri čemu je složenost formule broj logičkih veznika (računajući višestrukost) koji se javljaju u njoj. $\square$

Sledeći zadatak je poznatiji kao teorema saglasnosti iskaznog računa.

A.1.10 Zadatak Neka je T proizvoljna iskazna teorija i neka je φ proizvoljna iskazna formula. Ako $T \vdash \varphi$, dokazati da onda i $T \models \varphi$.

Uputstvo Koristiti indukciju po dužini dokaza formule φ u teoriji T. $\square$

Vezu između sintakse i semantike daje nam sledeća *mala teorema potpunosti* iskaznog računa:

A.1.11 Teorema *Neka je φ proizvoljna iskazna formula. Tada je $\vdash \varphi$ ako i samo ako je formula φ tautologija.*

Kao što ćemo videti, mala teorema potpunosti je posledica sledeće tri leme:

A.1.12 Lema *Neka je T proizvoljna iskazna teorija i neka su φ, ψ i θ proizvoljne iskazne formule. Tada važi:*

1. $T, \varphi \models \varphi$;
2. $T, \varphi, \neg\varphi \models \psi$;
3. $T \models \varphi \Rightarrow \psi$ *ako i samo ako* $T, \varphi \models \psi$;
4. $T \models \neg\neg\varphi$ *ako i samo ako* $T \models \varphi$;

5. *$T \models \neg(\varphi \Rightarrow \psi)$ ako i samo ako $T \models \varphi$ i $T \models \neg\psi$;*

6. *$T, \neg\neg\varphi \models \psi$ ako i samo ako $T, \varphi \models \psi$;*

7. *$T, \neg(\varphi \Rightarrow \psi) \models \theta$ ako i samo ako $T, \varphi, \neg\psi \models \theta$;*

8. *$T, \varphi \Rightarrow \psi \models \theta$ ako i samo ako $T, \neg\theta \models \varphi$ i $T, \neg\theta \models \neg\psi$.*

Dokaz

Kao ilustraciju dokažimo samo poslednju stavku. Pretpostavimo prvo da

$$T, \varphi \Rightarrow \psi \models \theta$$

i neka je valuacija μ model teorije $T, \neg\theta$. Ako je $\varphi[\mu] = 0$, onda je $(\varphi \Rightarrow \psi)[\mu] = 1$, pa po predpostavci mora biti $\mu \models \theta$, što je u kontradikciji sa $\mu \models \neg\theta$. Dakle, $\mu \models \varphi$. Odavde sledi da $\mu \models \neg\psi$, jer bi u suprotnom bilo $\mu \models \varphi \Rightarrow \psi$, pa dobijamo kontradikciju na isti način kao i malo pre.

Pretpostavimo sada da

$$T, \neg\theta \models \varphi \quad \text{i} \quad T, \neg\theta \models \neg\psi$$

i neka je valuacija μ proizvoljan model teorije $T, \varphi \Rightarrow \psi$. Ako je $\mu \models \neg\theta$, onda je po pretpostavci $\mu \models \varphi$ i $\mu \models \neg\psi$, pa je $\mu \models \neg(\varphi \Rightarrow \psi)$, što je u kontradikciji sa $\mu \models \varphi \Rightarrow \psi$. Dakle, $\mu \models \theta$. $\square$

A.1.13 Lema *Neka je T proizvoljna iskazna teorija i neka su φ, ψ i θ proizvoljne iskazne formule. Tada važi:*

1. *$T, \varphi \vdash \varphi$;*

2. *$T, \varphi, \neg\varphi \vdash \psi$;*

3. *(teorema dedukcije) $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$ ako i samo ako $T, \varphi \vdash \psi$;*

4. *$T \vdash \neg\neg\varphi$ ako i samo ako $T \vdash \varphi$;*

5. *$T \vdash \neg(\varphi \Rightarrow \psi)$ ako i samo ako $T \vdash \varphi$ i $T \vdash \neg\psi$;*

6. *$T, \neg\neg\varphi \vdash \psi$ ako i samo ako $T, \varphi \vdash \psi$;*

7. *$T, \neg(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash \theta$ ako i samo ako $T, \varphi, \neg\psi \vdash \theta$;*

8. *$T, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \theta$ ako i samo ako $T, \neg\theta \vdash \varphi$ i $T, \neg\theta \vdash \neg\psi$.*

Dokaz

Kao ilustraciju ćemo pokazati samo teoremu dedukcije. Prvo pretpostavimo da $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$. Tada i $T, \varphi \vdash \varphi \Rightarrow \psi$, a kako $T, \varphi \vdash \varphi$, po zadatku A.1.8 imamo da

$$T, \varphi \vdash \psi.$$

Pretpostavimo sada da $T, \varphi \vdash \psi$. Potpunom indukcijom po dužini dokaza formule ψ u teoriji T, φ dokazujemo da $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$.

Neka je dokaz dužine 1. Tada je formula ψ ili jednaka formuli φ, ili pripada teoriji T, ili je instanca neke od shema `S1`, `S2` i `S3`. Slučaj kada su formule ψ i φ jednake je već obrađen u primeru A.1.6, pa prelazimo na preostala dva slučaja. Tada $T \vdash \psi$, a kako $T \vdash \psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$, po zadatku A.1.8 imamo da $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$.

Neka je dokaz formule ψ u teoriji T, φ oblika

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_n \Rightarrow \psi, \psi.$$

i neka tvrđenje važi za sva formule sa kraćim dokazom. Po induktivnoj hipotezi imamo da

$$T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi_n \ \text{ i } \ T \vdash \varphi \Rightarrow (\varphi_n \Rightarrow \psi).$$

Kako

$$T \vdash (\varphi \Rightarrow (\varphi_n \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \varphi_n) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)),$$

dvostrukom primenom zadatka A.1.8 dobijamo da $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$. □

Način korišćenja prethodne leme ilustrujmo sledećim primerom:

	$\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$	
akko	$\varphi \Rightarrow \psi \vdash \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$	lema A.1.13(3)
akko	$\varphi \Rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$	lema A.1.13(3)
akko	$\neg\neg\varphi, \neg\psi \vdash \varphi$ i $\neg\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg\psi$	lema A.1.13(8)
akko	$\varphi, \neg\psi \vdash \varphi$ i $\varphi, \neg\psi \vdash \neg\psi$	lema A.1.13(6)

Kako po lemi A.1.13(1) važi $\varphi, \neg\psi \vdash \varphi$ i $\varphi, \neg\psi \vdash \neg\psi$, na osnovu prethodnog mora biti i

$$\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi).$$

A.1.14 Lema *Neka su* $p_1, \dots, p_n, q$ *proizvoljna iskazna slova,* $a_1, \dots, a_n, b \in \{0, 1\}$, $p^0 = \neg p$ *i* $p^1 = p$. *Tada*

$$p_1^{a_1}, \dots, p_n^{a_n} \vdash q^b$$

akko važi jedan od sledeća dva slučaja:

(1) $q^b = p_k^{a_k}$ *za neko* $k \in \{1, \dots, n\}$;

(2) postoje $i, j \in \{1, \dots, n\}$ *tako da je* $p_i^{a_i} = \neg p_j^{a_j}$.

Tvrđenje važi i ako $\vdash$ *zamenimo sa* $\models$.

Dokaz Ako važi (1) ili (2), onda definitivno važi i $p_1^{a_1}, \dots, p_n^{a_n} \vdash q^b$. Stoga pretpostavimo da

$$p_1^{a_1}, \dots, p_n^{a_n} \vdash q^b$$

i da ne važi (2). Tvrdimo da tada važi (1). Zaista, u suprotnom bi bilo koja valuacija μ takva da je $\mu(p_i) = a_i$ i $\mu(q) = 1 - b$ imala sledeća svojstva:

- $\mu \models p_1^{a_1} \wedge \dots \wedge p_n^{a_n}$;
- $\mu \models \neg q^b$.

Po teoremi saglasnosti (zadatak A.1.10) sledi da

$$p_1^{a_1}, \dots, p_n^{a_n} \not\vdash q^b,$$

sto je u kontradikciji sa $p_1^{a_1}, \dots, p_n^{a_n} \vdash q^b$. □

Dokaz male teoreme potpunosti

Neka je φ proizvoljna iskazna formula. Primenom stavki (i_1), ..., (i_m) leme A.1.13 dobijamo da $\vdash \varphi$ akko

$$p_{11}^{a_{11}}, \ldots, p_{1n_1}^{a_{1n_1}} \vdash q_1^{b^1} \text{ i } \ldots \text{ i } p_{k1}^{a_{k1}}, \ldots, p_{kn_k}^{a_{kn_k}} \vdash q_k^{b^k}.$$

Na osnovu leme A.1.14 imamo da je prethodno ekvivalentno sa

$$p_{11}^{a_{11}}, \ldots, p_{1n_1}^{a_{1n_1}} \models q_1^{b^1} \text{ i } \ldots \text{ i } p_{k1}^{a_{k1}}, \ldots, p_{kn_k}^{a_{kn_k}} \models q_k^{b^k},$$

što je, primenom stavki $(i_m), \ldots, (i_1)$ leme A.1.12 ekvivalentno sa $\models \varphi$. Ovim je teorema dokazana u potpunosti. □

Kao što smo na primeru iskaznog računa videli, pitanje

“da li je formula φ teorema teorije T”

pokušavamo da rešimo nekakvom vrstom semanitčke potpunosti. U slučaju iskaznog računa imamo tzv. *jaku potpunost*:

$$T \vdash \varphi \quad \text{akko} \quad T \models \varphi.$$

O ovom rezultatu i njegovoj vezi sa predikatskim računom prvog reda će biti više reči nešto kasnije.

A.2 Predikatski račun prvog reda

Jezik $\mathcal{L}$ prvog reda (ili relacijsko operacijski jezik) je skup simbola koji pored logičkih simbola $(\neg, \Rightarrow, \forall, =)$, interpunkcijskih znakova i prebrojivog skupa promenljivih $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ eventualno sadrži i simbole konstanti, relacijske simbole i funkcijske simbole. Uz svaki relacijski i funkcijski znak koji se nalazi u jeziku $\mathcal{L}$ data je i njegova arnost, odnosno broj argumentnih mesta. S obzirom da svaki jezik prvog reda sadrži logički deo, njega nećemo eksplicitno navoditi. Tako na primer, ako kažemo da $\mathcal{L}$ sadrži samo jedan simbol konstante c, to zapravo znači da je to jedini ne-logički simbol jezika $\mathcal{L}$.

Kako bi čitanje bilo nedvosmisleno, pomenute grupe simbola su međusobno disjunktne i nijedan simbol nije pravi početni komad ma kog drugog simbola.

A.2.1 Primer Jezik Peanove aritmetike $\mathcal{L}_{PA}$ sastoji se od dva binarna funkcijska simbola $+$ i $\cdot$, jednog unarnog funkcijskog simbola $'$ i jednog simbola konstante $\mathtt{0}$.

A.2.2 Primer Jezik teorije skupova $\mathcal{L}_{ZFC}$ sastoji se od jednog binarnog relacijskog simbola $\in$.

Terme (izraze) jezika $\mathcal{L}$ rekurzivno definišemo na sledeći način:

- Promenljive i simboli konstanti su termi jezika $\mathcal{L}$;
- Za proizvoljan funkcijski znak F jezika $\mathcal{L}$ i proizvoljne terme $t_1, \ldots, t_n$ jezika $\mathcal{L}$ zapis

$$F(t_1, \ldots, t_n)$$

  takođe je term jezika $\mathcal{L}$;
- Svaki term jezika $\mathcal{L}$ se može dobiti isključivo konačnom primenom prethodne dve stavke.

Složenost terma je po definiciji broj (računajući višestrukost) funkcijskih znakova koji se javljaju u njemu.

Ako je F binarni funkcijski znak, onda umesto $F(t_1, t_2)$ pišemo uobičajeno $t_1\, F\, t_2$.

Formule jezika $\mathcal{L}$ rekurzivno uvodimo na sledeći način:

- Za proizvoljna dva terma t_1 i t_2 jezika $\mathcal{L}$ zapis

$$(t_1 = t_2)$$

  je formula jezika $\mathcal{L}$;

- Za proizvoljan relacijski znak R arnosti n jezika $\mathcal{L}$ i ma koje terme $t_1, \ldots, t_n$ jezika $\mathcal{L}$, zapis
$$(R(t_1, \ldots, t_n))$$
je formula jezika $\mathcal{L}$;

- Neka su φ i ψ proizvoljne formule jezika $\mathcal{L}$ i neka je x proizvoljna promenljiva. Tada je svaki od zapisa
$$\neg\varphi \qquad (\varphi \Rightarrow \psi) \qquad \forall x\varphi$$
formula jezika $\mathcal{L}$;

- Formule jezika $\mathcal{L}$ se mogu dobiti isključivo konačnom primenom prethodnih stavki.

Radi preglednijeg zapisa, podrazumevamo uobičajenu konvenciju o brisanju zagrada i prioritetu logičkih veznika: najviši prioritet ima negacija, zatim univerzalni kvantor i na kraju implikacija.

Ostale logičke veznike uvodimo na isti način kao i u iskaznom računu. Dodatak je egzistencijalni kvantor, koji formalno uvodimo na sledeći način:
$$\exists x\varphi \text{ je formula } \neg\forall x\neg\varphi.$$
Ako je R binarni relacijski znak, onda umesto $R(t_1, t_2)$ pišemo uobičajeno $t_1 \, R \, t_2$.

Složenost formule je broj logičkih veznika i kvantora, (računajući višestrukost) koji se javljaju u njoj. Posebno, formule složenosti 0 zovemo i *atomičnim formulama.*

Za promenljivu x koja se javlja u formuli φ kažemo da je *vezana* ukoliko je svako njeno javljanje pod dejstvom nekog kvantora. U suprotnom kažemo da je promenljiva x *slobodna* u formuli φ. Formule koje nemaju slobodne promenljive zovemo *rečenicama.*

A.2.3 Primer Neka je x proizvoljna promenljiva. U formuli
$$\forall x(x = x) \Rightarrow x = x$$

promenljiva x je slobodna, jer njeno javljanje u potformuli sa desne strane nije pod dejstvom kvantora.

Sa $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ćemo označavati činjenicu da su sve slobodne promenljive formule φ neke od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$. Dalje, sa

$$\varphi_t^x$$

označavaćemo formulu koja nastaje iz formule φ zamenom svih slobodnih javljanja promenljive x termom t. Pritom kažemo da je zamena *regularna* ako se ni jedna promenljiva koja se javlja u termu t ne javlja u formuli φ.

Aksiome predikatskog računa delimo u nekoliko grupa:

Iskazne aksiome: Supstitucione instance tautologija;

Aksiome jednakosti: Ovu grupu aksioma čine sledeće sheme:

- Za proizvoljne promenljive x, y i z formule

  $$\begin{array}{l} \forall x(x = x) \\ \forall x \forall y(x = y \Rightarrow y = x) \\ \forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z) \end{array}$$

  su aksiome;

- Neka su x i y proizvoljne promenljive i neka je φ formula u kojoj je promenljiva x slobodna i u kojoj se promenljiva y ne javlja. Tada je formula

  $$(x = y) \Rightarrow (\varphi(\ldots, x, \ldots) \Rightarrow \varphi(\ldots, y, \ldots)),$$

  aksioma, pri čemu formula $\varphi(\ldots, y, \ldots)$ nastaje iz formule φ zamenom nekih slobodnih javljanja promenljive x promenljivom y.

Aksiome kvantora: Ovu grupu aksioma čine sledeće dve sheme:

- Neka je x promenljiva, φ formula jezika $\mathcal{L}$ i neka je t term jezika $\mathcal{L}$ takav da je zamena u φ_t^x regularna. Tada je formula
$$\forall x\varphi \Rightarrow \varphi_t^x$$
aksioma;

- Neka se promenljiva x ne javlja slobodno u formuli ψ. Tada je formula
$$\forall x(\psi \Rightarrow \varphi) \Leftrightarrow (\psi \Rightarrow \forall x\varphi)$$
aksioma.

Pored modus ponensa, predikatski račun ima još jedno pravilo izvođenja, koje zovemo pravilom generalizacije:

$$\frac{\psi \Rightarrow \varphi}{\psi \Rightarrow \forall x\varphi} \quad \texttt{GEN} \ ,$$

pri čemu se promenljiva x ne javlja slobodno u formuli ψ.

A.2.4 Definicija Hijerarhiju formula rekurzivno definišemo na sledeći način:

- Skupove $\Sigma_0 = \Pi_0$ čine formule bez kvantora;
- Skup Σ_{n+1}-formula čine formule koje nastaju dodavanjem bloka egzistencijalnih kvantora na Π_n-formule;
- Skup Π_{n+1}-formula čine formule koje nastaju dodavanjem bloka univerzalnih kvantora na Σ_n formule.

Osnovne stavove o formalnom dokazivanju u predikatskom računu navodimo bez dokaza. Prethodno napomenimo da skupove rečenica u predikatskom računu zovemo i *teorijama*.

A.2.5 Lema o novoj konstanti *Neka je φ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}$, T teorija jezika $\mathcal{L}$ i neka je c nov simbol konstante. Tada*

$$T \vdash \forall x\varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad T \vdash \varphi_c^x.$$

A.2.6 Pravilo c *Neka jezik* $\mathcal{L}^*$ *nastaje proširenjem jezika* $\mathcal{L}$ *novim simbolom konstante* c *i neka je* $\varphi(x)$ *proizvoljna formula jezika* $\mathcal{L}$. *Tada su teorije* T *i* $T \cup \{\exists x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)\}$ *ekvikonsistentne.*

A.2.7 Preneksna normalna forma *Neka je* φ *proizvoljna formula jezika* $\mathcal{L}$. *Tada postoje prirodan broj* n *i* Σ_n *ili* Π_n *formula* ψ *tako da*

$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi.$$

A.2.8 Teorema dedukcije, proširena varijanta

Neka je T *proizvoljna teorija jezika* $\mathcal{L}$ *i neka su* φ, ψ *i* θ *proizvoljne formule jezika* $\mathcal{L}$. *Tada važi:*

1. $T, \varphi \vdash \varphi$;
2. $T, \varphi, \neg\varphi \vdash \psi$;
3. *(teorema dedukcije) Ako je* φ *rečenica, onda* $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$ *ako i samo ako* $T, \varphi \vdash \psi$;
4. $T \vdash \neg\neg\varphi$ *ako i samo ako* $T \vdash \varphi$;
5. $T \vdash \neg(\varphi \Rightarrow \psi)$ *ako i samo ako* $T \vdash \varphi$ *i* $T \vdash \neg\psi$;
6. $T, \neg\neg\varphi \vdash \psi$ *ako i samo ako* $T, \varphi \vdash \psi$;
7. $T, \neg(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash \theta$ *ako i samo ako* $T, \varphi, \neg\psi \vdash \theta$;
8. *Ako su* φ, ψ *i* θ *rečenice, onda* $T, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \theta$ *ako i samo ako* $T, \neg\theta \vdash \varphi$ *i* $T, \neg\theta \vdash \neg\psi$;
9. *Ako* $T \vdash \varphi$ *i* $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$, *onda* $T \vdash \psi$;
10. $T \vdash \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$ *ako i samo ako* $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$.

Napomenimo da treća stavka prethodne teoreme ne mora da važi ukoliko φ nije rečenica. Primera radi, neka je $\mathcal{L} = \{c, d\}$ pri čemu su c i d simboli konstanti i neka su x i y različite promenljive. Tada

$$\neg(c = d), x = c \vdash y = c,$$

ali $\neg(c = d) \nvdash x = c \Rightarrow y = c$.

A.2.9 Definicija Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$. Za teoriju T kažemo da je:

- *Neprotivrečna*, ako postoji formula φ jezika $\mathcal{L}$ takva da $T \not\vdash \varphi$;
- *Kompletna*, ako za svaku rečenicu φ jezika $\mathcal{L}$ važi da $T \vdash \varphi$ ili $T \vdash \neg\varphi$.

A.3 Primeri teorija prvog reda

U ovoj sekciji ćemo ukratko prikazati sledeće teorije prvog reda:

1. ZFC (Zermelo-Fraenkelova teorija skupova sa aksiomom izbora);
2. PA (Peanova aritmetika);
3. BA (teorija Booleovih algebri).

1 ZFC je formalna teorija u predikatskom računu prvog reda koja od nelogičkih simbola ima jedan binarni relacijski znak $\in$. Ona se sastoji od osam aksioma i dve sheme, svaka sa prebrojivo mnogo instanci. Prvo ćemo navesti aksiome, a zatim i sheme. Radi preglednosti, početni blok univerzalnih kvantora ćemo izostaviti.

Aksiome

1. $x = y \Leftrightarrow \forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y)$
2. $\exists x \forall y \neg(y \in x)$
3. $\exists z \forall u(u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$
4. $\exists y \forall z(z \in y \Leftrightarrow \exists u(u \in x \wedge z \in u))$
5. $\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2(x_2 \in x_1 \Leftrightarrow \forall x_3(x_3 \in x_2 \Rightarrow x_3 \in x_0))$
6. $\exists x_0(0 \in x_0 \wedge (\forall x_1 \in x_0)(x_1 \cup \{x_1\} \in x_0))$, pri čemu:

- $0 \in x_0$ je formula $\exists x_2(x_2 \in x_0 \wedge \forall x_3 \neg(x_3 \in x_2))$;
- $x_1 \cup \{x_1\} \in x_0$ je formula

$$\exists x_2(x_2 \in x_0 \wedge \forall x_3(x_3 \in x_0 \Leftrightarrow (x_3 \in x_1 \vee x_3 = x_1)));$$

- $(\forall x \in y)\varphi$ je formula $\forall x(x \in y \Rightarrow \varphi)$.

7. $(\forall x_0 \neq 0)(\exists x_1 \in x_0)(x_0 \cap x_1 = 0)$, pri čemu:

- $x \notin y$ je formula $\neg(x \in y)$;
- $x = 0$ je formula $\forall y(y \notin x)$;
- $x \neq 0$ je formula $\exists y(y \in x)$;
- $(\exists x \in y)\varphi$ je formula $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$;
- $x \cap y = 0$ je formula

$$\forall z((z \in x \Rightarrow z \notin y) \wedge (z \in y \Rightarrow z \notin x)).$$

8. $\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2(x_2 \in x_0 \wedge \exists x_3(x_3 \in x_2) \Rightarrow \exists_1 x_4(x_4 \in x_2 \wedge x_4 \in x_0))$, pri čemu je $\exists_1 x\varphi(x)$ skraćeni zapis formule $\exists x(\varphi(x) \wedge \forall y(\varphi(y) \Rightarrow x = y))$.

Aksiome 1-8 redom zovemo i aksiomom ekstenzionalnosti, aksiomom praznog skupa, aksiomom para, aksiomom unije, aksiomom partitivnog skupa, aksiomom beskonačnosti, aksiomom regularnosti i aksiomom izbora.

Shema separacije

Neka je φ formula ZFC teorije skupova u kojoj se promenljiva x_2 javlja slobodno i u kojoj promenljiva x_1 nema slobodnih javljanja. Tada je univerzalno zatvorenje formule

$$\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2(x_2 \in x_1 \Leftrightarrow x_2 \in x_0 \wedge \varphi)$$

instanca sheme separacije.

Shema zamene

Neka je φ formula ZFC teorije skupova u kojoj se promenljive x_2 i x_3 javljaju slobodno i u kojoj promenljiva x_1 nema slobodnih javljanja. Tada je univerzalno zatvorenje formule

$$\forall x_0(\forall x_2(x_2 \in x_0 \Rightarrow \exists_1 x_3 \varphi) \Rightarrow \exists x_1 \forall x_3(x_3 \in x_1 \Leftrightarrow \exists x_2(x_2 \in x_0 \wedge \varphi)))$$

instanca sheme zamene.

2 PA je teorija prvog reda na jeziku $\mathcal{L}_{PA}$ koji se sastoji od dva binarna funkcijska znaka $+$ i $\cdot$, jednog unarnog funkcijskog znaka $'$ i jednog simbola konstante $\mathsf{0}$. Teoriju PA čini šest aksioma i jedna shema (shema indukcije) sa prebrojivo mnogo instanci. Navedimo aksiome i shemu indukcije:

Aksiome

1. $\forall x(x \neq \mathsf{0})$;
2. $\forall x \forall y(x' = y' \Rightarrow x = y)$;
3. $\forall x(x + \mathsf{0} = x)$;
4. $\forall x \forall y(x + y' = (x + y)')$;
5. $\forall x(x \cdot \mathsf{0} = \mathsf{0})$;
6. $\forall x \forall y(x \cdot y' = x + (x \cdot y))$.

Shema indukcije

Neka je $\varphi(x, \bar{y})$ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}_{PA}$. Tada je univerzalno zatvorenje formule

$$(\varphi(\mathsf{0}, y) \wedge \forall x(\varphi(x, \bar{y}) \Rightarrow \varphi(x', \bar{y})) \Rightarrow \forall x \varphi(x, \bar{y})$$

instanca sheme indukcije.

3 BA je teorija prvog reda na jeziku $\mathcal{L}_{BA}$ koji se sastoji od dva binarna funkcijska simbola $\vee$ i $\wedge$, jednog unarnog funkcijskog simbola

^{c}, jednog binarnog relacijskog znaka $\leqslant$ i dva simbola konstanti $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$. Univerzalna zatvorenja sledećih jedanaest formula su aksiome teorije BA:

1. $x \vee y = y \vee x$;
2. $x \wedge y = y \wedge x$
3. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;
4. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
5. $x \wedge (x \vee y) = x$;
6. $x \vee (x \wedge y) = x$;
7. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
8. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
9. $x \vee x^c = \mathbf{1}$;
10. $x \wedge x^c = \mathbf{0}$;
11. $x \leqslant y \Leftrightarrow x \wedge y = x$.

A.4 Modeli - relacija zadovoljenja

Neka je $\mathcal{L}$ jezik prvog reda i neka je M neprazan skup. Preslikavanje $\mathcal{I}$ sa domenom $\mathcal{L}$ je *interpretacija* jezika $\mathcal{L}$ u skupu M ako važi:

- Za svaki simbol konstante c imamo da $\mathcal{I}(c) \in M$;
- Za svaki funkcijski znak F arnosti n je $\mathcal{I}(F)$ funkcija sa domenom M^n i kodomenom M;
- Za svaki relacijski znak R arnosti n je $\mathcal{I}(R)$ podskup skupa M^n.

Model jezika $\mathcal{L}$ je par $\langle M, \mathcal{I} \rangle$, pri čemu je M neprazan skup a $\mathcal{I}$ je interpretacija jezika $\mathcal{L}$ u skupu M. Ako je jezik $\mathcal{L}$ konačan, onda eksplicitno navodimo interpretacije svih simbola.

Ako je $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ model jezika $\mathcal{L}$, onda interpretaciju proizvoljnog simbola s jezika $\mathcal{L}$ često označavamo sa

$$s^{\mathcal{M}}.$$

A.4.1 Primer Model jezika teorije skupova je par oblika $\langle M, E \rangle$, pri čemu je M neprazan skup a E je binarna relacija na skupu M.

Neka je $\mathcal{L}$ jezim prvog reda, t term jezika $\mathcal{L}$, n broj promenljivih koje se javljaju u termu t i neka je $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ proizvoljan model jezika $\mathcal{L}$. Interpretacija terma t u modelu $\mathcal{M}$ je funkcija

$$t^{\mathcal{M}} : M^n \longrightarrow M$$

koju rekurzivno po složenosti definišemo na sledeći način:

- Ako je t simbol konstante c, onda je $n = 0$, pa uzimamo da je $t^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}}$;

- Ako je t promenljiva x, onda je $n = 1$, pa uzimamo da je $t^{\mathcal{M}} = id_M$, tj. za svako $a \in M$ po definiciji je $t^{\mathcal{M}}(a) = a$;

- Ako je t term $F(t_1, \ldots, t_m)$, onda uzimamo da je

$$t^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_m^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)).$$

Neka su $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ i $\mathcal{N} = \langle N, \ldots \rangle$ modeli istog jezika $\mathcal{L}$. Kažemo da je model $\mathcal{M}$ *podmodel* modela $\mathcal{N}$ ako važi:

- $M \subseteq N$;

- Za svaki simbol konstante c jezika $\mathcal{L}$ je $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$;

- Za svaki funkcijski znak F arnosti n jezika $\mathcal{L}$ i proizvoljne elemente $a_1, \dots a_n \in M$ je

$$F^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = F^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a^n);$$

- Za svaki relacijski znak R arnosti n jezika $\mathcal{L}$ i proizvoljne elemente $a_1, \dots a_n \in M$ imamo da

$$R^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) \quad \text{ako i samo ako} \quad R^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n).$$

Neka su $\mathcal{M} = \langle M, \dots \rangle$ i $\mathcal{N} = \langle N, \dots \rangle$ modeli istog jezika $\mathcal{L}$. Funkcija $f : M \longrightarrow N$ je *homomorfizam* ako važi:

- $f(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$;
- $f(F^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)) = F^{\mathcal{N}}(f(a_1), \dots, f(a_n))$;
- $R^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)$ ako i samo ako $R^{\mathcal{N}}(f(a_1), \dots, f(a_n))$.

Posebno, modeli $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su *izomorfni*, u oznaci $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$, ako postoji bijektivni homomorfizam između njih.

A.4.2 Definicija Neka je $\mathcal{M} = \langle M, \dots \rangle$ model jezika $\mathcal{L}$, $\varphi(\bar{x})$ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}$ i neka $a_1, \dots, a_n \in M$. Predikat

"u modelu $\mathcal{M}$ važi formula φ pri valuaciji $x_i \mapsto a_i$",

u oznaci $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}]$, definišemo rekurzivno po složenosti na sledeći način:

- Ako je φ formula $t_1 = t_2$, onda

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \text{ akko } t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a});$$

- Ako je φ formula $R(t_1, \dots, t_m)$, onda

$$\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}] \text{ akko važi } R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), \dots, t_m^{\mathcal{M}}(\bar{a}));$$

- Ako je φ formula $\neg\phi$, onda

$$\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}] \text{ akko nije } \mathcal{M} \models \phi[\bar{a}];$$

- Ako je φ formula $\phi \Rightarrow \psi$, onda

$$\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}] \text{ akko iz } \mathcal{M} \models \phi[\bar{a}] \text{ sledi da } \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}];$$

- Ako je φ formula $\exists y \phi(y, \bar{x})$, onda

$$\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}] \text{ akko za svako } b \in M,\ \mathcal{M} \models \phi[b, \bar{a}].$$

Iz prethodne definicije neposredno sledi da istinitosna vrednost formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ u modelu pri nekoj valuaciji promenljivih $x_1, \ldots, x_n$ zavisi samo od vrednosti koje dobiju slobodne promenljive. Ova primedba ima smisla pre svega zbog toga što $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ označava da su sve slobodne promenljive formule φ neke (ne obavezno sve) od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$.

A.4.3 Definicija Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ modeli istog jezika $\mathcal{L}$.

1. Modeli $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su *elementarno ekvivalentni*, u oznaci $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, ako za svaku rečenicu φ jezika $\mathcal{L}$ važi

$$\mathcal{M} \models \varphi \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathcal{N} \models \varphi;$$

2. Model $\mathcal{M}$ se *elementarno utapa* u model $\mathcal{N}$ ako postoji funkcija $j : M \longrightarrow N$ takva da za svaku formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jezika $\mathcal{L}$ i ma koje $a_1, \ldots, a_n \in M$ važi

$$\mathcal{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \text{akko} \quad \mathcal{N} \models \varphi[j(a_1), \ldots, j(a_n)];$$

3. Model $\mathcal{M}$ je *elementarni podmodel* modela $\mathcal{N}$, u oznaci $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, ukoliko je $\mathcal{M}$ podmodel modela $\mathcal{N}$ i ako je inkluzija $i : M \subseteq N$ $(i(a) = a)$ elementarno utapanje.

A.4.4 Zadatak Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ modeli istog jezika $\mathcal{L}$.

1. Ako se model $\mathcal{M}$ elementarno utapa u model $\mathcal{N}$, dokazati da je tada $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, tj. da su modeli $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ elementarno ekvivalentni;

2. Dokazati da polje racionalnih brojeva $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ nije elementarno ekvivalentno polju realnih brojeva $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$;

3. Dokazati da je $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ elementarni podmodel modela $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.

Uputstvo

Prvi deo zadatka sledi neposredno iz definicije elementarnog utapanja kada pređemo na rečenice. Što se tiče drugog dela zadatka, rečenica

$$\exists x (x \cdot x = 1 + 1)$$

nije tačna u polju racionalnih brojeva a jeste tačna u polju realnih brojeva, pa ova dva polja ne mogu biti elementarno ekvivalentna.

Treći deo zadatka je najteži. I $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ i $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ su modeli teorije gustih linearnih uređenja bez krajeva DLO koja ima sledeće aksiome:

- $\forall x \neg (x < x)$;
- $\forall x \forall y \forall z ((x < y \land y < z) \Rightarrow x < z)$;
- $\forall x \forall y (x = y \lor x < y \lor y < x)$;
- $\forall x \forall y (x < y \Rightarrow \exists z (x < z \land z < y))$;
- $\forall x \exists y \exists z (y < x \land x < z)$.

Uputstvo se sastoji u sledećem:

- Prvo pokazati da teorija DLO dopušta eliminaciju kvantora, tj. da za svaku formulu φ jezika $\mathcal{L}_{DLO} = \{<\}$ postoji formula ψ jezika $\mathcal{L}_{DLO}$ bez kvantora takva da

  $$DLO \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi.$$

  Detalji ovog dokaza se mogu naći u [2] u poglavlju o eliminaciji kvantora;

- Svaka formula φ jezika $\mathcal{L}_{DLO}$ bez kvantora je ekvivalentna formuli oblika
$$\bigvee_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{n}\varphi_{ij},$$
pri čemu je svaka od formula φ_{ij} ili atomična, ili negacija atomične. Kako
$$DLO \vdash x \neq y \Leftrightarrow (x < y \vee y < x)$$
i
$$DLO \vdash \neg(x < y) \Leftrightarrow (x = y \vee y < x),$$
svaka formula bez kvantora je oblika
$$\bigvee_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{n}\theta_{ij},$$
pri čemu je θ_{ij} ili oblika $x < y$, ili oblika $x = y$. Preostaje da se za ovakve formule proveri uslov iz definicije elementarnog podmodela. □

A.4.5 Definicija Za formulu φ jezika $\mathcal{L}$ kažemo da je *valjana* ukoliko je tačna u svim modelima jezika $\mathcal{L}$ pri svim valuacijama.

A.4.6 Definicija Za formulu φ kažemo da je *semantička posledica* teorije T, u oznaci $T \models \varphi$, ako je svaki model teorije T ujedno i model formule φ.

A.4.7 Zadatak Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$. Dokazati da za proizvoljnu formulu φ jezika $\mathcal{L}$ iz $T \vdash \varphi$ sledi $T \models \varphi$.

Uputstvo

Koristiti potpunu indukciju po dužini najkraćeg dokaza formule φ. □

Neka je $\mathcal{M} = \langle M, \ldots\rangle$ model jezika $\mathcal{L}$. *Elementarni dijagram* modela $\mathcal{M}$ je skup $Th(\mathcal{M})$ svih rečenica jezika $\mathcal{L}$ tačnih u modelu $\mathcal{M}$.

Neka je $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ model jezika $\mathcal{L}$, A neprazan podskup skupa M i neka je $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{c_a \mid a \in A\}$, pri čemu su c_a novi simboli konstanti. *Prosta ekspanzija* modela $\mathcal{M}$ u jezik $\mathcal{L}_A$ je model $\mathcal{M}_A$ jezika $\mathcal{L}_A$ koji se od modela $\mathcal{M}$ dobija tako što se svaki novi simbol konstante c_a interpretira kao a.

A.4.8 Zadatak Neka je $\mathcal{M}$ model jezika $\mathcal{L}$ i neka je $\mathcal{N}$ modeli jezika $\mathcal{L}_M$. Dokazati da se model $\mathcal{M}$ elementarno utapa u model $\mathcal{N} \restriction \mathcal{L}$ (restrikcija modela $\mathcal{N}$ na jezik $\mathcal{L}$) ako i samo ako $\mathcal{N} \models Th(\mathcal{M}_M)$.

A.5 Booleove algebre

Booleova algebra je ma koji model $\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, ^c, \leqslant, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ teorije BA. Radi pojednostavljenja notacije, sa $\mathcal{B}$ ćemo označavati i skup nosač B.

A.5.1 Primer Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna Booleova algebra. Lako se proverava da za proizvoljne $a, b, c \in \mathcal{B}$ važi:

- $\mathbf{0}^c = \mathbf{1}$;
- $\mathbf{1}^c = \mathbf{0}$;
- $(a^c)^c = a$;
- $(a \vee b)^c = a^c \wedge b^c$;
- $(a \wedge b)^c = a^c \vee b^c$;
- $a \wedge b = \mathbf{0} \Leftrightarrow b \leqslant a^c$;
- $a \leqslant a$;
- $(a \leqslant b \wedge b \leqslant a) \Rightarrow a = b$, pri čemu je u ovom kontekstu $\wedge$ logički veznik;

- $(a \leqslant b \wedge b \leqslant c) \Rightarrow a \leqslant c$;
- $a \wedge b = \inf_{\mathcal{B}}\{a, b\}$;
- $a \vee b = \sup_{\mathcal{B}}\{a, b\}$.

A.5.2 Primer Za proizvoljan skup X imamo da je

$$\langle P(X), \cap, \cup, ^c, \subseteq, 0, X\rangle$$

Booleova algebra. Posebno, $A^c = X \setminus A$.

A.5.3 Definicija Neka je X proizvoljan skup. Skup $A \subseteq P(X)$ je *algebra skupova* ako važi:

- $0 \in A \wedge X \in A$;
- $a \in A \Rightarrow X \setminus a \in A$;
- $(a \in A \wedge b \in A) \Rightarrow (a \cap b \in A \wedge a \cup b \in A)$.

A.5.4 Zadatak Dokazati da je svaka algebra skupova Booleova algebra.

Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna Booleova algebra. *Dualna algebra* Booleove algebre $\mathcal{B}$ je struktura

$$\mathcal{B}^* = \langle B, \vee, \wedge, ^c, \geqslant, \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle.$$

Sasvim lako se proverava da je preslikavanje

$$a \mapsto a^c$$

izomorfizam Booleovih algebri $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}^*$.

A.5.5 Zadatak Parcijalno uređenje $\langle M, \leqslant\rangle$ je *mreža* ako svaki dvočlani podskup $\{a, b\}$ skupa M ima infimum $a \wedge b$ i supremum $a \vee b$. Dokazati:

1. Ako za svako $a, b, c \in M$ važi $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, onda za svako $a, b, c \in M$ važi i $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

2. Ako za svako $a, b, c \in M$ važi $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, onda za svako $a, b, c \in M$ važi i $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

A.5.6 Algebra otvoreno zatvorenih skupova Neka je $\langle X, \tau_X \rangle$ topološki prostor i neka je $Clopen(X)$ familija svih otvoreno - zatvorenih skupova u X. Sasvim lako se proverava da je struktura

$$\langle Clopen(X), \cap, \cup, ^c, 0, X \rangle$$

Booleova algebra.

A.5.7 Algebra regularno otvorenih skupova

Neka je $\langle X, \tau_X \rangle$ topološki prostor. Kažemo da je otvoren skup A regularno otvoren ako je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = A$. Laganu vežbu predstavlja dokaz činjenice da je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))$ regularno otvoren za svaki otvoren skup A. Sa $r.o.X$ označimo familiju svih regularno otvorenih skupova u $\langle X, \tau_X \rangle$. Pokažimo da je $\langle r.o.X, \subseteq \rangle$ Booleova algebra.

1. $\inf_{\langle r.o.X, \subseteq \rangle} \{A, B\} = A \cap B$. Da bismo se uverili u ovo, dovoljno je da pokažemo da je skup $A \cap B$ regularno otvoren. S jedne strane, iz monotonosti operatora int i cl sledi

   $$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cap B)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = A \;\text{ i }\; \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cap B)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(B)),$$

   odakle dobijamo da je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cap B)) \subseteq A \cap B$. S druge strane, $A \cap B \subseteq \mathrm{cl}(A \cap B)$, odakle sledi da je

   $$A \cap B = \mathrm{int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cap B)),$$

   što zajedno sa prethodnim povlači regularnu otvorenost skupa

   $$A \cap B.$$

2. $\sup\limits_{\langle r.o.X, \subseteq\rangle} \{A, B\} = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup B))$. Zaista, s jedne strane, iz

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup B)) \\ B &= \mathrm{int}(\mathrm{cl}(B)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup B)) \end{aligned}$$

sledi da je skup $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup B))$ majoranta skupa $\{A, B\}$ u $r.o.X$. S druge strane, ako je regularno otvoren skup Z majoranta skupa $\{A, B\}$ u $r.o.X$, onda je i

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup B)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Z)) = Z,$$

odakle zajedno sa prethodnim sledi da je

$$\sup_{\langle r.o.X, \subseteq\rangle} \{A, B\} = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup B)).$$

3. 0 je minimum, a X je maksimum u $\langle r.o.X, \subseteq\rangle$. Primetimo da ovo neposredno sledi iz činjenice da su 0 i X regularno otvoreni u $\langle X, \tau_x\rangle$.

Ovim smo pokazali da je $\langle r.o.X, \subseteq\rangle$ mreža sa krajevima. U cilju dokaza distributivnosti, dovoljno je da proverimo da važi distributivnost jedna od distributivnosti (videti zadatak A.5.5). Lako se pokazuje da je

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup B)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup C)) \subseteq \mathrm{cl}((A \cup B) \cap (A \cup C)) = \mathrm{cl}(A \cup (B \cap C)),$$

a s obzirom da je skup $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup B)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup C))$ otvoren, on je i podskup skupa $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup (B \cap C)))$.

Obratna inkluzija trivijalno sledi iz činjenice da je $\langle r.o.X, \subseteq\rangle$ mreža, čime smo pokazali distributivnost.

Preostaje da pokažemo da je $A^c = \mathrm{int}(X \setminus A)$, tj. da je

$$A \cap \mathrm{int}(X \setminus A) = 0 \ \text{ i } \ \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup \mathrm{int}(X \setminus A))) = X.$$

Prva jednakost je trivijalno tačna, a druga neposredno sledi iz otvorenosti skupa X i činjenice da je

$$\mathrm{cl}(A \cup \mathrm{int}(X \setminus A)) = X.$$

A.5.8 Definicija Neka je $\mathcal{B}$ Booleova algebra. $D \subseteq \mathcal{B}$ je *filter* ako za svako $a, b \in \mathcal{B}$ važi:

- $\mathbf{0} \notin D$ i $\mathbf{1} \in D$;
- Ako $a, b \in D$, onda i $a \wedge b \in D$;
- Ako $a \in D$ i $a \leqslant b$, onda i $b \in D$.

Skup $I \subseteq \mathcal{B}$ je *ideal* ako je skup $I^* = \{a^c \mid a \in I\}$ filter. Pritom skup I^* zovemo i *dualnim filterom* ideala I. Slično, za proizvoljan filter D ćemo sa D^* označavati njegov dualni ideal. Za proizvoljan ideal I Booleove algebre $\mathcal{B}$ neka je

$$I^+ = \{a \in \mathcal{B} \mid a \notin I\}.$$

A.5.9 Primer Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna Booleova algebra i neka je $a > \mathbf{0}$. Tada je skup

$$D_a = \{b \in \mathcal{B} \mid a \leqslant b\}$$

filter Booleove algebre $\mathcal{B}$. D_a zovemo i *glavnim filterom* generisanim elementom a.

A.5.10 Frechetov filter

Neka je D familija svih kofinitnih podskupova skupa ω. Pošto je presek dva kofinitna skupa takođe kofinitan skup, da je nadskup kofinitnog skupa opet kofinitan i da 0 nije kofinitan, zaključujemo da je D filter Booleove algebre $\langle P(\omega), \subseteq \rangle$. Filter D zovemo i Frechetovim filterom.

Frechetov filter nije glavni filter, jer je

$$\bigcap D \subseteq \bigcap_{n<\omega} \omega \setminus n = 0.$$

A.5.11 Lindenbaumova algebra

Neka je $\mathbb{P}$ beskonačan skup iskaznih slova i neka je *Prop* odgovarajući skup iskaznih formula[2]. Dalje, neka je $\sim$ binarna relacija na

[2]Strogo formalno, *Prop* je skup kodova iskaznih formula.

Prop definisana sa $\varphi \sim \psi$ akko je iskazna formula $\varphi \Leftrightarrow \psi$ tautologija. Lako se proverava da je $\sim$ kongruencija na *Prop*, tj. da je relacija ekvivalencije kompatibilna sa $\neg$, $\wedge$, $\vee$ i $\Rightarrow$, pri čemu se kompatibilnost ogleda u sledećem:

- Ako je $\varphi \sim \psi$, onda je i $\neg\varphi \sim \neg\psi$;
- Ako je $\varphi_1 \sim \varphi_2$ i $\psi_1 \sim \psi_2$, onda je i $\varphi_1 \wedge \psi_1 \sim \varphi_2 \wedge \psi_2$, $\varphi_1 \vee \psi_1 \sim \varphi_2 \vee \psi_2$ i $\varphi_1 \Rightarrow \psi_1 \sim \varphi_2 \Rightarrow \psi_2$.

Na osnovu prethodnog, strukturu Booleove algebre na količničkom skupu $\mathcal{B}(\mathbb{P}) = Prop_{/\sim}$ korektno definišemo na sledeći način:

- $\mathbf{0} = [\bot]$;
- $\mathbf{1} = [\top]$;
- $[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$;
- $[\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \vee \psi]$;
- $[\varphi]^c = [\neg\varphi]$;
- $[\varphi] \leqslant [\psi] \Leftrightarrow \models \varphi \Rightarrow \psi$.

Samu algebru $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ zovemo i Lindenbaumovom algebrom iskaznog računa nad skupom iskaznih slova $\mathbb{P}$.

A.5.12 Lindenbaumova algebra teorije T

Neka je T neprotivrečna teorija jezika $\mathcal{L}$. Na skupu $For\mathcal{L}$ formula jezika $\mathcal{L}$ definišimo binarnu relaciju $\sim$ na sledeći način:

$$\varphi \sim \psi \quad \text{ako i samo ako} \quad T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi.$$

Sasvim slično kao i u prethodnom primeru, neka je

$$\mathcal{B}(T) = For\mathcal{L}_{/\sim}$$

i neka je Booleova struktura uvedena na isti način kao i u prethodnom primeru. Rezultujuću Booleovu algebru $\mathcal{B}(T)$ zovemo i Lindenbaumovom algebrom teorije T. Posebno, ako je T prazan skup, onda dobijamo Lindenbaumovu algebru jezika $\mathcal{L}$.

A.5.13 Primer Neka je $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ Lindenbaumova algebra, T neprotivrečna iskazna teorija i neka je

$$D = \{[\varphi] \in \mathcal{B}(\mathbb{P}) \mid T \vdash \varphi\}.$$

Lako se proverava da je D filter Lindenbaumove algebre.

U slučaju Booleovih algebri imamo finu Galoisovu korespodenciju između filtera i homomorfizama, a iz algebre znamo da takva korespodencija postoji između homomorfizama i kongruencija.

S jedne strane, ako je $h : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_1$ homomorfizam Booleovih algebri $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}_1$, onda je

$$D_h = \{a \in \mathcal{B} \mid h(a) = \mathbf{1}\}$$

filter u $\mathcal{B}$. Pokažimo ovo. Prvo, iz $h(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ sledi da $\mathbf{1} \in D_h$. Drugo, ako $a, b \in D_h$, onda je $h(a) = \mathbf{1}$ i $h(b) = \mathbf{1}$, a kako je

$$h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b),$$

imamo da je $h(a \wedge b) = \mathbf{1}$, pa $a \wedge b \in D_h$. Konačno, ako $a \in D_h$ i ako je $a \vee b = b$, onda je

$$h(b) = h(a \vee b) = h(a) \vee h(b) = \mathbf{1} \vee b = \mathbf{1},$$

pa i $b \in D_h$.

S druge strane, za proizvoljan filter D Booleove algebre $\mathcal{B}$ je sa

$$a \sim_D b \Leftrightarrow (\exists d \in D)(a \wedge d = b \wedge d)$$

dobro definisana jedna kongruencija algebre $\mathcal{B}$. Količnički homomorfizam $h_D : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_D$ definišemo sa

$$h(a) = a_D = \{b \in B \mid a \sim_D b\}.$$

A.5.14 Definicija Neka je $\mathcal{B}$ Booleova algebra i neka je skup $X \subseteq \mathcal{B}$ neprazan. Kažemo da skup X ima *svojstvo konačnog preseka* ako infimum svakog nepraznog konačnog podskupa A skupa X nije jednak $\mathbf{0}$.

Termin *konačan presek* dolazi otuda što je

$$\inf_{\langle P(X), \subseteq\rangle} \{A_1, \ldots, A_n\} = A_1 \cap \cdots \cap A_n.$$

Izraze oblika $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$ ćemo zvati konačnim presecima.

A.5.15 Primer Neka je X skup sa svojstvom konačnog preseka u Booleovoj algebri $\mathcal{B}$ i neka je D skup svih onih elemenata b skupa $\mathcal{B}$ za koje postoji konačan neprazan $A \subseteq X$ takav da je

$$\inf_{\mathcal{B}} A \leqslant b.$$

Lako se pokazuje da je D filter Booleove algebre $\mathcal{B}$. Za filter D kažemo i da je generisan skupom X.

A.5.16 Lema *Neka je $\mathcal{B}$ Booleova algebra i neka je D njen proizvoljan filter. Tada za svaki element a skupa B bar jedan od skupova $D \cup \{a\}$ i $D \cup \{a^c\}$ ima svojstvo konačnog preseka.*

Dokaz

Pretpostavimo suprotno, neka postoje $d_1, d_2 \in D$ takvi da je

$$a \wedge d_1 = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad a^c \wedge d_2 = \mathbf{0}.$$

Tada iz prve jednakosti sledi da je $d_1 \leqslant a^c$, a iz druge sledi da je $d_2 \leqslant (a^c)^c = a$. Sada je $d_1 \wedge d_2 = \mathbf{0}$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je D filter. $\square$

A.5.17 Definicija Kažemo da je filter D Booleove algebre $\mathcal{B}$ *ultrafilter* ako je maksimalan u smislu inkluzije.

Ako je D ultrafilter Booleove algebre $\mathcal{B}$, onda je količnicka algebra B_D izomorfna iskaznoj algebri. Navedimo još jednu važnu Galoisovu korespodenciju, ovoga puta između ultrafiltera u Lindenbaumovim algebrama i kompletnih neprotivrečnih teorija prvog reda.

S jedne strane, ako je T kompletna i neprotivrečna teorija jezika $\mathcal{L}$, onda je

$$D_T = \{[\varphi] \mid T \vdash \varphi\}$$

ultrafilter Lindenbaumove algebre $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ jezika $\mathcal{L}$. S druge strane, ako je D ultrafilter u $\mathcal{B}(\mathcal{L})$, onda je

$$T_D = \{\varphi \mid [\varphi] \in D\}$$

kompletna i neprotivrečna teorija jezika $\mathcal{L}$. Korektnost uspostavljene korespodencije se sasvim lako proverava, te je ostavljamo za vežbu.

A.5.18 Teorema *Neka je D filter Booleove algebre $\mathcal{B}$. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. *D je ultrafilter;*
2. $(\forall a \in \mathcal{B})(a \in D \ \lor a^c \in D)$;
3. $(\forall a, b \in \mathcal{B})(a \lor b \in D \Rightarrow a \in D \ \lor \ b \in D)$.

Dokaz

1 ⇒ 2 Neka je $a \in \mathcal{B}$ proizvoljno. Na osnovu leme A.5.16 bar jedan od skupova $D \cup \{a\}$ i $D \cup \{a^c\}$ ima svojstvo konačnog preseka. Pošto je svaki skup sa svojstvom konačnog preseka sadržan u nekom filteru (posmatramo sve elemente koji su veći od nekog konačnog preseka) i da je D ultrafilter, imamo da $a \in D$ ili $a^c \in D$.

2 ⇒ 3 Neka $a \lor b \in D$ i $a \notin D$. Tada po 2 imamo da $a^c \in D$, odakle sledi da $a^c \land (a \lor b) = a^c \land b \in D$. Kako je $a^c \land b \leqslant b$ i kako je D filter, mora biti i $b \in D$.

3 ⇒ 1 Neka $a \notin D$. S obzirom da $\mathbf{1} \in D$ i da je $\mathbf{1} = a \lor a^c$, po 3 sledi da $a^c \in D$. Odavde sledi da skup $D \cup \{a\}$ nema svojstvo konačnog preseka. Drugim rečima, D je inkluzijski maksimalan filter, tj. ultrafilter. □

A.5.19 Teorema o ultrafilteru
Svaki filter Booleove algebre $\mathcal{B}$ se može proširiti do ultrafiltera.

Dokaz
Neka je D proizvoljan filter Booleove algebre $\mathcal{B}$ i neka je F familija svih filtera Booleove algebre $\mathcal{B}$ koji su nadskupovi filtera D. Primetimo da je $F \neq 0$ jer $D \in F$. Lako se proverava da svaki lanac u parcijalnom uređenju $\langle F, \subseteq \rangle$ ima majorantu (unija po lancu), pa po Zornovoj lemi $\langle F, \subseteq \rangle$ ima maksimalni element, koji je zapravo traženi ultrafilter. $\square$

A.5.20 Lindenbaumova teorema
Svaka neprotivrečna teorija T jezika $\mathcal{L}$ se može proširiti do kompletne i neprotivrečne teorije jezika $\mathcal{L}$.

Dokaz
U ovom dokazu Lindenbaumove teoreme iskoristitićemo prethodno dokazanu teoremu o ultrafilteru. Dakle, neka je $\mathcal{B}(T)$ Lindenbaumova algebra teorije T. Tada skup

$$\{[\varphi] \mid \varphi \in T\}$$

ima svojstov konačnog preseka, pa je sadržan u nekom ultrafilteru D Lindenbaumove algebre $\mathcal{B}(T)$. Sada je

$$T_D = \{\varphi \mid [\varphi] \in D\}$$

kompletna i neprotivrečna teorija jezika $\mathcal{L}$ koja proširuje teoriju T. $\square$

A.5.21 Zadatak Dati direktan dokaz Lindenbaumove teoreme u slučaju kada je $\mathcal{L}$ najviše prebrojiv. Pomoću aksiome izbora uopštiti ovaj dokaz na slučaj jezika proizvoljno velike kardinalnosti.

Uputstvo

Kako je $\mathcal{L}$ najviše prebrojiv, to formula jezika $\mathcal{L}$ ima prebrojivo mnogo. Određenosti radi, neka je

$$For\mathcal{L} = \{\varphi_n \mid n \in \omega\}$$

(ω je prvi beskonačan ordinal - poistovećujemo ga sa skupom prirodnih brojeva $\mathbb{N}$). Rekurzivno definišemo niz teorija $\langle T_n \mid n \in \omega \rangle$ na sledeći način:

- $T_0 = T$;
- $T_{n+1} = \begin{cases} T_n \cup \{\varphi_n\} & , \ T_n, \varphi_n \nvdash \bot \\ T_n \cup \{\neg\varphi_n\} & , \ T_n, \varphi_n \vdash \bot \end{cases}$.

Pokazati da je teorija $T^* = \bigcup\limits_{n \in \omega} T_n$ kompletno i neprotivrečno proširenje teorije T.

Ako je $|\mathcal{L}| = \kappa > \omega$, onda je

$$For\mathcal{L} = \{\ \varphi_\xi \mid \xi < \kappa\},$$

pa se konstrukcija kompletnog i neprotivrečnog proširenja T^* date teorije T vrši na sledeći način:

- $T_0 = T$;
- $T_{\xi+1} = \begin{cases} T_\xi \cup \{\varphi_\xi\} & , \ T_\xi, \varphi_\xi \nvdash \bot \\ T_\xi \cup \{\neg\varphi_\xi\} & , \ T_\xi, \varphi_\xi \vdash \bot \end{cases}$;
- $T_\alpha = \bigcup\limits_{\xi \in \alpha} T_\xi$, u slučaju graničnog $\alpha > 0$;
- $T^* = \bigcup\limits_{\xi \in \kappa} T_\xi$.

$\square$

A.5.22 Zadatak Neka su $F(\bar{x})$ i $G(\bar{x})$ proizvoljni termi jezika $\mathcal{L}_{BA}$. Dokazati da Booleovski identitet

$$\forall \bar{x}(F(\bar{x}) = G(\bar{x}))$$

važi u svim Booleovim algebrama ako i samo ako važi u iskaznoj algebri. Drugim rečima, Booleovski identiteti nisu ništa drugo do tautologije.

Uputstvo

Pretpostavimo da Booleovski identitet

$$\forall \bar{x}(F(\bar{x}) = G(\bar{x}))$$

ne važi u nekoj Booleovoj algebri $\mathcal{B}$, tj. da postoje $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{B}$ takvi da je

$$F^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n) \neq G^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n).$$

Tada postoji ultrafilter D u $\mathcal{B}$ takav da

$$F^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n) \in D \text{ i } G^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n) \notin D.$$

Odavde sledi da je

$$h_D(F^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n)) \neq h_D(G^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n)),$$

a kako je

$$h_D(F^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n)) = F^{\mathcal{B}_D}(h_D(a_1), \ldots, h_d(a_n))$$

(slično i za G) i kako je $\mathcal{B}_D$ iskazna algebra, imamo da ni u iskaznoj algebri ne važi pomenuti identitet. □

A.5.23 Definicija Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna Booleova algebra.

- Sa uf$(\mathcal{B})$ ćemo označavati familiju svih ultrafiltera Booleove algebre $\mathcal{B}$;
- Neka je $a \in \mathcal{B}$ proizvoljno. Sa a^* ćemo označavati familiju svih ultrafiltera Booleove algebre $\mathcal{B}$ koji sadrže a.

Neposredno se proverava da važi:

- $(a \wedge b)^* = a^* \cap b^*$;
- $(a \vee b)^* = a^* \cup b^*$;
- $(a^c)^* = \mathrm{uf}(\mathcal{B}) \setminus a^*$;
- $\mathbf{0}^* = 0$;
- $\mathbf{1}^* = \mathrm{uf}(\mathcal{B})$.

A.5.24 Stoneova dualnost
Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna Booleova algebra. Tada:

1. $\langle \mathcal{B}, \wedge, \vee, ^c, \leqslant, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \cong \langle S_{\mathcal{B}}, \cap, \cup, ^c, \subseteq, \mathbf{0}^*, \mathbf{1}^* \rangle$.

   Drugim rečima, svaka Booleova algebra izomorfna je nekoj algebri skupova;

2. *Familija $S_{\mathcal{B}} = \{a^* \mid a \in \mathcal{B}\}$ generiše topologiju na skupu* $\mathrm{uf}(\mathcal{B})$ *u kojoj je* $\mathrm{uf}(\mathcal{B})$ *totalno nepovezan kompaktan topološki prostor.*

Dokaz
2 Kako je $a^* \cap b^* = (a \wedge b)^*$ i kako je $\bigcup S_{\mathcal{B}} = \mathrm{uf}(\mathcal{B})$, familija $S_{\mathcal{B}}$ generiše topologiju na $\mathrm{uf}(\mathcal{B})$. Pošto je svaki od skupova a^* otvoreno zatvoren ($a^* = \mathrm{uf}(\mathcal{B}) \setminus (a^c)^*$) i da je $\langle \mathrm{uf}(\mathcal{B}), S_{\mathcal{B}} \rangle$ Hausdorffov prostor (za proizvoljne međusobno različite $D_1, D_2 \in \mathrm{uf}(\mathcal{B})$ i $a \in B$ tako da $a, a^c \neq \mathbf{0}$ imamo da su a^* i $(a^c)^*$ disjunktne bazne okoline koje separiraju D_1 i D_2), $\langle \mathrm{uf}(\mathcal{B}), S_{\mathcal{B}} \rangle$ je totalno nepovezan.

Ostaje da pokažemo kompaktnost. Neka je $\{a_\alpha^* \mid \alpha < \kappa\}$ bazni pokrivač skupa $\mathrm{uf}(\mathcal{B})$. Tada skup $\{a_\alpha^c \mid \alpha < \kappa\}$ nema svojstvo konačnog preseka (u suprotnom bi bio sadržan u nekom ultrafilteru D koji ne može biti sadržan ni u jednom od skupova a_α^*), pa postoje $a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_n}$ takvi da je

$$(a_{\alpha_1}^c) \wedge \cdots \wedge (a_{\alpha_n}^c) = \mathbf{0},$$

odakle sledi da je

$$a_{\alpha_1}^* \cup \cdots \cup a_{\alpha_n}^* = (a_{\alpha_1} \vee \cdots \vee a_{\alpha_n})^* = \mathbf{1}^* = \mathrm{uf}(\mathcal{B}).$$

1 Neka je $a^* = b^*$. Tada je i $a \wedge b^c = \mathbf{0}$, jer bi u suprotnom postojao ultrafilter D takav da $a, b^c \in D$, što je u suprotnosti sa $a^* = b^*$. Sada iz $a \wedge b^c = \mathbf{0}$ sledi da je $a \leqslant b$, a kako se na potpuno isti način pokazuje da je $b \leqslant a$, mora biti $a = b$.

Ovim smo pokazali da je sa $a \mapsto a^*$ dobro definisano 1-1 preslikavanje skupa $\mathcal{B}$ na skup $S_{\mathcal{B}}$. Sasvim lako se proverava da je uočeno preslikavanje izomorfizam. □

A.5.25 Lema *Neka su $D_1, \ldots, D_n, E_1, \ldots, E_m$ različiti ultrafilteri Booleove algebre $\mathcal{B}$. Tada je*

$$D_1 \cap \cdots \cap D_n \cap (\mathcal{B} \setminus E_1) \cap \cdots \cap (\mathcal{B} \setminus E_m) \neq 0.$$

Dokaz

Kako su u pitanju različiti ultrafilteri, to postoje

$$a_{ij} \in D_i \cap (\mathcal{B} \setminus E_j),$$

pri čemu je $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $j \in \{1, \ldots, m\}$. Neka je

$$b = (a_{11} \wedge \cdots \wedge a_{1m}) \vee \cdots \vee (a_{n1} \wedge \cdots \wedge a_{nm}).$$

Lako se vidi da b pripada traženom preseku. □

A.5.26 Lema *Neka je I beskonačan skup iskaznih slova i neka je $\mathcal{B}(I)$ odgovarajuća Lindenbaumova algebra. Tada važi :*

1. $|\mathcal{B}(I)| = |I|$;
2. $S_{\mathcal{B}(I)} \approx {}^I 2$;
3. $|S_{\mathcal{B}(I)}| = 2^{|I|}$.

Dokaz

Primetimo da se 1 lako dobija korišćenjem idempotentnosti beskonačnih kardinala, dok je 3 neposredna posledica od 2. Stoga dokažimo 2.

Neka je D proizvoljan ultrafilter Lindenbaumove algebre $\mathcal{B}(I)$. Tada je

$$T_D = \{\varphi \mid [\varphi] \in D\}$$

kompletna i neprotivrečna iskazna teorija, pa ima jedinstveni model

$$v_D(i) = \begin{cases} 1 & , \ [i] \in D \\ 0 & , \ [\neg i] \in D \end{cases}$$

pri čemu $i \in I$. S druge strane, proizvoljnoj valuaciji

$$v : I \longrightarrow 2$$

odgovara tačno jedna maksimalna neprotivrečna (samim tim i kompletna) iskazna teorija T_v, pa je

$$D_v = \{\varphi] \mid \varphi \in T_v\}$$

jedinstveni ultrafilter Lindenbaumove algebre $\mathcal{B}(I)$ koji odgovara valuaciji v. Dakle, preslikavanje $D \mapsto v_D$ je bijekcija. Homeomorfnost neposredno sledi iz činjenice da baznom skupu

$$(\bigvee_{r=1}^{n} \bigwedge_{s=1}^{m} [i_s^{a_{rs}}])^*$$

u $S_{\mathcal{B}(I)}$ (i^0 je po definiciji iskazna formula $\neg i$, dok je i^1 po definiciji iskazno slovo i) odgovara bazni skup

$$\bigcup_{r=1}^{n} \bigcap_{s=1}^{m} \pi_{i_s}^{-1}[\{a_{rs}\}]$$

u Cantorovom prostoru ${}^I 2$. □

A.5.27 Teorema *Neka je I beskonačan skup kardinalnosti κ. Tada Booleova algebra $\langle P(I), \subseteq \rangle$ ima 2^{2^κ} neglavnih ultrafiltera.*

Dokaz

Kako je svaki ultrafilter Booleove algebre $\langle P(I), \subseteq\rangle$ podskup skupa $P(I)$, to ultrafiltera ove algebre ne može biti više od 2^{2^κ}. Pošto je glavni filter ultrafilter ako i samo ako je generisan singltonom, vidimo da glavnih ultrafiltera Booleove algebre $\langle P(I), \subseteq\rangle$ ima tačno κ. Imajući na umu i lemu A.5.26, vidimo da je dovoljno pokazati da Booleova algebra $\langle P(\mathcal{B}(I)), \subseteq\rangle$ ima bar 2^{2^κ} ultrafiltera (naravno, ovde je $\mathcal{B}(I)$ Lindenbaumova algebra nad skupom iskaznih slova I).

Neka je $v : S_{\mathcal{B}(I)} \longrightarrow 2$ proizvoljna funkcija. Uz dogovor da je $D^0 = \mathcal{S}_{\mathcal{B}(I)} \setminus D$ i $D^1 = D$, lema A.5.25 nam obezbeđuje da familija

$$\{D^{v(D)} | D \in S_{\mathcal{B}(I)}\}$$

ima svojstvo konačnog preseka, pa je sadržana u nekom ultrafilteru E_v Booleove algebre $\langle P(\mathcal{B}(I)), \subseteq\rangle$. Kako različitim funkcijama v_1 i v_2 odgovaraju različiti ultrafilteri E_{v_1} i E_{v_2}, Booleova algebra $P(\mathcal{B}(I))$ ima bar

$$2^{|S_{\mathcal{B}(I)}|} = 2^{2^\kappa}$$

ultrafiltera, a to je i trebalo dokazati. $\square$

Za $S \subseteq \mathcal{B}$ preslikavanje $\mu : S \longrightarrow [0,1]$ je *parcijalna mera* sa domenom S ako važi:

- $\mu(\mathbf{1}) = 1$, $\mu(\mathbf{0}) = 0$;
- ako je $a \leqslant b$, onda je $\mu(a) \leqslant \mu(b)$;
- ako je $\mathbf{0} < a, b$ i $a \wedge b = \mathbf{0}$, onda je

$$\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b).$$

Interesuju nas samo takvi podskupovi S za koje prethodna definicija ima smisla. Ako je $S = \mathcal{B}$, mera μ je totalna (nema μ-nemerljivih elemenata $\mathcal{B}$).

Ako je $\mathcal{B} = P(X)$, onda skup X zovemo i *nosačem*, odnosno *indeksom* mere, i pišemo

$$X = \mathrm{ind}(\mu).$$

Pojmove *norme* i *aditivnosti* mere uvodimo redom sa

$$\|\mu\| = \min\{|X| \ \mid \ X \in \mathrm{dom}(\mu)\},$$

odnosno

$$\mathrm{add}(\mu) = \min\{|Y| \mid Y \subseteq \mathrm{dom}(\mu) \wedge (\forall y \in Y)(\mu(y) = 0) \wedge \mu(\bigcup Y) > 0\}.$$

Za meru μkažemo da je σ*-aditivna* ukoliko je $\mathrm{add}(\mu) = \omega_1$.

Uobičajeno je da se za meru odmah traži da bude σ-aditivna. Pošto su nam ovde interesantne i mere koje su samo konačno aditivne i pošto se ovde bavimo i detaljnijim ispitivanjem aditivnosti mere, određenje aditivnosti izdvajamo posebno. Ovako, svaki fulter u Booleovoj algebri je binarna mera. Naime, za filter D u $\mathcal{B}$ i dualni ideal I_D imamo da je $D \cup I_D \subseteq \mathcal{B}$ dobar domen mere koja se dobija sa

$$\mu_D(a) = \begin{cases} 1 & , \ a \in D \\ 0 & , \ a \notin D \end{cases} .$$

Elementi skupa $\mathcal{B} \setminus (D \cup I_D)$ su μ-nemerljivi.

Očigledno je mera μ_D totalna ukoliko je D ultrafilter. Takođe, na ultrafiltere se prenose definicije norme i aditivnosti. Na ovaj način dovedeni su u vezu i pojmovi mere i homomorfizma u proizvoljnim Booleovim algebrama, sa velikim preklapanjem u slučaju kada se radi o binarnim merama.

A.6 Gödelova teorema potpunosti

U ovoj sekciji ćemo dokazati medjusobnu ekvivalentnost nekoliko reformulacija teoreme potpunosti predikatskog računa prvog reda. Sami dokazi su preuzeti iz [27].

A.6.1 Gödelova teorema potpunosti

Svaka neprotivrečna teorija predikatskog računa prvog reda ima model.

A.6.2 Potpunost PR1

Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$. Tada za svaku formulu φ jezika $\mathcal{L}$ važi

$$T \vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad T \models \varphi.$$

A.6.3 Stav kompaktnosti PR1

Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$. Ako svaki konačan podskup teorije T ima model, onda i teorija T ima model.

A.6.4 Teorema o ultrafilteru

Neka je B proizvoljna Booleova algebra i neka skup $A \subseteq B$ ima svojstvo konačnog preseka. Tada postoji ultrafilter D Booleove algebre B takav da je $A \subseteq D$.

A.6.5 Kompaktnost ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$

Neka je $\{\top, \bot\}$ snabdeven diskretnom topologijom (ceo partitivni skup) i neka je $\mathbb{P}$ beskonačan skup. Tada je ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$ kompaktan topološki prostor u topologiji Tihonova.

A.6.6 Stav kompaktnosti IR

Neka je T iskazna teorija nad skupom iskaznih slova $\mathbb{P}$. Ako svaki konačan podskup teorije T ima model, onda i teorija T ima model.

A.6.7 Postojanje modela

Neka je T neprotivrečna iskazna teorija nad skupom iskaznih slova $\mathbb{P}$. Tada teorija T ima model.

A.6.8 Potpunost IR

Neka je T proizvoljna iskazna teorija nad skupom iskaznih slova $\mathbb{P}$. Tada za svaku iskaznu formulu φ nad istim skupom iskaznih slova važi

$$T \vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad T \models \varphi.$$

Dokazaćemo sledeće lance implikacija:

- A.6.1 $\Rightarrow$ A.6.2 $\Rightarrow$ A.6.3 $\Rightarrow$ A.6.4 $\Rightarrow$ A.6.1;

- A.6.5 $\Rightarrow$ A.6.7 $\Rightarrow$ A.6.8 $\Rightarrow$ A.6.6 $\Rightarrow$ A.6.5;
- A.6.6 $\Leftrightarrow$ A.6.4.

A.6.1 $\Rightarrow$ A.6.2

Neka je T neprotivrečna teorija jezika $\mathcal{L}$ i neka je φ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}$. Ako $T \vdash \varphi$, onda na osnovu zadatka A.4.7 imamo da $T \models \varphi$. Stoga pretpostavimo da $T \nvdash \varphi$. Tada je $T \cup \{\neg\varphi\}$ neprotivrečna teorija. Zaista,

$$\begin{array}{lll} & T, \neg\varphi \vdash \neg(\varphi \Rightarrow \varphi) & \\ \text{akko} & T \vdash \neg\varphi \Rightarrow \neg(\varphi \Rightarrow \varphi) & \text{A.2.8(3)} \\ \text{akko} & T \vdash (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi & \text{A.2.8(10)} \\ \text{akko} & T \vdash \varphi & \text{A.2.8(9) i } \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \end{array}$$

a kako $T \nvdash \varphi$, na osnovu prethodnog teorija $T \cup \{\neg\varphi\}$ mora biti neprotivrečna. Na osnovu A.6.1 teorija $T \cup \{\neg\varphi\}$ ima model, odakle po definiciji sledi da $T \not\models \varphi$.

A.6.2 $\Rightarrow$ A.6.3

Pretpostavimo da teorija T nema model. Tada po A.6.2

$$T \vdash \neg(x = x).$$

Kako je svaki formalni dokaz konačan niz formula, postoje formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T$ takve da

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \neg(x = x),$$

odakle sledi da teorija $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ nema model.

A.6.3 $\Rightarrow$ A.6.4

Neka je $\mathfrak{B} = \langle B, \wedge, \vee, ^c, \leqslant, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ proizvoljna Booleova algebra i neka skup $A \subseteq B$ ima svojstvo konačnog preseka. Jezik Booleovih algebri $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, ^c, \leqslant, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ proširimo unarnim relacijskim simbolom U i skupom novih simbola konstanti $\{c_b \mid b \in B\}$. Ovo proširenje jezika $\mathcal{L}$ označimo sa $\mathcal{L}^*$. Uočimo sledeće teorije jezika $\mathcal{L}^*$:

- $T_1 = Th(\mathfrak{B}_B)$;
- $T_2 = \{U(\mathbf{1}), \neg U(\mathbf{0})\}$;
- $T_3 = \{U(c_a) \wedge U(c_b) \Rightarrow U(c_{a\wedge b}) \mid a, b \in B\}$;
- $T_4 = \{U(c_a) \Rightarrow U(c_b) \mid a \leqslant b\}$;
- $T_5 = \{U(c_a) \mid a \in A\}$;
- $T_6 = \{U(c_b) \vee U(c_{b^c}) \mid b \in B\}$;
- $T = \bigcup_{i=1}^{6} T_i$.

Dokažimo da svaki konačan podskup teorije T ima model. Neka su

$$X = \{U(c_{a_1}), \ldots, U(c_{a_m})\} \subseteq T_5$$

i

$$Y = \{U(c_{b_1}) \vee U(c_{b'_1}), \ldots, U(c_{b_n}) \vee U(c_{b'_n})\} \subseteq T_6$$

proizvoljni. Kako skup A ima svojstvo konačnog preseka, mora biti

$$a = a_1 \cdots a_m > 0.$$

Odavde sledi da postoje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1\}$ takvi da je

$$b_0 = a \wedge b_1^{\alpha_1} \wedge b_n^{\alpha_n} > 0,$$

pri čemu je $b^1 = b$ i $b^0 = b^c$. Sada se sasvim lako proverava da je model $\mathcal{M}$ jezika $\mathcal{L}^*$ definisan sa

- $M = B$
- $\wedge^{\mathcal{M}} = \wedge$
- $\vee^{\mathcal{M}} = \vee$
- $\leqslant^{\mathcal{M}} = \leqslant$

- $\mathbf{0}^{\mathcal{M}} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{1}^{\mathcal{M}} = \mathbf{1}$
- $c_b^{\mathcal{M}} = b$, $b \in B$
- $U^{\mathcal{M}} = \{b \in B \mid b_0 \leqslant b\}$

ujedno i model teorije $T_1 \cup \cdots \cup T_4 \cup X \cup Y$.

Ovim smo pokazali da svaki konačan podskup teorije T ima model, pa po A.6.3, teorija T ima model $\mathcal{N}$. Kako $\mathcal{N} \models T_1$, bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\mathfrak{B}$ elementarni podmodel modela $\mathcal{N} \upharpoonright \mathcal{L}$, tj. da je

$$c_b^{\mathcal{N}} = b, \quad b \in B.$$

Neka je

$$D = U^{\mathcal{N}} \cap B.$$

Pošto je $\mathcal{N}$ model teorija T_2, T_3, T_4 i T_6, skup D je ultrafilter Booleove algebre B. Konačno, kako $\mathcal{N} \models T_5$, mora biti i $A \subseteq D$.

A.6.4 $\Rightarrow$ A.6.1

Prvo ćemo dokazati sledeću pomoćnu lemu:

A.6.9 Lema *Neka je T neprotivrečna teorija jezika $\mathcal{L}$, $\exists x \varphi(x)$ rečenica jezika $\mathcal{L}$ i neka je c novi simbol konstante. Tada je teorija $T \cup \{\exists x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)\}$ takođe neprotivrečna.*

Dokaz Pretpostavimo da je teorija $T \cup \{\exists x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)\}$ protivrečna. Tada

$$T, \exists x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(c) \vdash \neg \forall x (x = x),$$

odakle po A.2.8(3) sledi da

$$T \vdash (\exists x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)) \Rightarrow \neg (x = x),$$

odakle po A.2.8(10) sledi da

$$T \vdash \neg\neg \forall x (x = x) \Rightarrow \neg (\exists x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)).$$

Pošto $T \vdash \neg\neg\forall x(x = x)$, po A.2.8(9) imamo da

$$T \vdash \neg(\exists x\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)),$$

odakle po A.2.8(5) sledi da

$$T \vdash \exists x\varphi(x) \quad \text{i} \quad T \vdash \neg\varphi(c).$$

Međutim, c je nov simbol konstante, pa na osnovu leme o novoj konstanti sledi da

$$T \vdash \forall x\neg\varphi(x).$$

Najzad, kako

$$\exists x\varphi(x), \forall x\neg\varphi(x) \vdash \psi,$$

teorija T mora biti protivrečna. Kontradikcija. $\square$

Neka je T neprotivrečna teorija jezika $\mathcal{L}$. Rekurzivno definišimo jezik $\mathcal{L}^*$ na sledeći način:

- $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$;
- $\mathcal{L}_{n+1} = \{c_{\exists x\varphi(x)} \mid \exists x\varphi(x) \in Sent\mathcal{L}_n\}$, pri čemu je $Sent\mathcal{L}_n$ skup svih rečenica jezika $\mathcal{L}_n$, a $c_{\exists x\varphi(x)}$ su novi simboli konstanti;
- $\mathcal{L}^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{L}_n$.

Teoriju T^* jezika $\mathcal{L}^*$ rekurzivno definišimo na sledeći način:

- $T_0 = T$;
- T_{n+1} je kompletno i neprotivrečno proširenje teorije
$$T_n \cup \{\exists x\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c_{\exists x\varphi(x)}) \mid \exists x\varphi(x) \in Sent\mathcal{L}_n\};$$
- $T^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} T_n$.

Primetimo da prethodna lema i Lindenbaumova teorema (teorema A.5.20) obezbeđuju korektnost konstrukcije, kao i da iz konstrukcije neposredno sledi da je teorija T^* kompletna i neprotivrečna. Naravno, ovde se bitno koristi činjenica da smo Lindenbaumovu teoremu dokazali pomoću teoreme o ultrafilteru.

Na skupu $Const\mathcal{L}^*$ konstanti jezika $\mathcal{L}^*$ definišimo binarnu relaciju $\sim$ na sledeći način:

$$c \sim d \quad \text{ako i samo ako} \quad T^* \vdash c = d.$$

Očigledno je $\sim$ relacija ekvivalencije. Sa $[c]$ ćemo označavati odgovarajuću klasu ekvivalencije simbola knstante c u relaciji $\sim$.

Henkinov model $\mathcal{M}$ teorije T^* definišemo na sledeći način:

- $M = Const\mathcal{L}^*/\sim$;
- $c^{\mathcal{M}} = [c]$;
- $F^{\mathcal{M}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c_{\exists x(x=F(c_1,\ldots,c_n))}]$;
- $R^{\mathcal{M}}([c_1], \ldots, [c_n])$ ako i samo ako $T^* \vdash R(c_1, \ldots, c_n)$.

Korektnost definicije neposredno sledi iz činjenice da ukoliko

$$T^* \vdash c_1 = d_1 \wedge \cdots \wedge c_n = d_n,$$

onda

$$T^* \vdash F(c_1, \ldots, c_n) = F(d_1, \ldots, d_n)$$

i

$$T^* \vdash R(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow R(d_1, \ldots, d_n).$$

Indukcijom po složenosti dokazujemo da za svaku rečenicu φ jezika $\mathcal{L}^*$ važi

$$T^* \vdash \varphi \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathcal{M} \models \varphi. \tag{A.3}$$

U slučaju kada je φ atomična rečenica, (A.3) sledi direktno iz definicije modela $\mathcal{M}$. Pretpostavimo stoga da je rečenica φ veće složenosti i da (A.3) važi za svaku rečenucu jezika $\mathcal{L}^*$ složenosti manje od φ (induktivna hipoteza). Razlikujemo tri slučaja:

φ je oblika $\neg\psi$. S jedne strane, ako $T^* \vdash \neg\psi$, onda $T^* \nvdash \psi$, pa po induktivnoj hipotezi $\mathcal{M} \not\models \psi$, odakle sledi da $\mathcal{M} \models \neg\psi$. S druge strane, ako $\mathcal{M} \models \neg\psi$, onda $\mathcal{M} \not\models \psi$, odakle po induktivnoj hipotezi sledi da $T^* \nvdash \psi$, odakle zbog kompletnosti teorije T^* sledi da $T^* \vdash \neg\psi$.

φ je oblika $\psi \wedge \theta$. S jedne strane, ako $T^* \vdash \psi \wedge \theta$, onda $T^* \vdash \psi$ i $T^* \vdash \theta$, odakle po induktivnoj hipotezi sledi da $\mathcal{M} \models \psi$ i $\mathcal{M} \models \theta$, pa $\mathcal{M} \models \psi \wedge \theta$. Sasvim slično sledi i obratna implikacija.

φ je oblika $\exists x\psi(x)$. S jedne strane, ako $T^* \vdash \exists x\psi(x)$, onda zbog $T^* \vdash \exists x\psi(x) \Rightarrow \psi(c_{\exists x\psi(x)})$ i A.2.8(9) imamo da

$$T^* \vdash \psi(c_{\exists x\psi(x)}),$$

odakle po induktivnoj hipotezi sledi da $\mathcal{M} \models \psi(c_{\exists x\psi(x)})$, pa mora biti i $\mathcal{M} \models \exists x\psi(x)$.

S druge strane, ako $T^* \nvdash \exists x\psi(x)$, onda zbog kompletnosti teorije T^* imamo da $T^* \vdash \forall x\neg\psi(x)$. Neka je c proizvoljan simbol konstante jezika $\mathcal{L}^*$. Pošto $\vdash \forall x\neg\psi(x) \Rightarrow \neg\psi(c)$, na osnovu A.2.8(9) imamo da

$$T^* \vdash \neg\psi(c),$$

odakle po induktivnoj hipotezi $\mathcal{M} \models \neg\psi(c)$. Kako ovo važi za svaki simbol konstante c jezika $\mathcal{L}^*$, imamo da

$$\mathcal{M} \not\models \exists x\psi(x)$$

(svaki element skupa M je oblika $[c]$ za neki simbol konstante c jezika $\mathcal{L}^*$).

A.6.5 $\Rightarrow$ A.6.7

U dokazu ove implikacije neophodni su nam razni pojmovi opšte topologije, koje zbog obima ne možemo na ovom mestu navesti. Izuzetno lep uvod u topologiju čitalac može naći u [31].

Neka je T neprotivrečna iskazna teorija. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je svaka formula $\varphi \in T$ oblika

$$\bigvee_{i=1}^{m_\varphi} \bigwedge_{j=1}^{n_\varphi} \pm p_{ij}^{\varphi}.$$

Skup $M(\varphi)$ svih valuacija $v : \mathbb{P} \longrightarrow \{\top, \bot\}$ pri kojima je formula φ tačna oblika

$$M(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{m_\varphi} \bigcap_{j=1}^{n_\varphi} M(\pm p_{ij}^{\varphi}),$$

pa je otvoreno–zatvoren u ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$, jer je konačna unija baznih skupova koji su otvoreno–zatvoreni. Napomenimo da je

$$M(p) = \{v \in {}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\} \mid v(p) = \top\}$$

i da je

$$M(\neg p) = \{v \in {}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\} \mid v(p) = \bot\}.$$

Sada je

$$X = \{M(\varphi) \mid \varphi \in T\}$$

familija zatvorenih skupova u ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$ sa svojstvom konačnog preseka, jer zbog neprotivrečnosti teorije T za prozivoljne iskazne formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in T$ važi

$$M(\varphi_1) \cap \dots \cap M(\varphi_n) = M(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \neq \emptyset.$$

Po A.6.5 je ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$ kompaktan topološki prostor, pa je $\bigcap X \neq \emptyset$. Odavde sledi da je svaka valuacija iz $\bigcap X$ model teorije T.

A.6.7 $\Rightarrow$ A.6.8 $\Rightarrow$ A.6.6

Sasvim slično kao i A.6.1 $\Rightarrow$ A.6.2 $\Rightarrow$ A.6.3.

A.6.6 $\Rightarrow$ A.6.5

Neka je $\{A_i \mid i \in I\}$ familija zatvorenih skupova u ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$ sa svojstvom konačnog preseka. Za svako $i \in I$ neka je T_i skup svih iskaznih formula φ koje su tačne pri svim valuacijama iz A_i i neka je

$$T = \bigcup \{T_i \mid i \in I\}.$$

Primetimo da je svaki od skupova T_i neprazan jer je svaki zatvoren skup u ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$ presek skupova oblika

$$\bigcup_{i=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{p_{ij}}^{-1}(\pm\top)$$

($v \in \pi_{p_{ij}}^{-1}(\pm\top)$ akko $v(p_{ij}) = \pm\top$, $+\top = \top$, $-\top = \bot$), koji su ustvari skupovi svih modela formula oblika

$$\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} \pm p_{ij}.$$

Neka $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T$ i neka je svaka od formula φ_j tačna pri svim valuacijama iz A_{i_j}. Sada skup $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ima model jer je

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n} \neq \emptyset.$$

Po A.6.6 teorija T ima model. Konačno, na osnovu izbora teorije T neposredno sledi da svaki njen model pripada svim skupovima A_i, odakle sledi da je $\bigcap\{A_i \mid i \in I\}$ neprazan, čime je pokazano da je prostor ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$ kompaktan.

A.6.6 $\Rightarrow$ A.6.4

Neka je $\langle B, \wedge, \vee, {}^c \leqslant, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ proizvoljna Booleova algebra i neka skup $A \subseteq B$ ima svojstvo konačnog preseka. Definišimo iskaznu teoriju T na sledeći način:

- $\mathbb{P} = \{p_b \mid b \in B\}$;
- $T_1 = \{p_1, \neg p_0\}$;
- $T_2 = \{p_a \mid a \in A\}$;
- $T_3 = \{p_a \wedge p_b \Rightarrow p_{a \wedge b} \mid a, b \in B\}$;
- $T_4 = \{p_a \Rightarrow p_b \mid a \leqslant b\}$;
- $T_5 = \{p_b \vee p_{b^c} \mid b \in B\}$;
- $T = T_1 \cup \cdots \cup T_5$.

Dokažimo da svaki konačan podskup iskazne teorije T ima model. U tom cilju, neka su

$$X = \{p_{a_1}, \ldots, p_{a_m}\} \subseteq T_2$$

i

$$Y = \{p_{b_1} \vee p_{b_1^c}, \ldots, p_{b_n} \vee p_{b_n^c}\} \subseteq T_5$$

proizvoljni. Skup A ima svojstvo konačnog preseka u B, pa je

$$a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_m > \mathbf{0}.$$

Odavde sledi da postoje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1\}$ takvi da je

$$b_0 = a \wedge b_1^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge b_n^{\alpha_n} > \mathbf{0},$$

pri čemu je $b^1 = b$ i $b^0 = b^c$. Sada se sasvim lako proverava da je valuacija $v : \mathbb{P} \longrightarrow \{\top, \bot\}$ definisana sa

$$v(p_b) = \begin{cases} \top & , \quad b_0 \leqslant b \\ \bot & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

model teorije $T_1 \cup T_3 \cup T_4 \cup X \cup Y$. Na osnovu A.6.6 teorija T ima model v. Definišimo skup D sa

$$D = \{b \in B \mid v(p_b) = \top\}.$$

Lako se proverava da je D ultrafilter Booleove algebre B koji proširuje dati skup A.

A.6.4 $\Rightarrow$ A.6.6

Neka je T iskazna teorija nad skupom iskaznih slova $\mathbb{P}$ čiji svaki konačan podskup ima model i neka je $B(\mathbb{P})$ Lindenbaumova algebra iskaznog računa nad skupom iskaznih slova $\mathbb{P}$. Definišimo skup $A \subseteq B(\mathbb{P})$ sa

$$A = \{[\varphi] \mid \varphi \in T\}.$$

Kako svaki konačan podskup teorije T ima model, na osnovu teoreme A.1.11 sledi da skup A ima svojstvo konačnog preseka u Lindenbaumovoj algebri $B(\mathbb{P})$, pa je po A.6.4 sadržan u nekom ultrafilteru D iste algebre. Valuaciju $v : \mathbb{P} \longrightarrow \{\top, \bot\}$ definišimo na sledeći način:

$$v(p) = \begin{cases} \top & , \quad [p] \in D \\ \bot & , \quad [\neg p] \in D \end{cases} .$$

Napomenimo da korektnost definicije sledi iz činjenice da je D ultrafilter Lindenbaumove algebre, pa za svako iskazno slovo p tačno jedna od klasa ekvivalencije $[p]$ i $[\neg p]$ pripada D. Pokažimo da je valuacija v model teorije T. Neka $\varphi \in T$ i neka je

$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} \pm p_{ij}.$$

Tada je $[\bigvee\limits_{i=1}^{m} \bigwedge\limits_{j=1}^{n} \pm p_{ij}] = [\varphi] \in D$, a kako je

$$[\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} \pm p_{ij}] = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} [\pm p_{ij}]$$

i kako je D ultrafilter, to postoji $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tako da

$$\prod_{j=1}^{n} [\pm p_{i_0 j}] \in D.$$

Sada je svaka od iskaznih formula $\pm p_{i_0 j}$ tačna pri valuaciji v, odakle sledi da je i formula φ tačna pri valuaciji v.

A.7 Löwenheim–Skolem-Tarski teoreme

Neka su $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ i $\mathcal{N} = \langle N, \ldots \rangle$ modeli jezika prvog reda $\mathcal{L}$ i neka je $\mathcal{M}$ podmodel modela $\mathcal{N}$. Za formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jezika $\mathcal{L}$ reći ćemo da je *apsolutna* za modele $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ ako za svaki izbor elemenata $a_1, \ldots, a_n$ skupa M važi

$$\mathcal{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathcal{N} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]. \tag{A.4}$$

Iz definicije pojma podmodela neposredno sledi da su atomične formule apsolutne za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, a iz definicije relacije zadovoljenja neposredno sledi da je skup formula apsolutnih za modele $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ zatvoren za Booleovske kombinacije (ako su formule φ i ψ apsolutne, onda su takve i formule $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ i $\varphi \Leftrightarrow \psi$).

A.7.1 Teorema[Tarski-Vaught] *Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ modeli jezika prvog reda $\mathcal{L}$ i neka je $\mathcal{M}$ podmodel modela $\mathcal{N}$. Tada je $\mathcal{M}$ elementarni podmodel modela $\mathcal{N}$ ako i samo ako je svaka formula jezika $\mathcal{L}$ oblika $\exists x\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ apsolutna za modele $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.*

Dokaz

Ako je model $\mathcal{M}$ elementarni podmodel modela $\mathcal{N}$, onda su po definiciji sve formule jezika $\mathcal{L}$ apsolutne za modele $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, pa time i one oblika $\exists x\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Obratno, ako su formule oblika $\exists x\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ apsolutne za modele $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, onda skup apsolutnih formula za ove modele sadrži atomične formule i zatvoren je za Booleovske kombinacije i egzistencijalnu kvantifikaciju, pa sadrži sve formule. □

A.7.2 Donja Löwenheim-Skolem-Tarski teorema

Neka je $\mathcal{N} = \langle N, \ldots \rangle$ beskonačan model (N je beskonačan skup) jezika $\mathcal{L}$ i neka je A proizvoljan podskup skupa N. Tada model $\mathcal{N}$ ima elementarni podmodel $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ takav da je

$$|M| = \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |A|\}.$$

Dokaz

Neka je $f : P(N) \longrightarrow N$ funkcija izbora skupa N (za svaki neprazan $X \subseteq N$ je $f(X) \in X$). Skup M rekurzivno konstruišemo na sledeći način:

- $M_0 = \{c^{\mathcal{N}} \mid c \in Const\mathcal{L}\} \cup A$;
- Neka je skup M_n konstruisan. Skup M_{n+1} je jedinstveni nadskup skupa M_n sa sledećim svojstvima:

    1. Za proizvoljan funkcijski znak F jezika $\mathcal{L}$ i proizvoljne elemente $a_1, \ldots, a_m \in M_n$ (m je arnost znaka F) važi

    $$F^{\mathcal{N}}(a_1, \ldots, a_m) \in M_{n+1};$$

2. Za proizvoljnu formulu $\exists x\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$ (ako je $k = 0$, podrazumevamo da je x jedina slobodna promenljiva) jezika $\mathcal{L}$ i proizvoljne $a_1, \ldots, a_k \in M_n$, ako je

$$\{a \in N \mid \mathcal{N} \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_k]\} \neq \emptyset,$$

onda

$$f(\{a \in N \mid \mathcal{N} \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_k]\}) \in M_{n+1};$$

- $M = \bigcup_{n<\omega} M_n$.

Na osnovu idempotentnosti beskonačnih kardinala (videti poglavlje o kardinalnoj aritmetici) imamo da je

$$|For\mathcal{L}| = \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\},$$

pa u koraku 2 skupu M_{n+1} dodajemo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |M_n|^k + \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\} &= \aleph_0 \cdot |M_n| + \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\} \\ &= \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |M_n|\} \\ &= \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |A|\}\end{aligned}$$

elemenata, uz uslov da je $|M_n| \leqslant \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |A|\}$. Isto kardinalno ograničenje važi i u slučaju 1, a kako je po definiciji

$$|M_0| \leqslant \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |A|\},$$

zaključujemo da je, počevši od M_1 svaki od skupova M_n kardinalnosti $\max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |A|\}$, odakle sledi da je i skup M iste kardinalnosti.

Traženi model M definišemo na sledeći način:

- $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$;
- $F^{\mathcal{M}}$ je odgovarajuća restrikcija operacije $F^{\mathcal{N}}$ na skup M;

- $R^{\mathcal{M}}$ je odgovarajuća restrikcija relacije $R^{\mathcal{N}}$ na skup M.

Da je $\mathcal{M}$ elementarni podmodel modela $\mathcal{N}$ neposredno sledi iz konstrukcije (korak 2) i Tarski-Vaught teoreme. □

A.7.3 Gornja Löwenheim-Skolem-Tarski teorema

Neka je $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ *beskonačan model jezika* $\mathcal{L}$ *i neka je* $\kappa \geqslant \max\{|M|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$. *Tada model* $\mathcal{M}$ *ima elementarnu ekstenziju* $\mathcal{N}$ *kardinalnosti* $\geqslant \kappa$.

Dokaz

Jezik $\mathcal{L}$ proširimo skupom $\{c_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ novih simbola konstanti. Dati model $\mathcal{M}$ koristimo za dokaz činjenice da svaki konačan podskup teorije

$$T = Th(\mathcal{M}_M) \cup \{c_\alpha \neq c_\beta \mid \alpha < \beta\}$$

ima model: iz beskonačnosti skupa M neposredno sledi da za proizvoljne formule

$$c_{\alpha_1} \neq c_{\beta_1}, \ldots, c_{\alpha_k} \neq c_{\beta_k}$$

postoje $a_{\alpha_1}, a_{\beta_1}, \ldots, a_{\alpha_k}, a_{\beta_k} \in M$ takvi da

$$\mathcal{M} \models \bigwedge_{i=1}^{k} a_{\alpha_i} \neq a_{\beta_i},$$

odakle sledi da teorija $Th(\mathcal{M}_M) \cup \{c_{\alpha_1} \neq c_{\beta_1}, \ldots, c_{\alpha_k} \neq c_{\beta_k}\}$ ima model.

Na osnovu stava kompaktnosti teorija T ima model $\mathcal{N}$. Kako

$$\mathcal{N} \models \{c_\alpha \neq c_\beta \mid \alpha < \beta\},$$

to je $|N| \geqslant \kappa$, a pošto $\mathcal{N} \models Th(\mathcal{M}_M)$, imamo da se model $\mathcal{M}$ elementarno utapa u model $\mathcal{N} \upharpoonright \mathcal{L}$. Sada bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je odgovarajuće elementarno utapanje inkluzija. □

A.8 Definabilnost

Neka je $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ proizvoljan model jezika $\mathcal{L}$. Tada:

- Element $a \in M$ je *definabilan* u modelu $\mathcal{M}$ ako postoji formula $\varphi(x)$ jezika $\mathcal{L}$ takva da
$$\mathcal{M} \models \varphi[a] \wedge \exists_1 x \varphi(x).$$
Element $a \in M$ je *definabilan sa parametrima* u modelu $\mathcal{M}$ ako je definabilan u modelu $\mathcal{M}_{M \setminus \{a\}}$;

- Funkcija $f : M^n \longrightarrow M$ je *definabilna* u modelu $\mathcal{M}$ ako postoji formula $\varphi(\bar{x}, y)$ jezika $\mathcal{L}$ takva da
$$f(\bar{a}) = b \text{ ako i samo ako } \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}, b].$$
Funkcija $f : M^n \longrightarrow M$ je *definabilna sa parametrima* u modelu $\mathcal{M}$ ako je definabilna u modelu $\mathcal{M}_M$;

- Relacija $R \subseteq M^n$ je *definabilna* u modelu $\mathcal{M}$ ako postoji formula $\varphi(\bar{x})$ jezima $\mathcal{L}$ takva da
$$R(\bar{a}) \text{ ako i samo ako } \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}].$$
Relacija $R \subseteq M^n$ je *definabilna sa parametrima* u modelu $\mathcal{M}$ ako je definabilna u modelu $\mathcal{M}_M$.

A.8.1 Zadatak Neka je $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ standardni model formalne aritmetike PA. Dokazati:

1. Svaki prirodan broj n je definabilan u $\mathcal{M}$;
2. Poredak prirodnih brojeva je definabilan u $\mathcal{M}$;
3. Skup prirodnih brojeva deljivih sa $n > 1$ je definabilan u $\mathcal{M}$;

4. Skup prostih brojeva je definabilan u $\mathcal{M}$.

U nastavku ćemo opisati postupak konzervativnog širenja jezika date teorije. Konzervativnost se sastoji u tome da se svaki novo uvedeni simbol može efektivno eliminisati bez uticaja na deduktivne posledice (do na ekvivalenciju).

A.8.2 Teorema *Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$, c novi simbol konstante i $\varphi(x)$ formula jezika $\mathcal{L}$ takva da*

$$T \vdash \exists_1 x \varphi(x).$$

Dalje, neka je $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c\}$, $T^* = T \cup \{\varphi(c)\}$ i neka je $\phi(c)$ proizvoljna rečenica jezika $\mathcal{L}^*$ u kojoj se ne javlja promenljiva x. Tada važi:

1. *Teorije T i T^* su ekvikonsistentne;*
2. *$T^* \vdash \exists_1 x(\varphi(x) \wedge \phi(x)) \Leftrightarrow \phi(c)$;*
3. *$T \vdash \exists_1 x(\varphi(x) \wedge \phi(x))$ ako i samo ako $T^* \vdash \phi(c)$.*

Dokaz

1 Ako je teorija T^* konsistentna, onda je očigledno i teorija T konsistentna zbog $T \subseteq T^*$. Stoga pretpostavimo da je teorija T^* protivrečna. Tada

$$T, \varphi(c) \vdash \bot,$$

odakle prvo prebacivanjem $\varphi(c)$ sa desne strane rampe (znaka $\vdash$), a potom kontrapozicijom dobijamo da

$$T \vdash \neg\varphi(c),$$

pa, na osnovu leme o novoj konstanti, imamo da $T \vdash \forall x \neg\varphi(x)$. Kako po pretpostavci $T \vdash \exists x \varphi(x)$, na osnovu prethodnog sledi da je i teorija T protivrečna.

2 Neka je $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ proizvoljan model teorije T^*. Tada

$$\mathcal{M} \models \varphi(c) \text{ i } \mathcal{M} \models \exists_1 x \varphi(x),$$

pa za svaki element $a \in M$ takav da

$$\mathcal{M} \models \varphi[a] \wedge \phi[a]$$

mora biti $a = c^{\mathcal{M}}$, odakle neposredno sledi da

$$\mathcal{M} \models \exists_1 x(\varphi(x) \wedge \phi(x)) \Leftrightarrow \phi(c).$$

Sada tvrđenje sledi na osnovu teoreme potpunosti.

3 Ako $T \vdash \exists_1 x(\varphi(x) \wedge \phi(x))$, onda i $T^* \vdash \exists_1 x(\varphi(x) \wedge \phi(x))$, odakle zajedno sa prethodnom stavkom sledi da $T^* \vdash \phi(c)$. Obratno, ako $T^* \vdash \phi(c)$, onda prvo prebacivanjem $\varphi(c)$ sa desne strane rampe pa potom primenom leme o novoj konstanti dobijamo da

$$T \vdash \forall x(\varphi(x) \Rightarrow \phi(x)).$$

S obzirom da $T \vdash \exists_x \varphi(x)$ i da je

$$(\exists_1 x \varphi(x) \wedge \forall x(\varphi(x) \Rightarrow \phi(x))) \Rightarrow \exists_1 x(\varphi(x) \wedge \phi(x))$$

valjana formula, imamo da $T \vdash \exists_1 x(\varphi(x) \wedge \phi(x))$ $\square$

Na sličan način se mogu dokazati i sledeće dve teoreme, te ih ovde navodimo bez dokaza.

A.8.3 Teorema *Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$, R novi n-arni relacijski simbol, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{R\}$ i $T^* = T \cup \{\forall \bar{x}(R(\bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{x}))\}$. Dalje, neka je ϕ proizvoljna rečenica jezika $\mathcal{L}^*$. Tada važi:*

1. *Teorije T i T^* su ekvikonsistentne;*
2. *$T^* \vdash \phi \Leftrightarrow \phi^R_\varphi$;*

3. $T \vdash \phi^R_\varphi$ *ako i samo ako* $T^* \vdash \phi$.

A.8.4 Teorema *Neka je* T *teorija jezika* $\mathcal{L}$, F *novi* n*-arni funkcijski znak,* $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ *formula jezika* $\mathcal{L}$ *takva da*

$$T \vdash \forall \bar{x} \exists_1 y \varphi(\bar{x}, y),$$

$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{F\}$ *i* $T^* = T \cup \{\forall \bar{x} \forall y (F(\bar{x}) = y \Leftrightarrow \varphi(\bar{x}, y))\}$*. Tada su teorije* T *i* T^* *ekvikonsistentne i za svaku rečenicu* ϕ^* *jezika* $\mathcal{L}^*$ *postoji rečenica* ϕ *jezika* $\mathcal{L}$ *takva da* $T^* \vdash \phi^* \Leftrightarrow \phi$ *i*

$$T \vdash \phi \text{ ako i samo ako } T^* \vdash \phi^*.$$

Teorije T^* definisane u prethodnim teoremama zovemo i *definicionim ekstenzijama* teorije T. Same definicione ekstenzije koristimo kako bi pojednostavili notaciju, što se posebno odnosi na teoriju ZFC, jer ćemo skoro uvek raditi u nekoj njenoj definicionoj ekstenziji.

A.9 Metod interpretacije

Neka su $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}'$ jezici prvog reda. *Interpretacija* jezika $\mathcal{L}$ u jeziku $\mathcal{L}'$ se sastoji od:

- Unarnog predikatskog simbola $\mathtt{M}$ jezika $\mathcal{L}'$, koji se naziva univerzumom interpretacije;

- Skupa $\{s_M \mid s \in \mathcal{L}\} \subseteq \mathcal{L}'$, pri čemu su simboli s i s_M istog tipa: ako je s simbol konstante, onda je i s_M simbol konstante; ako je s funkcijski (relacijski) znak, onda je s_M takođe funkcijski (relacijski) znak iste arnosti kao i s.

Ako je t term jezika $\mathcal{L}$, sa $t_{\mathtt{M}}$ ćemo označavati term jezika $\mathcal{L}'$ koji nastaje zamenom svakog simbola s jezika $\mathcal{L}$ koji se javlja u termu t odgovarajućim simbolom $s_{\mathtt{M}}$ jezika $\mathcal{L}'$.

Pretpostavimo da smo fiksirali neku interpretaciju jezika $\mathcal{L}$ u jeziku $\mathcal{L}'$ čiji je univerzum $\mathtt{M}$. Za proizvoljnu formulu φ jezika $\mathcal{L}$ definišimo njenu *relativizaciju* $\varphi^{\mathtt{M}}$ na sledeći način:

- Ako je φ atomična formula, onda $\varphi^{\mathtt{M}}$ nastaje zamenom svakog simbola s jezika $\mathcal{L}$ koji se javlja u formuli φ odgovarajućim simbolom $s_{\mathtt{M}}$ jezika $\mathcal{L}'$;
- Ako je φ formula $\neg\phi$, onda je $\varphi^{\mathtt{M}}$ formula $\neg\phi^{\mathtt{M}}$;
- Ako je φ formula $\phi \Rightarrow \psi$, onda je $\varphi^{\mathtt{M}}$ formula $\phi^{\mathtt{M}} \Rightarrow \psi^{\mathtt{M}}$;
- Ako je φ formula $\forall x\phi$, onda je $\varphi^{\mathtt{M}}$ formula $\forall x(\mathtt{M}(x) \Rightarrow \phi^{\mathtt{M}})$;
- Ako je φ formula $\exists x\phi$, onda je $\varphi^{\mathtt{M}}$ formula $\exists x(\mathtt{M}(x) \wedge \phi^{\mathtt{M}})$.

Interpretacija teorije T u teoriji T' je po definiciji interpretacija jezika $\mathcal{L}$ teorije T u jeziku $\mathcal{L}'$ teorije T' sa sledećim svojstvima:

1. $T' \vdash \exists x\mathtt{M}(x)$;
2. Za svaki n-arni funkcijski znak F jezika $\mathcal{L}$,
$$T' \vdash \forall \bar{x}((\mathtt{M}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathtt{M}(x_n)) \Rightarrow \mathtt{M}(F_{\mathtt{M}}(x_1, \ldots, x_n));$$
3. $T' \vdash \varphi^{\mathtt{M}}$ za svaku aksiomu φ teorije T, pri čemu podrazumevamo da T ne sadrži ni jednu valjanu formulu.

A.9.1 Zadatak Neka je $\mathtt{M}$ univerzum interpretacije teorije T u teoriji T'. Dokazati:

1. Ako je $t(x_1, \ldots, x_n)$ proizvoljan term jezika $\mathcal{L}$, onda
$$T' \vdash \forall \bar{x}(\mathtt{M}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathtt{M}(x_n) \Rightarrow \mathtt{M}(t_m(\bar{x})));$$
2. Ako je $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ instanca neke od aksioma predikatskog računa, onda
$$T' \vdash \forall \bar{x}(\mathtt{M}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathtt{M}(x_n) \Rightarrow \varphi^{\mathtt{M}}(\bar{x})).$$

A.9.2 Teorema *Neka je* $\mathtt{M}$ *univerzum interpretacije teorije* T *u teoriji* T' *i neka je* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *proizvoljna formula jezika* $\mathcal{L}$. *Ako* $T \vdash \varphi(\bar{x})$, *onda*

$$T' \vdash \mathtt{M}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathtt{M}(x_n) \Rightarrow \varphi^{\mathtt{M}}(\bar{x}).$$

Dokaz

Dokaz izvodimo potpunom indukcijom po dužini l dokaza formule φ iz hipoteza T. Ako je $l = 1$, onda tvrđenje sledi na osnovu prethodnog zadatka i definicije interpretacije.

Pretpostavimo da je formula φ dokazana iz hipoteza T primenom modus ponensa na formule ψ i $\psi \Rightarrow \varphi$, kao i da tvrđenje važi za svaku formulu sa kraćim dokazom od formule φ. Tada po induktivnoj hipotezi

$$T' \vdash \mathtt{M}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathtt{M}(x_n) \Rightarrow \psi^{\mathtt{M}}(\bar{x})$$

i

$$T' \vdash \mathtt{M}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathtt{M}(x_n) \Rightarrow (\psi^{\mathtt{M}}(\bar{x}) \Rightarrow \varphi^{\mathtt{M}}(\bar{x})),$$

odakle sledi da $T' \vdash \mathtt{M}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathtt{M}(x_n) \Rightarrow \varphi^{\mathtt{M}}$.

Pretpostavimo da je φ formula $\forall x \psi(x)$ i da je prilikom njenog dokaza korišćena generalizacija po x. Tada po induktivnoj hipotezi

$$T' \vdash \mathtt{M}(x) \Rightarrow \psi^{\mathtt{M}}(x),$$

a time i $T' \vdash \forall x(\mathtt{M}(x) \Rightarrow \psi^{\mathtt{M}}(x))$, tj. $T' \vdash \varphi^{\mathtt{M}}$. □

A.9.3 Posledica *Uz prethodnu simboliku, ako je teorija* T' *konsistentna, onda je i teorija* T *takođe konsistentna.*

Dokaz

Neka je $\mathcal{M}$ model teorije T' i neka je $\mathtt{M}^{\mathcal{M}}$ interpretacija unarnog predikata $\mathtt{M}$ u modelu $\mathcal{M}$. Na osnovu prethodne teoreme je struktura

$$\langle \mathtt{M}^{\mathcal{M}}, s^{\mathtt{M}^{\mathcal{M}}} \rangle_{s \in \mathcal{L}}$$

model teorije T, pri čemu je $c^{\mathtt{M}^{\mathcal{M}}} = c^{\mathcal{M}}_{\mathtt{M}}$, a u slučaju relacijskih i funkcijskih znakova, $s^{\mathtt{M}^{\mathcal{M}}}$ je restrikcija $s^{\mathcal{M}}_{\mathtt{M}}$ na skup $\mathtt{M}^{\mathcal{M}}$. $\square$

Konstruisani model $\langle \mathtt{M}^{\mathcal{M}}, s_{\mathtt{M}}^{\mathtt{M}^{\mathcal{M}}} \rangle_{s\in\mathcal{L}}$ zovemo i *unutrašnjim modelom* teorije T. Posebno, ukoliko je $s_{\mathtt{M}} = s$ za svaki simbol jezika $\mathcal{L}$, unutrašnji model $\mathtt{M}^{\mathcal{M}}$ će ujedno biti i podmodel modela $\mathcal{M}$.

A.9.4 Primer Ovde ćemo neformalno (semantički) opisati interpretaciju teorije $T = \mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf} + \neg\mathrm{Inf}$ (Inf je askioma beskonačnosti) u teoriji PA, tj. opisaćemo konstrukciju unutrašnjeg modela teorije T u standardnom modelu aritmetike $\mathbb{N}$. Univerzum interpretacije se poklapa sa univerzumom aritmetike $\mathbb{N}$ (formalno, $\mathtt{M}(x) \Leftrightarrow x = x$). Dalje, za svaki prirodan broj n postoji jedinstveni skup $X_n \subseteq \mathbb{N}$ takav da je

$$n = \sum_{a\in X_n} 2^a,$$

pri čemu je po definiciji $0 = \sum\limits_{a\in\emptyset} 2^a$. Relaciju pripadanja $\in$ interpretiramo kao binarnu aritmetičku relaciju $\in_{\mathbb{N}}$ definisanu sa

$$m \in_{\mathbb{N}} n \Leftrightarrow m \in X_n.$$

Nije teško pokazati da $\langle \mathbb{N}, \in_{\mathbb{N}} \rangle \models T$. Mi ćemo verifikovati samo neke od aksioma teorije T. Za početak,

$$\begin{aligned} m = n \quad & \text{akko} \quad \sum_{a\in X_m} 2^a = \sum_{a\in X_n} 2^a \\ & \text{akko} \quad X_m = X_n \\ & \text{akko} \quad \text{za svako } x \in \mathbb{N},\ x \in X_m \text{ akko } x \in X_n \\ & \text{akko} \quad \text{za svako } x \in \mathbb{N},\ x \in_{\mathbb{N}} m \text{ akko } x \in_{\mathbb{N}} n, \end{aligned}$$

pa u $\langle \mathbb{N}, \in_{\mathbb{N}} \rangle$ važi aksioma ekstenzionalnosti. Što se tiče aksioma praznog skupa, para, unije i partitivnog skupa, imamo sledeće:

- $\emptyset_{\mathbb{N}} = 0$;

- $\{m,n\}_{\mathbb{N}} = \begin{cases} 2^m & , \quad m = n \\ 2^m + 2^n & , \quad m \neq n \end{cases}$;
- $\bigcup_{\mathbb{N}} m = \sum\limits_{a \in X_m} a$;
- $P_{\mathbb{N}}(m) = \sum\limits_{A \in P(X_m)} 2^{\sum\limits_{a\in A} 2^a}$.

A.10 Gödelove teoreme nepotpunosti

U ovoj sekciji ćemo sa $\mathbb{N}$ označavati metateorijski skup prirodnih brojeva ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$). Pod *n-arnom* ($n > 0$) *aritmetičkom funkcijom* podrazumevamo svaku funkciju $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ čiji je domen A podskup skupa $\mathbb{N}^n$. Funcija f je *parcijalna* ako je A pravi podskup skupa $\mathbb{N}^n$; u suprotnom je *totalna*. Sada ćemo precizirati nekoliko formalnih sistema izračunljivosti.

A.10.1 Definicija Za aritmetičku funkciju f kažemo da je *rekurzivna* ako postoji konačan niz $f_0, \ldots, f_n$ aritmetičkih funkcija takav da je $f_n = f$ i da za svako $k \leqslant n$ važi bar jedna od sledećih stavki:

1. f_k je nula funkcija $\texttt{null}(x) = 0$;
2. f_k je sledbenik funkcija $\texttt{S}(x) = x + 1$;
3. f_k je i-ta n-arna projekcija $\texttt{proj}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$;
4. $f_k(\bar{x}) = f_i(f_{j1}(\bar{x}), \ldots, f_{j_m}(\bar{x}))$, $i, j_1, \ldots, j_m < k$;
5. $f_k(\bar{x}, 0) = f_i(\bar{x})$, $f_k(\bar{x}, y+1) = f_j(\bar{x}, y, f_k(\bar{x}, y))$, $i, j < k$;
6. $f_k(\bar{x}) = \mu y f_i(\bar{x}, y)$, pri čemu je

$$\mu y f_i(\bar{x}, y) = \begin{cases} z & , \quad f_i(\bar{x}, z) = 0 \wedge \\ & \quad\;\; (\forall y < z)(f_i(\bar{x}, y) \neq 0) \\ \text{nedefinisano} & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

   i $i < k$.

Za aritmetičku relaciju kažemo da je rekurzivna ako je takva njena karakterištična funkcija.

A.10.2 Definicija Za n-arnu aritmetičku funkciju f kažemo da je *predstavljiva* u PA ako postoji formula $\varphi(\bar{x}, y)$ takva da za proizvoljne prirodne brojeve $k_1, \ldots, k_n, m$ važi:

- $f(k_1, \ldots, k_n) = m$ povlači $PA \vdash \varphi(\mathtt{k}_1, \ldots, \mathtt{k}_n, \mathtt{m})$;
- $f(k_1, \ldots, k_n) \neq m$ povlači $PA \vdash \neg\varphi(\mathtt{k}_1, \ldots, \mathtt{k}_n, \mathtt{m})$.

Pritom je $\mathtt{1} = \mathtt{0}'$, $\mathtt{2} = \mathtt{0}''$, $\mathtt{3} = \mathtt{0}'''$ itd. Same termove $\mathtt{k}$ zovemo i *numeralima.* Posebno, za aritmetičku relaciju kažemo da je predstavljiva u PA ako je takva njena karakteristična funkcija.

A.10.3 Definicija Za n-arnu aritmetičku funkciju f kažemo da je C^{++} *izračunljiva* ako postoji program P na jeziku C^{++} sa sledećim svojstvima:

- Ulaz programa P je proizvoljna n-torka prirodnih brojeva;
- Ako ulaz $\bar{x}$ programa P pripada domenu funkcije f, onda je izlaz programa P upravo $f(\bar{x})$;
- Ako ulaz programa P ne pripada domenu funkcije f, onda se program P ne zaustavlja.

Posebno, za program P sa gornjim svojstvima kažemo da izračunava funkciju f.

Sledeća teorema uspostavlja ekvivalenciju između raznih formalnih sistema izračunljivosti. Sam dokaz nije težak ali je tehnički zahtevan, te ga ovde izostavljamo. Neki od detalja se mogu naći u [34].

A.10.4 Teorema *Neka je f proizvoljna aritmetička funkcija. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. *f je rekurzivna;*

2. f je predstavljiva u PA pomoću Σ_1-formule;

3. f je Turing izračunljiva.

U vezi sa prethodnom teoremom je i čuvena *Churchova teza* po kojoj je svaka intuitivno izračunljiva funkcija rekurzivna. U dokazima rekurzivnosti aritmetičkih funkcija i relacija uglavnom ćemo koristiti Churchovu tezu. Bez obzira na status ove teze, za efektivne postupke koje budemo koristili, može se formalno pokazati da su rekurzivni (npr. pisanjem odgovarajućeg C^{++} programa i primenom prethodne teoreme).

Prelazimo na kodiranje prirodnim brojevima, koje pre svega podrazumeva kodiranje konačnih nizova prirodnih brojeva prirodnim brojevima. Funkcije $\mathtt{C}_2 : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ i $(\ )_1, (\ )_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definisane sa

$$\mathtt{C}_2(x, y) = 2^x(2y + 1) - 1$$

$$(x)_1 = \max\{y \in \mathbb{N} \mid 2^y \text{ deli } x + 1\}$$

$$(x)_2 = 2^{-1}(2^{-(x)_1}(x + 1) - 1)$$

su očigledno rekurzivne (Churchova teza). Pritom je funkcija $\mathtt{C}_2$ bijekcija i za svaki prirodan broj x važi

$$x = \mathtt{C}_2((x)_1, (x)_2).$$

Za $n = 3$ odgovarajuće kodirajuće funkcije definišemo na sledeći način:

$$\mathtt{C}_3(x, y, z) = \mathtt{C}_2(\mathtt{C}_2(x, y), z);$$

$$(x)^{(3)}_1 = ((x)_1)_1;$$

$$(x)^{(3)}_2 = ((x)_1)_2;$$

$$(x)^{(3)}_3 = (x)_2.$$

Koristeći opisanu proceduru, definišemo kodirajuće funkcije i za preostale vrednosti n. Ako je $l : \{0, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{N}$ konačan niz prirodnih brojeva, onda njegov kôd definišemo sa

$$\mathtt{C}(l) = \mathtt{C}_2(n+1, \mathtt{C}_{n+1}(l_0, \ldots, l_n)),$$

pri čemu je $l_i = l(i)$.

Neka je f proizvoljna aritmetička funkcija i neka je f^* unarna aritmetička funkcija definisana sa

$$f^*(x) = f((x)_1^{(n)}, \ldots, (x)_n^{(n)}).$$

Tada za proizvoljne prirodne brojeve $x_1, \ldots, x_n, y$ važi

$$f(\bar{x}) = y \Leftrightarrow f^*(\mathtt{C}_n(\bar{x})) = y,$$

odakle sledi da se n-arne aritmetičke funkcije efektivno mogu kodirati unarnim aritmetičkim funkcijama.

A.10.5 Definicija Neka je φ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}_{PA}$. *Gödelov broj* $\ulcorner\varphi\urcorner$ formule φ definišemo na sledeći način: ako je formula φ konačan niz simbola $s_0, \ldots, s_n$, onda je

$$\ulcorner\varphi\urcorner = \mathtt{C}(\ulcorner s_0\urcorner, \ldots, \ulcorner s_n\urcorner),$$

pri čemu je $\ulcorner\mathtt{0}\urcorner = 0$, $\ulcorner+\urcorner = 1$, $\ulcorner\cdot\urcorner = 2$, $\ulcorner'\urcorner = 3$, $\ulcorner(\urcorner = 4$, $\ulcorner)\urcorner = 5$, $\ulcorner=\urcorner = 6$, $\ulcorner\neg\urcorner = 7$, $\ulcorner\Rightarrow\urcorner = 8$, $\ulcorner\forall\urcorner = 9$, $\ulcorner x_n\urcorner = 10^{n+1}$ ($x_0, x_1, x_2, \ldots$ je lista svih promenljivih).

Ako je $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dokaz u PA, onda njegov kôd definišemo sa

$$\mathtt{C}(\ulcorner\varphi_1\urcorner, \ldots, \ulcorner\varphi_n\urcorner).$$

A.10.6 Zadatak Dokazati da su sledeći aritmetički predikati rekurzivni:

1. $Term(n)$: "n je kôd terma jezika $\mathcal{L}_{PA}$";
2. $For(n)$: "n je kôd formule jezika $\mathcal{L}_{PA}$";

3. $Var(m,n)$: "promenljiva čiji je kôd m javlja se u formuli jezika $\mathcal{L}_{PA}$ čiji je kôd n";

4. $Fv(m,n)$: "promenljiva čiji je kôd m javlja se slobodno u formuli jezika $\mathcal{L}_{PA}$ čiji je kôd n";

5. $Sent(n)$: "n je kôd rečenice jezika $\mathcal{L}_{PA}$";

6. $Ax(n)$: "n je kôd formule jezika $\mathcal{L}_{PA}$ koja je instanca neke od aksioma predikatskog računa prvog reda";

7. $PA(n)$: "n je kôd formule jezika $\mathcal{L}_{PA}$ koja je instanca neke od aksioma teorije PA";

8. $MP(k,m,n)$: "k je kôd formule jezika $\mathcal{L}_{PA}$ koja se dobija primenom modus ponensa na formule jezika $\mathcal{L}_{PA}$ čiji su kodovi m i n";

9. $Gen(k,m,n)$: "k je kôd formule jezika $\mathcal{L}_{PA}$ koja se dobija primenom generalizacije po promenljivoj čiji je kôd m na formulu jezika $\mathcal{L}_{PA}$ čiji je kôd n";

10. $Prov(m,n)$: m je kôd dokaza u PA formule čiji je kôd n.

Definišimo funkciju $Sub : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ sa

$$Sub(m,n) = \begin{cases} \ulcorner\varphi(\mathtt{n})\urcorner & , \quad m = \ulcorner\varphi(x)\urcorner \text{ za neku formulu} \\ & \quad\ \ \varphi(x) \text{ jezika } \mathcal{L}_{PA} \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

Funkcija Sub je rekurzivna, pa po teoremi A.10.4 postoji Σ_1 formula $\mathtt{Sub}(x,y,z)$ jezika $\mathcal{L}_{PA}$ koja predstavlja funkciju Sub. Posebno, za svaki prirodan broj n i svaku formulu $\varphi(x)$ jezika $\mathcal{L}_{PA}$ važi

$$PA \vdash \mathtt{Sub}(\ulcorner\varphi(x)\urcorner, \mathtt{n}, \ulcorner\varphi(\mathtt{n})\urcorner),$$

pri čemu u ovom kontekstu $\ulcorner\varphi(x)\urcorner$ i $\ulcorner\varphi(\mathtt{n})\urcorner$ tretiramo kao numerale.

Za prelazak na Gödelove teoreme neophodne su nam i neke dodatne osobine teorije PA, koje navodimo u sledećem zadatku.

A.10.7 Zadatak Neka je $x < y$ zamena za $\exists z(y = x + z')$. Dokazati da su univerzalna zatvorenja sledećih formula teoreme teorije PA:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$;
2. $\mathtt{0} + x = x$;
3. $x + y = y + x$;
4. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
5. $\mathtt{0} \cdot x = \mathtt{0}$;
6. $x \cdot \mathtt{1} = x$;
7. $\mathtt{1} \cdot x = x$;
8. $x \cdot y = y \cdot x$;
9. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$;
10. $x \neq \mathtt{0} \Rightarrow \exists y(x = y')$;
11. $\neg(x < x)$;
12. $(x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z$;
13. $x < y \Leftrightarrow \forall z(x + z < y + z)$;
14. $x < y \Leftrightarrow \forall z(x \cdot z' < y \cdot z')$;
15. $\exists x \varphi(x, \bar{y}) \Rightarrow \exists x(\varphi(x, y) \wedge (\forall z < x) \neg \varphi(z, \bar{y}))$, pri čemu je $\varphi(x, \bar{y})$ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}_{PA}$.

A.10.8 Gödelova lema

Neka je $\psi(x)$ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}_{PA}$ sa tačno jednom promenljivom x. Tada postoji rečenica φ jezika $\mathcal{L}_{PA}$ takva da

$$PA \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner),$$

pri čemu u ovom kontekstu $\ulcorner \varphi \urcorner$ tretiramo kao numeral.

Dokaz

Neka je $\theta(x, y, z)$ formula

$$\mathtt{Sub}(x, y, z) \wedge (\forall z_0 < z)\neg\mathtt{Sub}(x, y, z_0).$$

Na osnovu poslednje stavke u prethodnom zadatku,

$$PA \vdash \forall x\forall y\forall u\forall v((\theta(x, y, u) \wedge \theta(x, y, v)) \Rightarrow u = v). \tag{A.5}$$

Dalje, neka je

$$n = \ulcorner\exists z(\theta(x, x, z) \wedge \psi(z))\urcorner.$$

Tvrdimo da rečenica φ definisana sa

$$\exists z(\theta(\mathtt{n}, \mathtt{n}, z) \wedge \psi(z))$$

zadovoljava uslove tvrđenja. Zaista, kako je po definiciji funkcije Sub

$$Sub(n, n) = \ulcorner\varphi\urcorner,$$

to je $Sub(n, n) \neq m$ za svako $m < \ulcorner\varphi\urcorner$, pa po teoremi A.10.4 imamo da

$$PA \vdash \theta(\mathtt{n}, \mathtt{n}, \ulcorner\varphi\urcorner), \tag{A.6}$$

pri čemu u ovom kontekstu $\ulcorner\varphi\urcorner$ tretiramo kao numeral. Sada na osnovu (A.5) i (A.6) sledi da je $\ulcorner\varphi\urcorner$ jedinstveni svedok formule

$$\theta(\mathtt{n}, \mathtt{n}, \ulcorner\varphi\urcorner),$$

pa mora biti

$$PA \vdash \exists z(\theta(\mathtt{n}, \mathtt{n}, \ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \psi(z)) \Leftrightarrow \psi(\ulcorner\varphi\urcorner),$$

tj. $PA \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$. □

Uz simboliku iz prethodne leme, rečenicu φ zovemo i *dijagonalizacijom* formule $\psi(x)$.

Kako je aritmetički predikat $Prov(m, n)$ rekurzivan, postoji Σ_1 formula $\mathtt{Prov}(x, y)$ jezika $\mathcal{L}_{PA}$ takva da važi:

- $Prov(m, n)$ povlači $PA \vdash \texttt{Prov}(\texttt{m}, \texttt{n})$;
- nije $Prov(m, n)$ povlači $PA \vdash \neg\texttt{Prov}(\texttt{m}, \texttt{n})$.

A.10.9 Prva Gödelova teorema nepotpunosti

Neka je $\psi(x)$ formula $\neg\exists y\texttt{Prov}(y, x)$ i neka je φ njena dijagonalizacija. Tada:

1. *Ako je PA neprotivrečna teorija, onda $PA \not\vdash \varphi$;*
2. *Ako je PA neprotivrečna teorija i ako iz $PA \vdash \exists y\texttt{Prov}(y, \ulcorner\varphi\urcorner)$ sledi da $PA \vdash \varphi$, onda $PA \not\vdash \neg\varphi$.*

Dokaz

1 Pretpostavimo da $PA \vdash \varphi$. Tada po lemi A.10.8

$$PA \vdash \neg\exists y\texttt{Prov}(y, \ulcorner\varphi\urcorner).$$

Ako je m kôd dokaza rečenice φ u PA, onda važi $Prov(m, \ulcorner\varphi\urcorner)$ pa mora biti i $PA \vdash \texttt{Prov}(\texttt{m}, \ulcorner\varphi\urcorner)$, a time i $PA \vdash \exists y\texttt{Prov}(y, \ulcorner\varphi\urcorner)$. Dakle, iz $PA \vdash \varphi$ sledi da je teorija PA protivrečna, pa neprotivrečnost teorije PA povlači da $PA \not\vdash \varphi$.

2 Preptostavimo da $PA \vdash \neg\varphi$. Tada po lemi A.10.8 sledi da

$$PA \vdash \exists y\texttt{Prov}(y, \ulcorner\varphi\urcorner),$$

odakle iz uslova teoreme sledi da $PA \vdash \varphi$, a time i protivrečnost teorije PA. $\square$

Radi pojednostavljenja notacije ćemo sa $\texttt{Pr}(x)$ označavati formulu $\exists y\texttt{Prov}(y, x)$. Može se pokazati da formula $\texttt{Pr}(x)$ ima sledeća svojstva:

D1 Ako $PA \vdash \psi$, onda $PA \vdash \texttt{Pr}(\ulcorner\psi\urcorner)$;

D2 $PA \vdash \texttt{Pr}(\ulcorner\psi\urcorner) \Rightarrow \texttt{Pr}(\ulcorner\texttt{Pr}(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner)$;

D3 $PA \vdash \texttt{Pr}(\ulcorner\psi \Rightarrow \theta\urcorner) \Rightarrow (\texttt{Pr}(\ulcorner\psi\urcorner) \Rightarrow \texttt{Pr}(\ulcorner\theta\urcorner))$.

Ako je m kôd dokaza formule ψ u teoriji PA, onda po definiciji važi $Prov(m, \ulcorner\psi\urcorner)$, pa mora biti i $PA \vdash \mathtt{Prov}(\mathtt{m}, \ulcorner\psi\urcorner)$, odakle sledi da $PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\psi\urcorner)$. D2 se dokazuje formalizacijom u PA upravo opisanog dokaza za D1, a D3 je posledica činjenice da se nadovezivanjem dokaza dobija dokaz.

Napomenimo da se u dokazu svostva D2 bitno koristi Σ_1 predstavljivost relacije $Prov(m, n)$. Naime, postoje primeri Π_1 predstavljanja $Prov(m, n)$ za koje je odgovarajuća rečenica $Con(PA)$ dokaziva u PA.

A.10.10 Druga Gödelova teorema nepotpunosti

Neka je $Con(PA)$ *formula* $\neg\mathtt{Pr}(\ulcorner \mathtt{0} = \mathtt{1}\urcorner)$ *i neka je* φ *dijagonalizacija formule* $\neg\mathtt{Pr}(x)$*. Tada*

$$PA \vdash Con(PA) \Leftrightarrow \varphi.$$

Posebno, ako je teorija PA neprotivrečna, onda $PA \not\vdash Con(PA)$*.*

Dokaz

Kako je formula $\mathtt{0} = \mathtt{1} \Rightarrow \varphi$ valjana, na osnovu D1 imamo da

$$PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner \mathtt{0} = \mathtt{1} \Rightarrow \varphi\urcorner),$$

odakle po D3

$$PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner \mathtt{0} = \mathtt{1}\urcorner) \Rightarrow \mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner),$$

odakle kontrapozicijom dobijamo

$$PA \vdash \neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Rightarrow \neg\mathtt{Pr}(\ulcorner \mathtt{0} = \mathtt{1}\urcorner).$$

S obzirom da $PA \vdash \varphi \Leftrightarrow \neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ (lema A.10.8), kao i da je $Con(PA)$ upravo rečenica $\neg\mathtt{Pr}(\ulcorner \mathtt{0} = \mathtt{1}\urcorner)$, imamo da

$$PA \vdash \varphi \Rightarrow Con(PA).$$

S druge strane, iz $PA \vdash \varphi \Rightarrow \neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ i D1 sledi da

$$PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi \Rightarrow \neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner),$$

odakle na osnovu D3 dobijamo da

$$PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Rightarrow \mathtt{Pr}(\ulcorner\neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner). \tag{A.7}$$

S druge strane, po D2

$$PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Rightarrow \mathtt{Pr}(\ulcorner\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner). \tag{A.8}$$

Primenom prvo D1 a zatim D3 na valjanu formulu

$$\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Rightarrow (\neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Rightarrow \mathtt{0} = \mathtt{1})$$

dobijamo da

$$PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner) \Rightarrow \mathtt{Pr}(\ulcorner\neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Rightarrow \mathtt{0} = \mathtt{1}\urcorner).$$

Primenom D3 na konsekvent (desnu stranu implikacije) u gornjoj formuli, na osnovu tranzitivnosti implikacije dobijamo da

$$PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner) \Rightarrow (\mathtt{Pr}(\ulcorner\neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner \Rightarrow \mathtt{Pr}(\ulcorner\mathtt{0} = \mathtt{1}\urcorner),$$

pa primenom (A.7) i (A.8) dobijamo da

$$PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Rightarrow \mathtt{Pr}(\ulcorner\mathtt{0} = \mathtt{1}\urcorner),$$

odakle primenom prvo kontrapozicije, a zatim zamene ekvivalenata dobijamo da

$$PA \vdash Con(PA) \Rightarrow \varphi.$$

Preostali deo tvrđenja sledi iz prve Gödelove teoreme nepotpunosti.

□

Upravo prikazani dokaz u slučaju teorije PA se može sprovesti u svakoj teoriji prvoga reda sa rekurzivnim skupom aksioma koja zadovoljava uslov da se u njoj mogu predstaviti aritmetičke funkcije i relacije Σ_1 formulama. Kako teorija ZFC zadovoljava ove uslove, imamo da

$$\mathrm{ZFC} \nvdash Con(\mathrm{ZFC})$$

ukoliko je teorija ZFC neprotivrečna.

Dodatak B

Forsing

B.1 Separativna uređenja

B.1.1 Definicija Neka je $\langle \mathcal{P}, \leqslant \rangle$ proizvoljno parcijalno uređenje.

- $U \subseteq \mathcal{P}$ je *rez* ako za svako $p \in U$ važi $(\cdot, p] \subseteq U$;
- Rez $U \subseteq \mathcal{P}$ je *regularan* ako za svako $p \in \mathcal{P} \setminus U$ postoji $q \leqslant p$ tako da je $(\cdot, q] \cap U = 0$;
- Neka uređenje $\mathcal{P}$ nema minimalnih elemenata. Za $p, q \in \mathcal{P}$ kažemo da su *kompatibilni* ako je

  $$(\cdot, p] \cap (\cdot, q] \neq 0.$$

  U suprotnom za p i q kažemo da su *inkompatibilni*, u oznaci $p \perp q$. Posebno, ako je $\mathcal{P}$ bezatomična Booleova algebra, onda za $a, b \in \mathcal{B}$ kažemo da su inkompatibilni ukoliko je $(\cdot, a] \cap (\cdot, b] = \{\mathbf{0}\}$;
- $p, q \in \mathcal{P}$ su *kompatibilni preko* $G \subseteq \mathcal{P}$ ukoliko je

  $$G \cap (\cdot, p] \cap (\cdot, q] \neq 0;$$

- $G \subseteq \mathcal{P}$ je *kompatibilan* ukoliko su svaka dva njegova elementa međusobno kompatibilna;

- $\mathcal{P}$ je *separativno* ako za proizvoljne $p, q \in \mathcal{P}$ važi
$$p \nleqslant q \Rightarrow (\exists r \leqslant p) r \perp q;$$
- $D \subseteq \mathcal{P}$ je *gust* ako za svako $p \in \mathcal{P}$ postoji $q \in D$ tako da je $q \leqslant p$;
- $D \subseteq \mathcal{P}$ je *gust ispod* $p \in \mathcal{P}$ ako je skup $D \cap (\cdot, p]$ gust u $(\cdot, p]$;
- $D \subseteq \mathcal{P}$ je *predgust* ako za svako $p \in \mathcal{P}$ postoji $q \in D$ kompatibilno sa p.

B.1.2 Lema *Neka je uređenje $\mathcal{P}$ separativno. Tada važi:*

1. *Familija $X = \{(\cdot, p] \mid p \in \mathcal{P}\}$ je baza neke topologije na $\mathcal{P}$;*
2. *$(\cdot, p]$ je regularan rez za svako $p \in \mathcal{P}$;*
3. *U je regularno otvoren u topologiji generisanoj familijom X ako i samo ako je regularan rez.*

Dokaz

Kako je prva stavka očigledna a druga direktna posledica definicije separativnosti, preostaje da dokažemo poslednju stavku.

$\Leftarrow$: Neka je U regularan rez i neka $p \notin U$. Tada postoji $q \leqslant p$ tako da je $(\cdot, q] \cap U = 0$. Odavde je, $q \notin \mathrm{cl}U$, a time i $(\cdot, p] \nsubseteq \mathrm{cl}U$, pa $p \notin \mathrm{int\ cl}U$. Dakle, U je regularno otvoren.

$\Rightarrow$: Neka rez U nije regularan. Tada postoji $p \notin U$ tako da
$$(\cdot, q] \cap U \neq 0$$
za svako $q < p$. Odavde sledi da je $(\cdot, p] \subseteq \mathrm{cl}U$, pa $p \in \mathrm{int\ cl}U$. Dakle, U nije regularno otvoren. □

B.1.3 Lema *Neka je $\mathcal{P}$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata gusto u kompletnim Booleovim algebrama $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$. Tada su algebre $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ izomorfne.*

Dokaz

Treba pokazati da je odgovarajući izomorfizam korektno definisan sa

$$f(x) = \sum_{\mathcal{B}'}\{p \in P \mid p \leqslant_1 x\}, \quad x \in \mathcal{B}.$$

Ključni korak je dokaz sledećeg pomoćnog tvrđenja:

$$(\forall x \in \mathcal{B})(p \leqslant_1 x \Leftrightarrow p \leqslant_2 f(x)).$$

Neka je $x \in \mathcal{B}$ proizvoljno i neka x nije minimalni element. S obzirom na definiciju $f(x)$, to očigledno za svako $p \in P$ važi

$$p \leqslant_1 x \Rightarrow p \leqslant_2 f(x).$$

Neka je $p \in P$ i neka $p \not\leqslant_1 x$. Pošto je svaka Booleova algebra separativno uređenje, postoji $\mathbf{0} <_1 q \leqslant_1 p$ inkompatibilno sa x. Pošto je P gust u $\mathcal{B}$, možemo pretpostaviti da $q \in P$. Sada je

$$q \wedge f(x) = q \sum_{\mathcal{B}'}\{r \in P \mid r \leqslant_1 x\} = \sum_{\mathcal{B}'}\{q \wedge r \mid r \leqslant_1 x \wedge r \in P\}.$$

Ako je $\mathbf{0} <_2 q \wedge r$, onda bi zbog gustine P u $\mathcal{B}'$ postojalo $s \in P$ tako da je

$$s \leqslant_2 q \quad \text{i} \quad s \leqslant_2 r\ ,$$

pa bi bilo i

$$s \leqslant_1 q \quad \text{i} \quad s \leqslant_1 r\ ,$$

što je u kontradikciji sa činjenicom da su q i x inkompatibilni. Dakle,

$$q \wedge f(x) = \sum_{\mathcal{B}'}\{q \wedge r \mid r \leqslant_1 x \wedge r \in P\} = \mathbf{0},$$

pa ne može biti $p \leqslant_2 f(x)$. □

Direktna posledica prethodne dve leme je sledeća

B.1.4 Teorema *Za svako separativno uređenje postoji do na izomorfizam jedinstvena kompletna Booleova algebra u koju se ono gusto utapa.*

Posebno, jedinstvenu kompletnu Booleovu algebru u koju se separativno uređenje $\mathcal{P}$ gusto utapa označavaćemo sa r.o.$\mathcal{P}$.

Nadalje ćemo podrazumevati da radimo isključivo sa separativnim uređenjima bez minimalnih elemenata sa maksimumom, koji ćemo uniformno označavati sa $\mathbf{1}$. Navedimo nekoliko važnih primera ovakvih uređenja.

B.1.5 Primer Neka je κ beskonačan kardinal i neka je $Fn(\kappa \times \omega, 2)$ skup svih funkcija čiji je domen konačan podskup od $\kappa \times \omega$ i čiji je kodomen podskup od 2. Tada je

$$\langle Fn(\kappa \times \omega, 2), \supseteq\rangle$$

separativno uređenje bez minimalnih elemenata, čiji je maksimum 0. Primetimo da su $p, q \in Fn(\kappa \times \omega, 2)$ inkompatibilni ako i samo ako postoji $x \in \mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q)$ tako da je $p(x) \neq q(x)$.

B.1.6 Primer Neka je κ beskonačan kardinal i neka je $coll(\kappa, \omega)$ skup svih funkcija p čiji je domen konačan podskup od $\kappa \times \omega$ takvih da za svako $\langle \alpha, n\rangle \in \mathrm{dom}(p)$ važi da $p(\alpha, n) \in \alpha$. Tada je

$$\langle coll(\kappa, \omega) \supseteq\rangle$$

separativno uređenje bez minimalnih elemenata čiji je maksimum 0.

B.2 Definicija forsinga

Neka je M prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC i neka je

$$\mathcal{P} = \langle \mathcal{P}, \leqslant, \mathbf{1}\rangle \in M$$

separativno uređenje bez minimalnih elemenata sa maksimumom $\mathbf{1}$. Elemente uređenja $\mathcal{P}$ ćemo zvati *uslovima* i označavati ih sa p, q, r, s i t, uz korišćenje indeksa. Za uslov p kažemo da je *jači* od uslova q ukoliko je $p \leqslant q$. Skup $\mathcal{P}$*-imena* $M^{\mathcal{P}}$ definišemo rekurzivno na sledeći način:

- $M_0^{\mathcal{P}} = 0$;
- $M_{\alpha+1}^{\mathcal{P}} = M_\alpha^{\mathcal{P}} \cup (M \cap P(M_\alpha^{\mathcal{P}} \times \mathcal{P}))$;
- $M_\alpha^{\mathcal{P}} = \bigcup\limits_{\xi<\alpha} M_\xi^{\mathcal{P}}$, u slučaju graničnog $\alpha \in M$;
- $x \in M^{\mathcal{P}} \Leftrightarrow (\exists \alpha \in M)(x \in M_\alpha^{\mathcal{P}})$.

Dakle, $M_1^{\mathcal{P}} = \{0\}$, $M_2^{\mathcal{P}} = \{0\} \cup (M \cap P(\{0\} \times \mathcal{P}))$ itd. Imena ćemo označavati sa π, σ i τ, uz korišćenje indeksa. *Rang* imena σ je najmanji ordinal $\alpha \in M$ takav da $\sigma \in M_{\alpha+1}^{\mathcal{P}}$.

Kanonsko ime $\check{x}$ proizvoljnog skupa $x \in M$ definišemo na sledeći način:

- $\check{0} = 0$;
- $\check{x} = \{\langle \check{y}, \mathbf{1} \rangle \mid y \in x\}$.

Skup $G \subseteq \mathcal{P}$ je *filter* u $\mathcal{P}$ ako važi:

- $\mathbf{1} \in G$;
- za svako $p, q \in G$ postoji $r \in G$ tako da je $r \leqslant p$ i $r \leqslant q$;
- za svako $p \in G$ je $[p, \cdot) \subseteq G$.

Filter G u $\mathcal{P}$ je *M-generički* ako seče sve guste skupove u $\mathcal{P}$ koji su elementi modela M.

Pokažimo da za svako $p \in \mathcal{P}$ postoji M generički filter G u $\mathcal{P}$ takav da $p \in G$. Zaista, kako je M prebrojiv, to se svi gusti skupovi u $\mathcal{P}$ koji se nalaze u M mogu poređati u niz, recimo $\langle D_n \mid n \in \omega \rangle$. Pošto je svaki od ovih skupova gust ispod p, to postoji niz uslova $\langle p_n \mid n \in \omega \rangle$ takav da $p_n \in D_n,\ n \in \omega$, kao i

$$p \geqslant p_0 \geqslant p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots$$

Traženi M-generički filter G je dobro definisan sa

$$G = \{q \in \mathcal{P} \mid (\exists n \in \omega) p_n \leqslant q\}.$$

Varijanta prethodnog u slučaju Booleovsko-vrednsonog pristupa je poznata i kao Rasiowa-Sikorski lema.

B.2.1 Definicija Neka su, u M, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ kompletne Booleove algebre i neka je $h : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'$ Booleovski homomorfizam. Kažemo da je homomorfizam h *M-kompletan* ako za svako $X \in M \cap P(\mathcal{B})$ važi

$$h[\sum_{\mathcal{B}} X] = \sum_{\mathcal{B}'} h[X].$$

B.2.2 Zadatak Neka je $\mathcal{B}$ kompletna Booleova algebra i neka je $D \subseteq \mathcal{B}$. Dokazati da je D gust (u smislu uređenja), ako i samo ako je $\sum D = \mathbf{1}$.

B.2.3 Zadatak Neka je M prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC, $\mathcal{B}$ u M kompletna bezatomična Booleova algebra i neka je $h : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{2}$ M-kompletan homomorfizam. Dokazati da je

$$G_h = \{b \in \mathcal{B} \mid h(b) = \mathbf{1}\}$$

M-generički ultrafilter u $\mathcal{B}$.

B.2.4 Rasiowa-Sikorski lema *Neka je, u M, $\mathcal{B}$ kompletna bezatomična Booleova algebra i neka je $a > \mathbf{0}$. Tada postoji M-kompletan homomorfizam $h : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{2}$ takav da je $h(a) = \mathbf{1}$.*

Dokaz S obzirom da je M prebrojiv, svi gusti podskupovi od $\mathcal{B}$ koji su u M se mogu poređati u niz, recimo $\langle D_n \mid n < \omega\rangle$. Slično kao u slučaju separativnih uređenja, konstruiše se prebrojiv niz

$$a \geqslant b_0 \geqslant b_1 \geqslant \cdots$$

takav da $b_n \in D_n$. Skup $\{a\} \cup \{b_n \mid n < \omega\}$ ima svojstvo konačnog preseka, pa je sadržan u nekom ultrafilteru G. Traženi M-kompletni homomorfizam $h : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{2}$ je dobro definisan sa

$$h(x) = \mathbf{1} \Leftrightarrow b \in G.$$

$\square$

B.2.5 Lema *Ako je $\mathcal{P}$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata, onda ni jedan M-generički filter u $\mathcal{P}$ ne pripada modelu M.*

Dokaz

Neka je G proizvoljan M-generički filter u $\mathcal{P}$. Tada je skup

$$D = \mathcal{P} \setminus G$$

gust u $\mathcal{P}$. Zaista, kako je $\mathcal{P}$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata, za svako $p \in \mathcal{P}$ postoje $q, r \in \mathcal{P}$ takvi da je $q \leqslant p$, $r \leqslant p$ i $q \perp r$. Kako je G kompatibilan skup, to bar jedan od elemenata q i r pripada skupu D, odakle sledi da je D gust u $\mathcal{P}$.

Pošto G seče sve guste podskupove od $\mathcal{P}$ koji su u M, na osnovu prethodnog sledi da $D \notin M$, a odatle i $G \notin M$. $\square$

Za proizvoljno ime σ, nejgovu G-interpretaciju $\mathtt{I}_G(\sigma)$ definišemo rekurzivno sa

$$\mathtt{I}_G(\sigma) = \{\mathtt{I}_G(\tau) \mid (\exists p \in G)\langle \tau, p\rangle \in \sigma\}.$$

B.2.6 Zadatak Za proizvoljan skup $x \in M$ dokazati da je $\check{x}_G = x$.

Uputstvo

Tvrđenje se dokazuje indukcijom po rangu. Za proizvoljan $x \in M$ imamo:

$$\begin{aligned} \mathtt{I}_G(\check{x}) &= \{\mathtt{I}_G(\check{y}) \mid y \in x\} \\ &= \{y \mid y \in x\} \text{ (induktivna hipoteza)} \\ &= x. \end{aligned}$$

$\square$

B.2.7 Zadatak Navesti primer imena $\sigma \in M^{\mathcal{P}}$ za koje je $\mathtt{I}_G(\sigma) = G$.

Uputstvo
Uočimo ime $\sigma = \{\langle \check{p}, p\rangle \mid p \in \mathcal{P}\}$. Tada:

$$\begin{aligned} \mathtt{I}_G(\sigma) &= \{\mathtt{I}_G(\check{p}) \mid \langle \check{p}, p\rangle \in \sigma \wedge p \in G\} \\ &= \{p \mid p \in G\} \\ &= G. \end{aligned}$$

$\square$

Ime σ konstruisano u prethodnom zadatku zovemo i *kanonskim imenom* filtera G i označavamo ga sa $\tilde{G}$. Pređimo na definicije generičkog proširenja i forsinga.

B.2.8 Definicija Uz prethodnu simboliku, skup

$$M[G] = \{\mathtt{I}_G(\sigma) \mid \sigma \in M^{\mathcal{P}}\}$$

zovemo i *generičkim proširenjem* modela M.

Iz definicije neposredno sledi da je $M[G]$ tranzitivan skup, a na osnovu prethodna dva zadatka imamo da $G \in M[G]$ kao i da je $M \subseteq M[G]$.

B.2.9 Definicija Kažemo da uslov p *forsira* rečenicu $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, u oznaci

$$p \Vdash \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n),$$

ako i samo ako za svaki M-generički filter G u $\mathcal{P}$ takav da $p \in G$ imamo da

$$M[G] \models \varphi[\mathtt{I}_G(\sigma_1), \ldots, \mathtt{I}_G(\sigma_n)].$$

U sledećim jednostavnim zadacima navodimo neke elementarne osobine forsinga.

B.2.10 Zadatak Dokazati da su sledeći iskazi ekvivalentni:

1. $p \Vdash \varphi$;
2. $(\forall q \leqslant p) q \Vdash \varphi$;
3. $(\forall q \leqslant p)(\exists r \leqslant q)(r \Vdash \varphi)$, tj. skup

$$D = \{q \leqslant p \mid q \Vdash \varphi\}$$

je gust ispod p.

B.2.11 Zadatak Dokazati:

1. $p \Vdash \varphi \wedge \psi$ akko $p \Vdash \varphi$ i $p \Vdash \psi$;
2. $p \Vdash \neg\varphi$ akko za svaki uslov $q \leqslant p$, $q \nVdash \varphi$;
3. $p \Vdash \varphi \vee \psi$ akko za svako $q \leqslant p$ postoji $r \leqslant q$ tako da $r \Vdash \varphi$ ili $r \Vdash \psi$.

Sada smo spremni da formulišemo ključnu forsing teoremu:

B.2.12 Forsing teorema
Neka je M prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC, $\mathcal{P} \in M$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata i neka je G M-generički filter u $\mathcal{P}$. Tada:

1. *$M[G]$ je tranzitivan skup;*
2. *$M \subseteq M[G]$ i $G \in M[G]$;*
3. *$M[G] \models ZFC$;*
4. *M i $M[G]$ imaju iste ordinale;*
5. *Ako je N tranzitivan model teorije ZFC takav da je $M \subseteq N$ i da $G \in N$, onda je i $M[G] \subseteq N$;*

6. *Forsing relacija je definabilna u* M*;*

7. $M[G] \models \varphi[\mathtt{I}_G(\sigma_1), \ldots, \mathtt{I}_G(\sigma_n)]$ *akko postoji uslov* $p \in G$ *takav da* $p \Vdash \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$*;*

8. $p \Vdash \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *akko za svaki* M*-generički filter* G *u* $\mathcal{P}$ *takav da* $p \in G$ *važi* $M[G] \models \varphi[\mathtt{I}_G(\sigma_1), \ldots, \mathtt{I}_G(\sigma_n)]$.

Prve dve stavke smo već proverili, pretposlednja je direktna posledica definicije forsinga, a poslednja stavka je baš sama definicija. Što se tiče pete stavke, ako je $M \subseteq N$ onda je i $M^{\mathcal{P}} \subseteq N$, a kako i $G \in M$, zbog $N \models$ ZFC mora biti i

$$((\exists p \in G)(\langle \tau, p \rangle \in \sigma))^N \Leftrightarrow (\exists p \in G)(\langle \tau, p \rangle \in \sigma)$$

za proizvoljne $\sigma, \tau \in M^{\mathcal{P}}$ i $p \in \mathcal{P}$, odakle sledi da $\mathtt{I}_G(\sigma) \in N$ za svako $\sigma \in M^{\mathcal{P}}$, a time i $M[G] \subseteq N$.

Da M i $M[G]$ imaju istu visinu, tj. da imaju iste ordinale, neposredno sledi iz činjenice da je za svako ime σ

$$\mathrm{rank}(\mathtt{I}_G(\sigma)) \leqslant \mathrm{rank}(\sigma),$$

što se sasvim lako proverava $\in$-indukcijom.

Kako je $M[G]$ neprazan tranzitivan skup, u $M[G]$ važe aksiome praznog skupa, ekstenzionalnosti i regularnosti. Pošto je

$$\mathtt{I}_G(\check{\omega}) = \omega,$$

imamo da $\omega \in M[G]$, pa u $M[G]$ važi i aksioma beskonačnosti. Sledeći zadatak posvećen je direktnom dokazu da u $M[G]$ važe aksiome para i unije.

B.2.13 Zadatak Neka je $M[G]$ generičko proširenje prebrojivog tranzitivnog modela M teorije ZFC. Dokazati:

1. Neka $x, y \in M[G]$ i neka su $\tilde{x}, \tilde{y} \in M^{\mathcal{P}}$ imena takva da je $\mathtt{I}_G(\tilde{x}) = x$ i $\mathtt{I}_G(\tilde{y}) = y$. Za ime $\sigma = \{\langle \tilde{x}, \mathbf{1} \rangle, \langle \tilde{y}, \mathbf{1} \rangle\}$ dokazati da je
$$\mathtt{I}_G(\sigma) = \{x, y\};$$
2. Neka $x \in M[G]$ i neka je $\tilde{x} \in M^{\mathcal{P}}$ ime takvo da je $\mathtt{I}_G(\tilde{x}) = x$. Za ime
$$\tau = \{\langle \pi, p \rangle \mid (\exists \langle \sigma, q \rangle \in \tilde{x}) \exists r (\langle \pi, r \rangle \in \sigma \wedge p \leqslant r \wedge p \leqslant q)\}$$
dokazati da je $\mathtt{I}_G(\tau) = \bigcup x$.

Tačke 3 i 6 ćemo dokazati u sledećoj sekciji. Čitalac koji ne želi da se upušta u tehničke detalje ovog dokaza može bez problema preskočiti ovu sekciju.

B.2.14 Lema *Neka je, u M, A antilanac u $\mathcal{P}$ i neka su σ_q, $q \in A$ proizvoljna imena iz $M^{\mathcal{P}}$. Tada postoji ime $\pi \in M^{\mathcal{P}}$ tako da*
$$q \Vdash \pi = \sigma_q$$
za svako $q \in A$.

Dokaz
U M π definišemo sa
$$\pi = \bigcup_{q \in A} \{\langle \tau, r \rangle \mid r \leqslant q \wedge r \Vdash \tau \in \sigma_q \wedge \tau \in \mathrm{dom}(\sigma_q)\}.$$
Primetimo da tačka 6 forsing teoreme obezbeđuje korektnost prethodne definicije.

Neka je $q \in A$ proizvoljno i neka je G proizvoljan M-generički filter u $\mathcal{P}$ takav da $q \in G$. Na osnovu forsing teoreme dovoljno je pokazati da je
$$\mathtt{I}_G(\pi) = \mathtt{I}_G(\sigma_q).$$
S jedne strane, neka je $a \in \mathtt{I}_G(\pi)$ proizvoljno. Tada postoje ime $\tilde{a} \in M^{\mathcal{P}}$ i uslov $r \in G$ tako da $\langle \tilde{a}, r \rangle \in \pi$. Iz definicije imena π sledi da

postoji uslov $p \in A$ takav da je $r \leqslant p$, $r \Vdash \tilde{a} \in \sigma_p$ i $\tilde{a} \in \mathrm{dom}(\sigma_p)$. Kako je A antilanac i kako su uslovi r i q kompatibilni, mora biti $p = q$. Dakle, $r \Vdash \tilde{a} \in \sigma_q$, odakle po forsing teoremi sledi da $a \in \mathtt{I}_G(\sigma_q)$. Ovim smo pokazali da je $\mathtt{I}_G(\pi) \subseteq \mathtt{I}_G(\sigma_q)$.

S druge strane, neka je $b \in \mathtt{I}_G(\sigma_q)$ proizvoljno. Tada postoje ime $\tilde{b} \in M^{\mathcal{P}}$ i uslov $p \in G$ tako da $\langle \tilde{b}, p \rangle \in \sigma_q$. Kako $p, q \in G$, postoji $r \in G$ tako da je $r \leqslant p$ i $r \leqslant q$. Sada $\langle \tilde{b}, r \rangle \in \pi$, pa $b \in \mathtt{I}_G(\pi)$, čime je i obratna inkluzija dokazana. □

B.2.15 Princip maksimalnosti *Ako $p \Vdash \exists x \varphi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)$, onda postoji ime $\pi \in M^{\mathcal{P}}$ tako da $p \Vdash \varphi(\pi, \tau_1, \ldots, \tau_n)$.*

Dokaz

Radi pojednostavljenja notacije parametre $\tau_1, \ldots, \tau_n$ ćemo izostaviti. Primenom Zornove leme u M, neka je skup $A \in M$ takav da važi:

- A je antilanac u $\mathcal{P}$;
- $(\forall q \in A)(q \leqslant p \wedge (\exists \sigma \in M^{\mathcal{P}})(q \Vdash \varphi(\sigma)))$;
- A je maksimalan u odnosu na prethodne dve stavke.

Koristeći AC u M, izaberimo imena $\sigma_q \in M^{\mathcal{P}}$, $q \in A$, tako da za svako $q \in A$ važi

$$q \Vdash \varphi(\sigma_q).$$

Na osnovu prethodne leme postoji ime $\pi \in M^{\mathcal{P}}$ tako da

$$q \Vdash \pi = \sigma_q$$

za svako $q \in A$. Dokažimo da $p \Vdash \varphi(\pi)$. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji uslov $r \leqslant p$ takav da $r \Vdash \neg\varphi(\pi)$. Kako $p \Vdash \exists x \varphi(x)$, postoje uslov $s \leqslant r$ i ime $\tau \in M^{\mathcal{P}}$ tako da $s \Vdash \varphi(\tau)$. Dalje, za svako $q \in A$ imamo da $q \Vdash \varphi(\pi)$, a kako $s \Vdash \neg\varphi(\pi)$, skup $A \cup \{s\}$ je antilanac u $\mathcal{P}$, što je u kontradikciji sa maksimalnošću A. □

Ispostavlja se da su generičke ekstenzije iste ukoliko se forsira po uređenjima od kojih se jedno gusto utapa u drugo. Naime, ako je $\mathcal{P}$ gusto poduređenje uređenja $\mathcal{Q}$ onda na osnovu zadatka B.2.10 sledi:

- Za proizvoljno $p \in \mathcal{P}$,

$$p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi \quad \text{akko} \quad p \Vdash_{\mathcal{Q}} \varphi;$$

- Ako $q \in \mathcal{Q}$ i $q \Vdash_{\mathcal{Q}} \varphi$, onda je skup $\{p \in \mathcal{P} \mid p \Vdash_{\mathcal{Q}} \varphi\}$ gust ispod q.

Posebno, isto važi i ako je

$$\mathcal{Q} = \mathcal{B} = \text{r.o.}\mathcal{P}.$$

Prelazimo na definiciju forsinga preko Booleovsko vrednosnih modela, nagoveštenu u forsing planu iz uvoda u poglavlje. Kako bi smo pojednostavili argumentaciju, podrazumevamo da se nalazimo unutar nekog prebrojivog tranzitivnog modela M teorije ZFC. Konstrukciju koja sledi treba relativizovati na pomenuti model M.

Neka je $\mathcal{B}$ kompletna bezatomična Booleova algebra. Booleovski univerzum $V^{\mathcal{B}}$ (u relativizovanom obliku $M^{\mathcal{B}}$) definišemo rekurzivno na sledeći način:

- $V_0^{\mathcal{B}} = 0$;
- $V_{\alpha+1}^{\mathcal{B}}$ je skup svih funkcija čiji je domen podskup od $V_\alpha^{\mathcal{B}}$ i čiji je kodomen podskup od $\mathcal{B}$;
- $V_\alpha^{\mathcal{B}} = \bigcup_{\xi<\alpha} V_\xi^{\mathcal{B}}$, u slučaju graničnog $\alpha > 0$;
- $x \in V^{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \exists\alpha(x \in V_\alpha^{\mathcal{B}})$.

Elemente klase $V^{\mathcal{B}}$ ćemo zvati imenima i označavaćemo ih, isto kao i u slučaju separativnih uređenja, sa π, σ i τ, uz korišćenje indeksa. *Rang* imena σ je najmanji ordinal α takav da $\sigma \in V_\alpha^{\mathcal{P}}$.

Vidimo da se definicije $\mathcal{B}$-imena i $\mathcal{P}$-imena razlikuju u tome što u Booleovskoj varijanti ne uzimamo bilo kakve podskupove od $V^{\mathcal{B}} \times \mathcal{B}$, već samo funkcije. Razlog za ovo je kompletnost algebre $\mathcal{B}$. Naime, ako je $\mathcal{P} = \mathcal{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$, i ako je σ proizvoljno $\mathcal{P}$-ime, onda za $\mathcal{B}$-ime τ definisano sa

$$\tau(x) = \sum \{b \in \mathcal{B} \mid \langle x, b\rangle \in \sigma\}, \quad x \in \mathrm{dom}(\sigma)$$

važi

$$\mathbf{1} \Vdash_{\mathcal{P}} \sigma = \tau.$$

Booleovsku vrednost definišemo rekurzivno i po rangu u $V^{\mathcal{B}}$ i po složenosti rečenica jezika $\mathcal{L}_{ZFC} \cup V^{\mathcal{B}}$ na sledeći način:

- $\|\tau \in \sigma\| = \sum\limits_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} (\sigma(x) \wedge \|x = \tau\|)$
- $\|\tau \subseteq \sigma\| = \prod\limits_{x \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(x)^c \vee \|x \in \sigma\|)$
- $\|\tau = \sigma\| = \|\tau \subseteq \sigma\| \wedge \|\sigma \subseteq \tau\|$
- $\|\neg\varphi\| = \|\varphi\|^c$
- $\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \wedge \|\psi\|$
- $\|\varphi \vee \psi\| = \|\varphi\| \vee \|\psi\|$
- $\|\exists x \varphi\| = \sum\limits_{\tau \in V^{\mathcal{B}}} \|\varphi(\tau)\|$
- $\|\forall x \varphi\| = \prod\limits_{\tau \in V^{\mathcal{B}}} \|\varphi(\tau)\|.$

B.2.16 Lema $\langle V^{\mathcal{B}}, \| \ \| \rangle$ *je* $\mathcal{B}$*–model.*

Dokaz

S obzirom na definiciju Booleovsko vrednosnog modela dovoljno je pokazati sledeće:

1. $\|\tau = \tau\| = \mathbf{1}$

2. $\tau(x) \leqslant \|x \in \tau\|, \quad x \in \mathrm{dom}(\tau)$

3. $\|\tau = \sigma\| = \|\sigma = \tau\|$

4. $\|\tau = \sigma\| \wedge \|\sigma = \rho\| \leqslant \|\tau = \rho\|$

5. $\|\tau \in \sigma\| \wedge \|\sigma = \rho\| \leqslant \|\tau \in \rho\|$

6. $\|\tau \in \sigma\| \wedge \|\tau = \rho\| \leqslant \|\rho \in \sigma\|$.

(1.),(2.) : Dokaz izvodimo simultano indukcijom po rangu u $V^{\mathcal{B}}$ imena τ. Neka je $x \in \mathrm{dom}(\tau)$ proizvoljno. Po induktivnoj hipotezi imamo da je tada $\|x = x\| = \mathbf{1}$, pa je i $\tau(x) \wedge \|x = x\| = \tau(x)$, odakle sledi da je

$$\tau(x) \leqslant \sum_{y \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(y) \wedge \|x = y\|) \;=\; \|x \in \tau\|.$$

Koristeći ovo, dobijamo da je

$$\|\tau \subseteq \tau\| = \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(x)^c \vee \|x \in \tau\|) \geqslant \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(x)^c \vee \tau(x)) \;=\; \mathbf{1},$$

odakle sledi da je $\|\tau = \tau\| = \mathbf{1}$.

(3.): Sledi direktno iz definicije.

(4.),(5.),(6.): Simultano indukcijom po trojkama rangova u $V^{\mathcal{B}}$ od τ, σ i ρ uređenim leksikografski.

$$\begin{aligned}
\|\tau \subseteq \sigma\| \wedge \|\sigma = \rho\| &= \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau)} ((\tau(x)^c \wedge \|\sigma = \rho\|) \vee (\|x \in \sigma\| \wedge \|\sigma = \rho\|)) \\
&\leqslant \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(x)^c \vee (\|x \in \sigma\| \wedge \|\sigma = \rho\|)) \\
&\leqslant \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(x)^c \vee \|x \in \rho\|) \\
&= \|\tau \subseteq \rho\|.
\end{aligned}$$

Sasvim slično i $\|\sigma \subseteq \tau\| \wedge \|\sigma = \rho\| \leqslant \|\rho \subseteq \tau\|$.

$$\begin{aligned}
\|\tau \in \sigma\| \wedge \|\sigma = \rho\| &= \sum_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sigma(x) \wedge \|x = \tau\| \wedge \|\sigma = \rho\| \\
&\leqslant \sum_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \|x \in \sigma\| \wedge \|\sigma = \rho\| \wedge \|x = \tau\| \\
&\leqslant \sum_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \|x \in \rho\| \wedge \|x = \tau\| \\
&\leqslant \sum_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \|\tau \in \rho\| \\
&= \|\tau \in \rho\|.
\end{aligned}$$

Sasvim slično se pokazuje i (6.). $\square$

B.2.17 Zadatak Dokazati da je sa

$$\|\varphi\| = \sup_{\mathrm{r.o.}\mathcal{P}}\{p \in \mathcal{P} \mid p \Vdash \varphi\}$$

definisana Booleovska vrednost na univerzumu $V^{\mathrm{r.o.}\mathcal{P}}$ koja se poklapa sa upravo uvedenom vrednošću.

Sledeća teorema je Booleovska varijanta principa maksimalnosti.

B.2.18 Teorema $\langle V^{\mathcal{B}}, \|\ \|\rangle$ *je pun model.*

Dokaz

Neka je W maksimalan antilanac u $\mathcal{B}$ i neka je $\{\tau_u \mid u \in W\}$ proizvoljan skup imena. Dalje, neka je

$$D = \bigcup_{u \in W} \mathrm{dom}(\tau_u).$$

Za svako $u \in W$ definišimo funkciju (ime) $\tau_u^* : D \longrightarrow \mathcal{B}$ sa

$$\tau_u^*(x) = \begin{cases} \mathbf{0} & , \ x \in D \setminus \mathrm{dom}(\tau_u) \\ \tau_u(x) & , \ x \in \mathrm{dom}(\tau_u) \end{cases}.$$

Pokažimo da je

$$||\tau_u = \tau_u^*|| \ .$$

S jedne strane, ako $x \notin \mathrm{dom}(\tau_u)$, onda je $\tau_u^*(x) = 0$, pa je

$$\tau_u^*(x)^c \vee ||x \in \tau_u|| = \mathbf{1}.$$

Ako $x \in \mathrm{dom}(\tau)$, onda je $||x \in \tau_u|| \geqslant \tau_u(x) = \tau_u^*(x)$, pa je opet

$$\tau_u^*(x)^c \vee ||x \in \tau_u|| = \mathbf{1}.$$

Dakle, $||\tau_u^* \subseteq \tau_u|| = \prod_{x \in D} (\tau_u^*(x)^c \vee ||x \in \tau_u||) = \mathbf{1}$.

S druge strane,

$$\begin{aligned} ||\tau_u \subseteq \tau_u^*|| &= \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau_u)} (\tau_u(x)^c \vee ||x \in \tau_u^*||) \\ &\geqslant \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau_u)} (\tau_u(x)^c \vee \tau_u^*(x)) \\ &= \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau_u)} (\tau_u(x)^c \vee \tau_u(x)) \\ &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Neka je $\tau : D \longrightarrow B$ funkcija definisana sa

$$\tau(x) = \sum_{u \in W} (u \wedge \tau_u^*(x)), \quad x \in D.$$

Pokažimo da za svako $x \in D$ i svako $u \in W$ važi

$$u \leqslant \tau(x)^c \vee \tau_u^*(x) \quad \text{i} \quad u \leqslant \tau(x) \vee \tau_u^*(x)^c.$$

Zaista,

$$\begin{aligned} u \wedge (\tau(x) \vee \tau_u^*(x)') &= (u \wedge \sum_{v \in W} v \wedge \tau_u^*(x)) \ \vee \ (u \wedge \tau_u^*(x)^c) \\ &= (u \wedge \tau_u^*(x)) \vee (u \wedge \tau_u^*(x)^c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= u \\ u \wedge (\tau(x)^c \vee \tau_u^*(x)) &= (u \wedge \tau(x)^c) \vee (u \wedge \tau_u^*(x)) \\ &= (u \wedge \tau(x)^c) \vee (u \wedge \tau(x)) \\ &= u. \end{aligned}$$

Neka je $u \in W$ proizvoljno. Tada važi:

$$\begin{aligned} u \wedge ||\tau \subseteq \tau_u^*|| &= u \wedge \prod_{x \in D} (\tau(x)^c \vee ||x \in \tau_u^*||) \\ &\geqslant \prod_{x \in D} u \wedge (\tau(x)^c \vee \tau_u^*(x)) \\ &= \prod_{x \in D} u \\ &= u. \end{aligned}$$

Sasvim slično se pokazuje da je i $||\tau_u^* \subseteq \tau|| = u$, odakle sledi da je

$$u \leqslant ||\tau = \tau_u^*||.$$

Pošto je $||\tau_u = \tau_u^*|| = \mathbf{1}$ i pošto je

$$||\tau = \tau_u^*|| \wedge ||\tau_u^* = \tau_u|| \leqslant ||\tau = \tau_u||,$$

to je

$$u \leqslant ||\tau = \tau_u||,$$

čime je tvrđenje dokazano. $\square$

Za svaki skup x definišemo njegovo *kanonsko ime* $\check{x}$ isto kao i u slučaju separativnih uređenja:

- $\check{0} = 0$
- $\check{x} = \{\langle \check{y}, \mathbf{1} \rangle \mid y \in x\}$.

B.2.19 Lema *Neka su x, y proizvoljni. Tada važi:*

1. $x = y \Leftrightarrow \|\check{x} = \check{y}\| = \mathbf{1}$

2. $x \in y \Leftrightarrow \|\check{x} \in \check{y}\| = \mathbf{1}$.

Dokaz

Dovoljno je pokazati sledeće:

(a) $x \neq y \Rightarrow \|\check{x} = \check{y}\| = \mathbf{0}$

(b) $x \notin y \Rightarrow \|\check{x} \notin \check{y}\| = \mathbf{0}$.

(a) i (b) simultano pokazujemo transfinitnom indukcijom po parovima rangova u $V^{\mathcal{B}}$ od $\check{x}$ i $\check{y}$ uređenim leksikografski.

Neka je $x \neq y$. S obzirom na očiglednu simetriju, razmotrićemo samo slučaj kada postoji $z \in x$ tako da $z \notin y$. Za takvo z je uz odgovarajuću induktivnu hipotezu i $\|\check{z} \in \check{y}\| = \mathbf{0}$ i $\|\check{z} = \check{z}\| = \mathbf{1}$. Sada je

$$\begin{aligned}
\|\check{z} \in \check{x}\| &= \sum_{t \in x} \check{x}(\check{t}) \wedge \|\check{t} = \check{z}\| \\
&= \sum_{t \in x} \|\check{t} = \check{z}\| \\
&\geqslant \|\check{z} = \check{z}\| = \mathbf{1} \\
\|\check{x} \subseteq \check{y}\| &= \prod_{t \in x} (\check{x}(\check{t})^c \vee \|\check{t} \in \check{y}\|) \\
&= \prod_{t \in x} \|\check{t} \in \check{y}\| \\
&\leqslant \|\check{z} \in \check{y}\| = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Odavde neposredno sledi da je $\|\check{x} = \check{y}\| = \mathbf{0}$.

Neka $x \notin y$. Tada je za svako $z \in y$ $z \neq x$, pa je, uz odgovarajuću induktivnu hipotezu, $\|\check{z} = \check{x}\| = \mathbf{0}$. Sada je

$$\|\check{x} \in \check{y}\| = \sum_{z \in y} (\check{y}(\check{z}) \wedge \|\check{z} = \check{x}\|) = \sum_{z \in y} \mathbf{1} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

$\square$

Forsing definišemo na sledeći način:

$$b \Vdash \varphi \quad \text{akko} \quad b \leqslant \|\varphi\|.$$

B.2.20 Zadatak Neka je $\mathcal{P} = \mathcal{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Dokazati da

$$p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi \quad \text{akko} \quad p \Vdash_{\mathcal{B}} \varphi.$$

Generička proširenja definišemo na sledeći način:

- Ultrafiltrer G algebre $\mathcal{B}$ je M-generički ukoliko za svaki skup $D \in M$ koji je gust podskup od $\mathcal{B}$ važi

$$G \cap D \neq 0;$$

- $M[G] = \{\mathtt{I}_G(\sigma) \mid \sigma \in M^{\mathcal{B}}\}$, pri čemu je

$$\mathtt{I}_G(\sigma) = \{\mathtt{I}_G(\tau) \mid \tau \in \mathrm{dom}(\sigma) \wedge \sigma(\tau) \in G\}.$$

Alternativno, $M[G]$ možemo dobiti i na sledeći način:

1. Od $\mathcal{B}$-modela $M^{\mathcal{B}}$ (relativizacija $V^{\mathcal{B}}$ na M) prelazimo na $\mathbf{2}$-model $M^{\mathcal{B}}/G = \langle M^{\mathcal{B}}, \| \; \|_G\rangle$, pri čemu

$$\|\varphi\|_G = \begin{cases} \mathbf{1} & , \quad \|\varphi\| \in G \\ \mathbf{0} & , \quad \|\varphi\| \notin G \end{cases} ;$$

2. Od $M^{\mathcal{B}}/G$ dobijamo klasičan dobro zasnovan model $\langle A^*, \in^*\rangle$ na sledeći način:

   - $A^* = \{\sigma_\sim \mid \sigma \in M^{\mathcal{B}}\}$, pri čemu je

$$\sigma_\sim = \{\tau \in M^{\mathcal{B}} \mid \|\sigma = \tau\| \in G\};$$

- $\sigma_\sim \in^* \tau_\sim$ akko $|\sigma \in \tau\} \in G$.

3. $M[G]$ je tranzitivni kolaps modela $\langle A^*, \in^* \rangle$.

Forsing teorema ima istu formulaciju kao i u slučaju separativnih uređenja.

Sledeći zadatak se dodatno odnosi na ujednačavanje pristupa forsingu preko separativnih uređenja i preko kompletnih Booleovih algebri:

B.2.21 Zadatak Neka je M prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC, $\mathcal{P} \in M$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata, $\mathcal{B} = \text{r.o.}\mathcal{P}$ i neka je G M-generički filter u $\mathcal{P}$.

1. Dokazati da je
$$G' = \{b \in \mathcal{B} \mid (\exists p \in \mathcal{P})(p \leqslant b\}$$
M-generički ultrafilter u $\mathcal{B}$.

2. Dokazati da je $M[G] = M[G']$.

B.3 Dokaz forsing teoreme

Ova tehnička sekcija nije neophodna prilikom prvog čitanja, jer se u primenama koristi forsing teorema, ne i tehnika njenog dokaza.

Prvo ćemo dati definiciju unutrašnjeg (sintaksnog) forsinga $\Vdash^*$ i pokazati da
$$p \Vdash \varphi \ \text{ akko } \quad M \models p \Vdash^* \varphi.$$

Zatim ćemo dokazati da $M[G] \models \text{ZFC}$, i na taj način kompletirati dokaz forsing teoreme.

Vezano za $V^{\mathcal{B}}$ (odnosno $M^{\mathcal{B}}$), u ovoj sekciji ćemo takođe pokazati da svaka aksioma teorije ZFC ima $\mathcal{B}$-vrednost $\mathbf{1}$.

B.3.1 Definicija Binarnu relaciju $\Vdash^*$ između uslova i rečenica jezika $\mathcal{L}_{ZFC} \cup V^{\mathcal{P}}$ (imena tretiramo kao nove simbole konstanti) rekurzivno po rangu u $V^{\mathcal{P}}$ i složenosti formule definišemo na sledeći način:

1. $p \Vdash^* \sigma = \tau$ ako važi:
   (a) za svako $\langle \sigma_1, s_1 \rangle \in \sigma$ skup
   $$\{q \leqslant p \mid q \leqslant s_1 \Rightarrow (\exists \langle \tau_1, t_1 \rangle \in \tau)(q \leqslant t_1 \wedge q \Vdash^* \sigma_1 = \tau_1)\}$$
   je gust ispod p;
   (b) za svako $\langle \tau_1, t_1 \rangle \in \tau$ skup
   $$\{q \leqslant p \mid q \leqslant t_1 \Rightarrow (\exists \langle \sigma_1, s_1 \rangle \in \tau)(q \leqslant s_1 \wedge q \Vdash^* \tau_1 = \sigma_1)\}$$
   je gust ispod p;
2. $p \Vdash^* \sigma \in \tau$ ako je skup
   $$\{q \leqslant p \mid (\exists \langle \tau_1, t_1 \rangle \in \tau)(q \leqslant t_1 \wedge q \Vdash^* \sigma = \tau_1)\}$$
   gust ispod p;
3. $p \Vdash^* \neg\varphi$ ako $q \nVdash^* \varphi$ za svaki uslov $q \leqslant p$;
4. $p \Vdash^* \varphi \vee \psi$ ako je skup
   $$\{q \leqslant p \mid q \Vdash^* \varphi \ \vee \ q \Vdash^* \psi\}$$
   gust ispod p;
5. $p \Vdash^* \exists x \varphi(x)$ ako je skup
   $$\{q \leqslant p \mid (\exists \sigma \in V^{\mathcal{P}})(q \Vdash^* \varphi(\sigma))\}$$
   gust ispod p.

Napomenimo da smo umesto klauzula 2.a i 2.b ekvivalentno mogli staviti redom sledeće dve klauzule:

- za svako $\langle \sigma_1, s_1 \rangle \in \sigma$ skup
$$\{q \leqslant p \mid q \leqslant s_1 \Rightarrow q \Vdash^* \sigma_1 \in \tau\}$$
je gust ispod p;
- za svako $\langle \tau_1, t_1 \rangle \in \sigma$ skup
$$\{q \leqslant p \mid q \leqslant s_1 \Rightarrow q \Vdash^* \tau_1 \in \sigma\}$$
je gust ispod p.

Takođe je važno istaći da su klauzule 1 i 2 apsolutne za tranzitivne modele teorije ZFC, ali da preostale klauzule ne moraju da budu apsolutne.

B.3.2 Teorema *Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. $p \Vdash^* \varphi$;
2. $(\forall q \leqslant p)(q \Vdash^* \varphi)$;
3. *Skup* $\{q \leqslant p \mid q \Vdash^* \varphi\}$ *je gust ispod* p.

Dokaz
Prvo, primetimo da 2 očigledno povlači 1 i 3. Da 2 povlači 1 neposredno sledi iz definicije $\Vdash^*$: ako je skup D gust ispod p, onda je D gust i ispod svakog $q \leqslant p$, odakle po definiciji neposredno sledi da 2 važi za atomične rečenice, disjunkcije rečenica i egzistencijalne rečenice. Najzad, važenje iskaza 2 za recenice koje počinju negacijom je očigledna posledica stavke 3 u definiciji $\Vdash^*$.

Preostali deo tvrđenja (npr 3 povlači 1) predstavlja pravolinijsku indukciju po složenosti rečenice φ, pa ga zbog toga ostavljamo čitaocu za vežbu. $\square$

B.3.3 Zadatak Dokazati:

1. Ne postoji uslov p takav da $p \Vdash^* \varphi$ i $p \Vdash^* \neg\varphi$;
2. $\mathbf{1} \Vdash^* \varphi \vee \neg\varphi$;
3. $\mathbf{1} \Vdash^* \sigma = \sigma$;
4. Ako $\langle \sigma, s\rangle \in \tau$ onda $s \Vdash^* \sigma \in \tau$;
5. $p \Vdash^* \neg\neg\varphi$ akko $p \Vdash^* \varphi$;
6. $p \Vdash^* \varphi \wedge \psi$ akko $p \Vdash^* \varphi$ i $p \Vdash^* \psi$;
7. $p \Vdash^* \forall x \varphi(x)$ akko $p \Vdash^* \varphi(\sigma)$ za svako ime $\sigma \in V^{\mathcal{P}}$;
8. Ako $p \Vdash^* \varphi$ i $p \Vdash^* \varphi \Rightarrow \psi$, onda $p \Vdash^* \psi$.

Uputstvo

1: Neposredna posledica stavke 3 u definiciji forsinga.

2: Treba pokazati da je skup

$$D = \{p \in \mathcal{P} \mid p \Vdash^* \varphi \ \vee \ p \Vdash^* \neg\varphi\}$$

gust u $\mathcal{P}$. Neka je $p \in \mathcal{P}$ proizvoljan uslov. Ako $p \Vdash \neg\varphi$, onda $p \in D$. U suprotnom, po trećoj stavki u definiciji forsinga postoji $q \leqslant p$ tako da $q \Vdash^* \varphi$, pa $q \in D$. Dakle, D je gust u $\mathcal{P}$, odakle sledi da $\mathbf{1} \Vdash \varphi \vee \neg\varphi$.

3: Koristiti indukciju po rangu imena σ u $V^{\mathcal{P}}$. $\square$

B.3.4 Teorema

Neka je $\varphi(\bar{x})$ formula jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$, M prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC, $\mathcal{P}$ u M separativno uređenje bez minimalnih elemenata i neka je G M-generički filter u $\mathcal{P}$. Tada:

(a) Ako $p \in G$ i $M \models p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, onda

$$M[G] \models \varphi[\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}];$$

(b) Ako $M[G] \models \varphi[\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}]$, *onda postoji uslov* $p \in G$ *takav da*

$$M \models p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

Dokaz

Tvrđenja (a) i (b) dokazujemo simultano indukcijom i po imenskom rangu i po složenosti formule. Prvo obrađujemo slučaj kada je φ atomična formula. Kako su atomične formule apsolutne za tranzitivne modele, $(p \Vdash^* \sigma = \tau)^M$ je ekvivalentno sa $p \Vdash^* \sigma = \tau$ i $(p \Vdash^* \sigma \in \tau)^M$ je ekvivalentno sa $p \Vdash^* \sigma \in \tau$.

Pretpostavimo da $p \Vdash^* \sigma = \tau$ i pokažimo da je $\mathtt{I}_G(\sigma) = \mathtt{I}_G(\tau)$. Zbog očigledne simetrije dovoljno je pokazati da je $\mathtt{I}_G(\sigma) \subseteq \mathtt{I}_G(\tau)$. Neka je $x \in \mathtt{I}_G(\sigma)$ proizvoljno. Tada postoje $\pi \in M^{\mathcal{P}}$ i $s \in \mathcal{P}$ takvi da

$$\langle \pi, s \rangle \in \sigma \text{ i } s \in G \text{ i } x = \pi_G.$$

Kako $p \Vdash^* \sigma = \tau$, skup

$$D = \{q \leqslant p \mid q \leqslant s \Rightarrow q \Vdash^* \pi \in \tau\}$$

je gust ispod p, a kako $D \in M$ (relacija $\Vdash^*$ je apsolutna za Σ_0-formule u tranzitivnim modelima), postoji $r \in G \cap D$ takvo da je $r \leqslant s$. Par imenskih rangova od π i τ je manji (u leksikografskom poretku) od odgovarajućeg para rangova od σ i τ, pa po induktvnoj hipotezi ((a) važi za atomične formule i imena manjeg ranga), iz $r \Vdash^* \pi \in \tau$ sledi da je $\mathtt{I}_G(\pi) \in \mathtt{I}_G(\tau)$, čime je pokazano da je $\mathtt{I}_G(\sigma) \subseteq \mathtt{I}_G(\tau)$.

Pretpostavimo sada da je $\mathtt{I}_G(\sigma) = \mathtt{I}_G(\tau)$. Neka je D skup svih uslova $p \in P$ za koje važi tačno jedan od sledeća tri iskaza:

1. $p \Vdash^* \sigma = \tau$;

2. postoji $\langle \pi, s \rangle \in \sigma$ tako da je $p \leqslant s$ i da za svako $q \leqslant p$,

$$q \not\Vdash^* \pi \in \tau;$$

3. postoji $\langle \pi, s\rangle \in \tau$ tako da je $p \leqslant s$ i da za svako $q \leqslant p$,

$$q \not\Vdash^* \pi \in \sigma.$$

Kako su 1,2 i 3 apsolutna svojstva za M, imamo da $D \in M$. Sasvim lako se proverava da je D gust u $\mathcal{P}$, pa postoji uslov $p \in D \cap G$. Pokažimo da 2 (sasvim slično i 3) ne važi za p. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $\langle \pi, s\rangle \in \sigma$ tako da je $p \leqslant s$ i za svako $q \leqslant p$ imamo da $q \not\Vdash^* \pi \in \tau$. Međutim, $s \in G$, pa $\mathtt{I}_G(\pi) \in \mathtt{I}_G(\sigma)$, odakle sledi da $\mathtt{I}_G(\pi) \in \mathtt{I}_G(\tau)$, pa po induktivnoj hipotezi postoji uslov $r \in G$ takav da $r \Vdash^* \pi \in \tau$, što je u kontradikciji sa 2.

Pretpostavimo da $p \Vdash^* \sigma \in \tau$. Tada je skup

$$D = \{q \leqslant p \mid (\exists \langle \pi, s\rangle \in \tau)(q \leqslant s \wedge q \Vdash^* \sigma = \pi)\}$$

gust ispod p, a kako je definiciona formula skupa D apsolutna za M, imamo da $D \in M$, pa postoji $q \in D \cap G$. Dalje, neka je $\langle \pi, s\rangle \in \tau$ tako da $q \leqslant s$ i $q \Vdash^* \sigma = \pi$. Tada je po induktivnoj hipotezi $\mathtt{I}_G(\sigma) = \mathtt{I}_G(\pi)$, a kako $s \in G$ ($q \in G$ i $q \leqslant s$) imamo da $\mathtt{I}_G(\pi) \in \mathtt{I}_G(\tau)$, a time i $\mathtt{I}_G(\sigma) \in \mathtt{I}_G(\tau)$.

Pretpostavimo da $\mathtt{I}_G(\sigma) \in \mathtt{I}_G(\tau)$. Tada po definiciji $\mathtt{I}_G(\tau)$ postoji $\langle \pi, s\rangle \in \tau$ tako da $s \in G$ i $\mathtt{I}_G(\sigma) = \mathtt{I}_G(\pi)$. Po induktivnoj hipotezi postoji uslov $q \in G$ takav da $q \Vdash^* \sigma = \pi$. G je filter, pa postoji $p \in G$ tako da je $p \leqslant q$ i $p \leqslant s$. No sada je

$$(\cdot, p] = \{r \leqslant p \mid (\exists \langle \tau_1, t_1\rangle \in \tau)(r \leqslant t_1 \wedge r \Vdash^* \sigma = \tau_1)\}$$

(svedok je $\langle \pi, s\rangle$), pa po definiciji $p \Vdash^* \sigma \in \tau$.

Prelazimo na slučaj formula veće složenosti. Razlikujemo sledeće podslučajeve:

(a)$\neg$: Pretpostavimo da (a) i (b) važe za φ i dokazujemo (a) za $\neg\varphi$. Neka je $p \in G$ tako da $M \models p \Vdash^* \neg\varphi$. Suprotno (a), pretpostavimo da $M[G] \models \varphi$. Tada po induktivnoj hipotezi postoji $q \in G$ tako da

$M \models q \Vdash^* \varphi$. G je filter, pa postoji uslov $r \in G$ takav da je $r \leqslant p$ i $r \leqslant q$. No tada dobijamo kontradikciju:

$$M \models r \Vdash^* \varphi \text{ i } M \models r \Vdash^* \neg\varphi.$$

(b)$\neg$: Neka $M[G] \models \neg\varphi$ i neka je

$$D = \{p \in \mathcal{P} \mid (p \Vdash^* \varphi)^M \vee (p \Vdash^* \neg\varphi)^M\}.$$

D je gust u $\mathcal{P}$ ($\mathbf{1} \Vdash^* \varphi \vee \neg\varphi$) i $D \in M$ (definiciona formula skupa D je apsolutna za M), pa neka $p \in D \cap G$. Slučaj $M \models p \Vdash^* \varphi$ je nemoguć, jer bi tada po induktivnoj hipotezi bilo $M[G] \models \varphi$, što je u suprotnosti sa pretpostavljenim $M[G] \models \neg\varphi$. Dakle, $M \models p \Vdash^* \neg\varphi$.

(a)$\wedge$: Pretpostavimo da (a) i (b) važe za φ i ψ i dokažimo da (a) važi za $\varphi \wedge \psi$. Neka je $p \in G$ uslov takav da $M \models p \Vdash^* \varphi \wedge \psi$. Tada po definiciji $\Vdash^*$ $M \models p \Vdash^* \varphi$ i $M \models p \Vdash \psi$, odakle po induktivnoj hipotezi sledi da $M[G] \models \varphi$ i $M[G] \models \psi$, odakle po definiciji sledi da $M[G] \models \varphi \wedge \psi$.

(b)$\wedge$: Sasvim slično kao prethodna stavka.

(a)$\exists$: Neka $p \in G$ i neka $M \models p \Vdash^* \exists x\varphi(x)$. Tada je skup

$$D = \{q \leqslant p \mid (\exists\sigma \in M^{\mathcal{P}})(r \Vdash^* \varphi(\sigma))^M\}$$

gust u $\mathcal{P}$. Kako i $D \in M$, postoji $q \in D \cap G$. Neka je $\sigma \in M^{\mathcal{P}}$ tako da $M \models p \Vdash^* \varphi(\sigma)$. Tada po induktivnoj hipotezi $M[G] \models \varphi[\mathtt{I}_G(\sigma)]$, odakle po definiciji sledi da $M[G] \models \exists x\varphi(x)$.

(b)$\exists$: Neka $M[G] \models \exists x\varphi(x)$. Tada postoji ime $\sigma \in M^{\mathcal{P}}$ tako da $M[G] \models \varphi[\mathtt{I}_G(\sigma)]$. Po induktivnoj hipotezi, postoji uslov $p \in G$ takav da $M \models p \Vdash^* \varphi(\sigma)$. Sada se po definiciji $\Vdash^*$ sasvim lako proverava da $M \models p \Vdash^* \exists x\varphi(x)$. $\square$

B.3.5 Posledica *Uz prethodnu simboliku,*

$$p \Vdash \varphi \quad \textit{akko} \quad M \models p \Vdash^* \varphi.$$

Dokaz

Direktna posledica prethodne teoreme. $\square$

Za kompletiranje dokaza forsing teoreme ostalo nam je da pokažemo da je $M[G]$ model teorije ZFC. U prethodnoj sekciji smo dokazali da u $M[G]$ važe aksiome ekstenzionalnosti, para unije, praznog skupa, regularnosti i beskonačnosti, te su nam ostale aksiome partitvnog skupa i izbora, kao i sheme separacije i zamene.

Prvo dokazujemo shemu zamene u $M[G]$. Radi pojednostavljenja notacije, parametre koji se javljaju u definicionim formulama skupova nećemo isticati. Shodno tome, treba da pokažemo da

$$A = \{x \in \mathtt{I}_G(\sigma) \mid \varphi(x)^{M[G]}\} \in M[G].$$

Uočimo skup

$$\tau = \{\langle \pi, p\rangle \in \mathrm{dom}(\sigma) \times \mathcal{P} \mid p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi))\}.$$

Kako smo pokazali da je forsing relacija $\Vdash$ definabilna u M, imamo da $\tau \in M^{\mathcal{P}}$. Tvrdimo da je

$$\mathtt{I}_G(\tau) = A.$$

Neka $x \in \mathtt{I}_G(\tau)$. Tada postoji $\langle \pi, p\rangle \in \tau$ tako da $p \in G$, $x = \mathtt{I}_G(\pi)$ i $p \Vdash \pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi)$. Odavde po definiciji forsinga sledi da $x \in \mathtt{I}_G(\sigma)$ i da u $M[G]$ važi $\varphi[x]$, čime smo pokazali da je $\mathtt{I}_G(\tau) \subseteq A$.

S druge strane, neka je $a \in A$ proizvoljno. Tada

$$M[G] \models a \in \mathtt{I}_G(\sigma) \wedge \varphi(a),$$

pa po forsing teoremi postoje ime $\tilde{a} \in M^{\mathcal{P}}$ i uslov $p \in G$ takvi da je $\mathtt{I}_G(\tilde{a}) = a$, kao i

$$p \Vdash \tilde{a} \in \sigma \wedge \varphi(\tilde{a}).$$

Ovo upravo znači da $\langle \tilde{a}, p\rangle \in \tau$, a kako $p \in G$, imamo i da $a \in \mathtt{I}_G(\tau)$.

Dokažimo sada da u $M[G]$ važi shema zamene. Kao i kod dokaza sheme separacije, radi preglednosti zapisa ćemo parametre koji se javljaju u formulama izostaviti. Dakle, pretpostavimo da

$$M[G] \models (\forall x \in A)(\exists_1 y)\varphi(x, y),$$

i neka je $\tilde{A} \in M^{\mathcal{P}}$ ime skupa $A \in M[G]$. Tvrdimo da postoji ime $\pi \in M^{\mathcal{P}}$ takvo da

$$M[G] \models (\forall x \in A)(\exists y \in \mathtt{I}_G(\pi))\varphi(x, y).$$

Kako teorema refleksije važi u M, postoji $B \in M$ tako da je $B \subseteq M^{\mathcal{P}}$ i da za svako $\sigma \in \mathrm{dom}(\tilde{A})$ i svako $p \in \mathcal{P}$ važi

$$(\exists \tau \in M^{\mathcal{P}})(p \Vdash \varphi(\sigma, \tau)) \Rightarrow (\exists \tau \in B)(p \Vdash \varphi(\sigma, \tau)).$$

Neka je $\pi = B \times \{\mathbf{1}\}$. Tada je

$$\mathtt{I}_G(\pi) = \{\mathtt{I}_G(\tau) \mid \tau \in B\}.$$

Neka $a \in A$ i neka je $\tilde{a}$ ime elementa a. Po pretpostavci, postoji jedinstveno $b \in M[G]$ tako da

$$M[G] \models \varphi[a, b].$$

Neka je $\tilde{b}$ ime skupa b. Po forsing teoremi imamo da postoji uslov $p \in G$ takav da

$$p \Vdash \varphi(\tilde{a}, \tilde{b}).$$

Iz izbora skupa B sledi da postoji $\tau \in B$ tako da $p \Vdash \varphi(\tilde{a}, \tau)$, odakle na osnovu forsing teoreme sledi da

$$M[G] \models \varphi[a, \mathtt{I}_G(\tau)],$$

pa mora biti $b = \mathtt{I}_G(\tau)$ (koristimo jedinstvenost skupa b). Najzad, iz prethodnih razmatranja sledi da $b \in \mathtt{I}_G(\pi)$, što je i trebalo pokazati.

Prelazimo na dokaz aksiomu partitivnog skupa. Neka $A \in M[G]$ i neka je $\tilde{A} \in M^{\mathcal{P}}$ ime skupa A. Uočimo skup

$$S = P(\mathrm{dom}(\tilde{A}) \times \mathcal{P}) \cap M$$

i ime $\pi = S \times \{\mathbf{1}\}$. Kako u $M[G]$ važi shema separacije, dovoljno je da pokažemo da je

$$P(A) \cap M[G] \subseteq \mathtt{I}_G(\pi),$$

jer je u tom slučaju

$$P(A) \cap M[G] = \{x \in \mathtt{I}_G(\pi) \mid x \subseteq A\} \in M[G].$$

U cilju dokaza uožimo proizvoljan $B \subseteq A$ takav da $B \in M[G]$. Kao i ranije, neka je $\tilde{B}$ ime skupa B. Ostaje da pokažemo da $B \in \mathtt{I}_G(\pi)$. Neka je τ ime definisano sa

$$\tau = \{\langle \sigma, p\rangle \mid \sigma \in \mathrm{dom}(\tilde{A}) \wedge p \Vdash \sigma \in \tilde{B}\}.$$

Tada $\tau \in S$, pa $\mathtt{I}_G(\tau) \in \mathtt{I}_G(\pi)$. Dokažimo da je $\mathtt{I}_G(\tau) = B$. S jedne strane, neka $x \in \mathtt{I}_G(\tau)$. Tada na osnovu forsing teoreme postoje ime $\tilde{x} \in M^{\mathcal{P}}$ i uslov $p \in G$ takvi da $\langle \tilde{x}, p\rangle \in \tau$i da je $\mathtt{I}_G(\tilde{x}) = x$. Po definiciji imena τ tada imamo da

$$p \Vdash \tilde{x} \in \tilde{B},$$

pa kako $p \in G$, na osnovu forsing teoreme imamo da $x \in B$, čime smo pokazali da je $\mathtt{I}_G(\tau) \subseteq B$.

S druge strane, neka je $b \in B$ proizvoljno. Po forsing teoremi postoje, ime $\tilde{b}$ i uslov $p \in G$ takvi da $p \Vdash \tilde{b} \in \tilde{B}$ i da je $\mathtt{I}_G(\tilde{b}) = b$. Kako je $B \subseteq A$, ime $\tilde{b}$ možemo izabrati tako da $\tilde{b} \in \mathrm{dom}(\tilde{A})$. Sada $\langle \tilde{b}, p\rangle \in \tau$, a kako $p \in G$, po forsing teoremi imamo da $b = \mathtt{I}_G(\tilde{b}) \in \mathtt{I}_G(\tau)$, čime smo pokazali i obratnu inkluziju, tj. da je $B \subseteq \mathtt{I}_G(\tau)$.

Ovim smo verifikovali ZF u $M[G]$, te ostaje još da pokažemo da u $M[G]$ važi i aksioma izbora. Neka $A \in M[G]$. Dovoljno je pokazati da postoje ordinal $\alpha \in M$ i surjekcija $f : \alpha \longrightarrow A$, $f \in M[G]$. Neka je $\tilde{A}$ ime skupa A. Kako u M važi AC, postoji ordinal $\alpha \in M$ takav da je

$$\mathrm{dom}(\tilde{A}) = \{\sigma_\xi \mid \xi < \alpha\}.$$

Dalje, za proizvoljna imena σ i τ primetimo da je

$$\langle \mathtt{I}_G(\sigma), \mathtt{I}_G(\tau)\rangle = \mathtt{I}_G(\{\langle\{\langle\sigma, \mathbf{1}\rangle\}, \mathbf{1}\rangle, \langle\{\langle\sigma, \mathbf{1}\rangle, \langle\tau, \mathbf{1}\rangle\}, \mathbf{1}\rangle\}),$$

tj.

$$\mathrm{op}(\sigma, \tau) = \{\langle\{\langle\sigma, \mathbf{1}\rangle\}, \mathbf{1}\rangle, \langle\{\langle\sigma, \mathbf{1}\rangle, \langle\tau, \mathbf{1}\rangle\}, \mathbf{1}\rangle\}$$

je ime uređenog para $\langle \mathtt{I}_G(\sigma), \mathtt{I}_G(\tau)\rangle$. Neka je

$$\tau = \{\mathrm{op}(\sigma_\xi, \check{\xi}) \mid \xi < \alpha\} \times \{\mathbf{1}\}.$$

Lako se proverava da je $f = \mathtt{I}_G(\tau)$ funkcija sa domenom α čiji je kodomen nadskup skupa A.

B.3.6 Zadatak Dokazati da $\mathbf{1} \Vdash V \neq L$.

Uputstvo

Neka je M prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC i neka je $\mathcal{P}$ u M separativno uređenje bez minimalnih elemenata. Treba pokazati da je skup

$$D = \{p \in \mathcal{P} \mid (p \Vdash V \neq L)^M\}$$

gust u $\mathcal{P}$. U tom cilju, neka je $p \in \mathcal{P}$ proizvoljan uslov i neka je G M-generički filter u $\mathcal{P}$ koji sadrži p. Kako M i $M[G]$ imaju iste visine, imamo da je

$$L^M = L^{M[G]},$$

odakle zbog $G \notin M$ sledi da $M[G] \models G \notin L$, a time i $M[G] \models V \neq L$. Po forsing teoremi postoji uslov $q \in G$ takav da $M \models q \Vdash V \neq L$. G je kompatibilan skup, pa postoji $r \in G$ tako da je $r \leqslant p$ i $r \leqslant q$, odakle sledi da $r \in D$, čime smo dokazali da je D gust. $\Box$

Kao što smo najavili, sekciju završavamo verifikacijom svih aksioma teorije ZFC u $V^{\mathcal{B}}$.

B.3.7 Teorema $\langle V^{\mathcal{B}}, \| \ \| \rangle \models$ ZFC.

Dokaz

Ekstenzionalnost :

Neka su $\tau, \sigma \in V^{\mathcal{B}}$ proizvoljni. Hoćemo da pokažemo da je

$$\|\forall z(z \in \tau \Leftrightarrow z \in \sigma) \Rightarrow \tau = \sigma\| = \mathbf{1}.$$

Prvo primetimo da je

$$\|(\forall z \in \tau) z \in \sigma\| = \|\tau \subseteq \sigma\| \quad \text{i} \quad \|(\forall z \in \sigma) z \in \tau\| = \|\sigma \subseteq \tau\|.$$

Sada je

$$\|(\forall z \in \tau) z \in \sigma \wedge (\forall z \in \sigma) z \in \tau \Rightarrow \tau = \sigma\| = \|\tau = \sigma\|^c \vee \|\tau = \sigma\| = \mathbf{1}.$$

Kako je

$$\forall z (z \in \tau \Leftrightarrow z \in \sigma) \Leftrightarrow (\forall z \in \tau) z \in \sigma \wedge (\forall z \in \sigma) z \in \tau$$

valjana formula, mora biti

$$\|\forall z (z \in \tau \Leftrightarrow z \in \sigma)\| = \|(\forall z \in \tau) z \in \sigma \wedge (\forall z \in \sigma) z \in \tau\| = \|\tau = \sigma\|,$$

odakle neposredno sledi da je

$$\|\forall z (z \in \tau \Leftrightarrow z \in \sigma) \Rightarrow \tau = \sigma\| = \mathbf{1}.$$

Prazan skup :
Hoćemo da pokažemo da je

$$\|\forall x (x \notin 0)\| = \mathbf{1}.$$

Ovo neposredno sledi iz činjenice da je za svako $\tau \in V^{\mathcal{B}}$

$$\|\tau \in 0\| = \prod_{x \in \emptyset} (0(x)^c \vee \|x = \tau\|) = \prod \emptyset = \mathbf{1}.$$

Separacija :
Neka je $\varphi = \varphi(x, y_1, \ldots, y_n$ proizvoljna formula jezika teorije skupova i neka su $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in V^{\mathcal{B}}$ proizvoljni. Uočimo $\tau \in V^{\mathcal{B}}$ tako da :

- $\mathrm{dom}(\tau) = \mathrm{dom}(\sigma) = D$
- $\tau(x) = \sigma(x) \wedge \|\varphi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|, \quad x \in D.$

Nadalje ćemo umesto $\|\varphi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|$ pisati kratko $\|\varphi\|$. Hoćemo da pokažemo da je

$$\|\forall x(x \in \tau \Leftrightarrow x \in \sigma \wedge \varphi)\| = \mathbf{1}.$$

Kako je

$$\forall x(x \in \tau \Leftrightarrow x \in \sigma \wedge \varphi) \Leftrightarrow (\forall x \in \tau)(x \in \sigma \wedge \varphi) \wedge (\forall x \in \sigma)(\varphi \Rightarrow x \in \tau)$$

valjana formula, dovoljno je pokazati da je

$$\|(\forall x \in \tau)(x \in \sigma \wedge \varphi)\| = \mathbf{1} \quad \text{i} \quad \|(\forall x \in \sigma)(\varphi \Rightarrow x \in \tau)\| = \mathbf{1}.$$

$$\begin{aligned}
\|(\forall x \in \tau)(x \in \sigma \wedge \varphi)\| &= \prod_{x \in D} (\tau(x)^c \vee \|x \in \sigma\| \wedge \|\varphi\|) \\
&= \prod_{x \in D} ((\sigma(x) \wedge \|\varphi\|)^c \vee \|x \in \sigma\| \wedge \|\varphi\|) \\
&\geqslant \prod_{x \in D} ((\sigma(x) \wedge \|\varphi\|)^c \vee \sigma(x) \wedge \|\varphi\|) = \mathbf{1} \\
\|(\forall x \in \sigma)(\varphi \Rightarrow x \in \tau)\| &= \prod_{x \in D} (\sigma(x)^c \vee \|\varphi\|^c \vee \|x \in \tau\|) \\
&\geqslant \prod_{x \in D} (\tau(x)^c \vee \tau(x)) = \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Aksioma para :
Neka su $\tau, \sigma \in V^{\mathcal{B}}$ proizvoljni i neka je $\rho \in V^{\mathcal{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(\rho) = \{\sigma, \tau\}$
- $\rho(\tau) = \rho(\sigma) = \mathbf{1}$.

Hoćemo da pokažemo da je

$$\|\forall x(x \in \rho \Leftrightarrow x = \tau \vee x = \sigma)\| = \mathbf{1}.$$

Ovo neposredno sledi iz činjenice da je

$$\begin{aligned}\|x \in \rho\| &= (\rho(\tau) \wedge \|x = \tau\|) \vee (\rho(\sigma) \wedge \|x = \sigma\|) \\ &= \|x = \tau\| \vee \|x = \sigma\| \\ &= \|x = \rho \vee x = \sigma\|.\end{aligned}$$

Unija :
Neka je $\sigma \in V^{\mathcal{B}}$ proizvoljno. Uočimo $\tau \in V^{\mathcal{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(\tau) = \bigcup\limits_{y \in \mathrm{dom}(\sigma)} \mathrm{dom}(y) \ = D$
- $\tau(x) = \|(\exists y \in \sigma) x \in y\|, \quad x \in D.$

Hoćemo da pokažemo da je

$$\|\forall x (x \in \tau \Leftrightarrow (\exists y \in \sigma) x \in y)\| = \mathbf{1}.$$

Za ovo je dovoljno pokazati da je

$$\|(\forall x \in \tau)(\exists y \in \sigma) x \in y\| = \mathbf{1} \quad \text{i} \quad \|(\forall y \in \sigma)(\forall x \in y) x \in \tau)\| = \mathbf{1}.$$

$$\begin{aligned}\|(\forall x \in \tau)(\exists y \in \sigma) x \in y\| &= \prod_{x \in D} (\tau(x)^c \vee \|(\exists y \in \sigma) x \in y\|) \\ &= \prod_{x \in D} (\tau(x)^c \vee \tau(x)) = \mathbf{1} \\ \|(\forall y \in \sigma)(\forall x \in y) x \in \tau\| &= \prod_{y \in \mathrm{dom}(\sigma)} (\sigma(y)^c \vee \prod_{x \in \mathrm{dom}(y)} (y(x)^c \vee \|x \in \tau\|)) \\ &= \prod_{y \in \mathrm{dom}(\sigma)} \prod_{x \in \mathrm{dom}(y)} (\sigma(y)^c \vee y(x)^c \vee \|x \in \tau\|) \\ &\geqslant \prod_{y \in \mathrm{dom}(\sigma)} \prod_{x \in \mathrm{dom}(y)} ((\sigma(y) \wedge y(x))^c \vee \tau(x)).\end{aligned}$$

Kako je

$$\tau(x) = \sum_{z \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sigma(z) \wedge \|x \in z\| \geqslant \sigma(y) \wedge \|x \in y\| \geqslant \sigma(y) \wedge y(x),$$

to je,

$$\begin{aligned}\|(\forall y \in \sigma)(\forall x \in y)x \in \tau\| &\geqslant \prod_{y \in \mathrm{dom}(\sigma)} \prod_{x \in \mathrm{dom}(y)} \big((\sigma(y) \wedge y(x))^c \vee (\sigma(y) \wedge y(x))\big) \\ &= \mathbf{1}.\end{aligned}$$

Partitivni skup :
Neka je $\sigma \in V^{\mathcal{B}}$ proizvoljno. Uočimo $\tau \in V^{\mathcal{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(\tau) = {}^{\mathrm{dom}(\sigma)}\mathcal{B} = D$
- $\tau(x) = \|x \subseteq \sigma\|, \quad x \in D.$

Hoćemo da pokažemo da je

$$\|\forall x(x \in \tau \Leftrightarrow x \subseteq \sigma)\| = \mathbf{1}.$$

Za ovo je dovoljno pokazati da je

$$\|(\forall x \in \tau)x \subseteq \sigma\| = \mathbf{1} \quad \mathrm{i} \quad \|\forall x(x \subseteq \sigma \Rightarrow x \in \tau)\| = \mathbf{1}.$$

Što se tiče prve jednakosti,

$$\begin{aligned}\|(\forall x \in \tau)x \subseteq \sigma\| &= \prod_{x \in D} (\tau(x)^c \vee \|x \subseteq \sigma\|) \\ &= \prod_{x \in D} (\|x \subseteq \sigma\|^c \vee \|x \subseteq \sigma\|) \ = \mathbf{1}.\end{aligned}$$

Da bismo pokazali da je

$$\|\forall x(x \subseteq \sigma \Rightarrow x \in \tau)\| = \mathbf{1},$$

dovoljno je pokazati da je za svako $x \in V^{\mathcal{B}}$

$$\|x \subseteq \sigma\| \leqslant \|x \in \tau\|.$$

Za proizvoljno $x \in V^{\mathcal{B}}$ neka je $x^* \in V^{\mathcal{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(x^*) = {}^{\mathrm{dom}(\sigma)}\mathcal{B} = D$
- $x^*(t) = \|t \in x\|, \quad t \in D.$

Kako je
$$\|x = x^*\| \wedge \|x^* \in \tau\| \leqslant \|x \in \tau\|,$$
to je za $\|x \subseteq \sigma\| \leqslant \|x \in \tau\|$ dovoljno pokazati da je
$$\|x \subseteq \sigma\| \leqslant \|x = x^*\|.$$

Pošto je
$$\begin{aligned} \|x^* \subseteq x\| &= \prod_{t \in D} (x^*(t)^c \vee \|t \in x\|) \\ &= \prod_{t \in D} (\|t \in x\|^c \vee \|t \in x\|) \;=\; \mathbf{1}, \end{aligned}$$
ostaje da se pokaže da je
$$\|x \subseteq \sigma\| \leqslant \|x \subseteq x^*\|.$$

Neka su $t \in \mathrm{dom}(x)$ i $s \in D$ proizvoljni. Tada je
$$\|x \subseteq \sigma\| \wedge x(t) \wedge \|t = s\| \wedge \sigma(s) \leqslant \|s \in x\|,$$
pa je i
$$\|x \subseteq \sigma\| \wedge x(t) \wedge \|t = s\| \wedge \sigma(s) \leqslant \|s \in x\| \wedge \|t = s\|.$$
Odavde sledi da je
$$\|x \subseteq \sigma\| \wedge x(t) \wedge \sum_{s \in D} \sigma(s) \wedge \|t = s\| \leqslant \sum_{s \in D} \|s \in x\| \wedge \|s = t\|,$$
tj.
$$\|x \subseteq \sigma\| \wedge x(t) \wedge \|t \in \sigma\| \leqslant \|t \in x^*\|.$$

Kako je

$$\|x \subseteq \sigma\| \wedge x(t) \leqslant (x(t)^c \vee \|t \in \sigma\|) \wedge x(t) \leqslant \|t \in \sigma\|,$$

imamo da je

$$\|x \subseteq \sigma\| \wedge x(t) \leqslant \|t \in x^*\|,$$

tj.

$$\|x \subseteq \sigma\| \leqslant x(t)^c \vee \|t \in x^*\|,$$

odakle sledi da je

$$\|x \subseteq \sigma\| \leqslant \prod_{t \in \mathrm{dom}(x)} (x(t)^c \vee \|t \in x^*\|) \;=\; \|x \subseteq x^*\|.$$

Beskonačnost :
Pokazujemo da je $\|\check{\omega} \in \mathrm{Ind}\| = \mathbf{1}$ tj. da je

$$\|\check{0} \in \check{\omega} \wedge (\forall x \in \check{\omega})(x \cup \{x\} \in \check{\omega})\| = \mathbf{1}.$$

Kako $0 \in \omega$, to je $\|\check{0} \in \check{\omega}\| = \mathbf{1}$. Dalje,

$$\begin{aligned} \|(\forall x \in \check{\omega})(x \cup \{x\} \in \check{\omega})\| &= \prod_{x \in \omega} (\check{\omega}(\check{x})^c \vee \|\check{x} \cup \{\check{x}\} \in \check{\omega}\|) \\ &= \prod_{x \in \omega} \|\check{x} \cup \{\check{x}\} \in \check{\omega}\| \;=\; \mathbf{1}, \end{aligned}$$

jer $x \cup \{x\} \in \omega$, pa je $\|\check{x} \cup \{\check{x}\} \in \check{\omega}\| = \mathbf{1}$.
Zamena :
Neka je $\varphi(x, z, y_1, \ldots, y_n)$ proizvoljna formula jezika teorije skupova. Uočimo sledeći ekvivalent aksiome zamene:

$$\forall u \exists v (\forall x \in u)(\exists z \in v)(\exists t \varphi(x, t, \overline{y}) \Rightarrow \varphi(x, z, \overline{y})).$$

Za ovaj oblik aksiome zamene smo se odlučili zbog ograničenih kvantora i činjenice da zbog teoreme refleksije nije potrebna jedinstvenost z–a.

Neka su $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in V^{\mathcal{B}}$ proizvoljni. Napomenimo da ćemo radi preglednosti koristiti skraćenicu $\overline{\sigma} = \sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Hoćemo da pokažemo da je

$$\|\exists v(\forall x \in \sigma)(\exists z \in v)(\exists t\varphi(x,t,\overline{\sigma}) \Rightarrow \varphi(x,z,\overline{\sigma}))\| = \mathbf{1}.$$

Neka je

$$a(x,z) = \|\exists t\varphi(x,t,\overline{\sigma}) \Rightarrow \varphi(x,z,\overline{\sigma})\|, \quad x,z \in V^{\mathcal{B}}.$$

Kako je

$$\forall x \exists z(\exists t\varphi(x,t,\overline{y}) \Rightarrow \varphi(x,z,\overline{y}))$$

valjana formula, mora biti

$$\prod_{x\in\mathrm{dom}(\sigma)} \sum_{z\in V^{\mathcal{B}}} a(x,z) \;=\; \mathbf{1}.$$

Kako je

$$\{a(x,z) \mid x \in \mathrm{dom}(\sigma), z \in V^{\mathcal{B}}\}$$

skup, postoji ordinal α takav da je

$$\prod_{x\in\mathrm{dom}(\sigma)} \sum_{z\in V^{\mathcal{B}}} a(x,z) = \prod_{x\in\mathrm{dom}(\sigma)} \sum_{z\in V_\alpha^{\mathcal{B}}} a(x,z) \;=\; \mathbf{1}.$$

Neka je $\tau \in V^{\mathcal{B}}$ tako da je

- $\mathrm{dom}(\tau) = M_\alpha^{\mathcal{B}}$
- $\tau(x) = \mathbf{1}, \quad x \in M_\alpha^{\mathcal{B}}$.

Sada je

$$\begin{aligned}\|(\forall x \in \sigma)(\exists z \in \tau)a(x,z)\| \;&=\; \prod_{x\in\mathrm{dom}(\sigma)} \sum_{z\in M_\alpha^{\mathcal{B}}} \tau(z) \wedge a(x,z)\\ &=\; \prod_{x\in\mathrm{dom}(\sigma)} \sum_{z\in M_\alpha^{\mathcal{B}}} a(x,z) \;=\mathbf{1}.\end{aligned}$$

Regularnost :
Pođimo od sledećeg ekvivalenta aksiome regularnosti :

$$\forall x((\forall t \in x)\varphi(t,\overline{y}) \Rightarrow \varphi(x,\overline{y})) \Rightarrow \forall x \varphi(x,\overline{y}).$$

Neka je

$$b = \|\forall x((\forall t \in x)\varphi(t,\overline{y}) \Rightarrow \varphi(x,\overline{y}))\|.$$

Neka su $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in V^{\mathcal{B}}$ proizvoljni. $\in$–indukcijom pokazujemo da je

$$b \leqslant \|\varphi(\tau,\overline{\sigma})\|, \quad \tau \in V^{\mathcal{B}}.$$

Uočimo proizvoljno $\tau \in V^{\mathcal{B}}$ i neka za svako $t \in \mathrm{dom}(\tau)$ važi

$$b \leqslant \|\varphi(t,\overline{\sigma})\|.$$

Tada je

$$b \leqslant \prod_{t \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(t)^c \vee \|\varphi(t,\overline{\sigma})\|) = \|(\forall t \in \tau)\varphi(t,\overline{\sigma})\|.$$

S druge strane,

$$b \leqslant \|(\forall t \in \tau)\varphi(t,\overline{\sigma})\|^c \vee \|\varphi(\tau,\overline{\sigma})\|,$$

pa mora biti $b \leqslant \|\varphi(\tau,\overline{\sigma})\|$.

Izbor :
Neka je $\sigma \in V^{\mathcal{B}}$ proizvoljno. S obzirom na dužinu dokaza, ovde ćemo samo dati konstrukciju odgovarajuće Booleovske funkcije izbora za σ.

Prvo definišimo pojam *Booleovskog para.* Za proizvoljne $x, y \in V^{\mathcal{B}}$ neka je $\{x,y\}^{\mathcal{B}} \in V^{\mathcal{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(\{x,y\}^{\mathcal{B}}) = \{x,y\}$
- $\{x,y\}^{\mathcal{B}}(x) = \{x,y\}^{\mathcal{B}}(y) = \mathbf{1}$.

Sada Booleovski par definišemo sa

$$\langle x, y\rangle^{\mathcal{B}} = \{\{x, y\}^{\mathcal{B}}, \{x\}^{\mathcal{B}}\}^{\mathcal{B}}.$$

Neka je β ordinal takav da je

$$\mathrm{dom}(\sigma) = \{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \beta\}.$$

Za svako $\alpha \in \beta$ neka je

$$y_\alpha = \sigma(\sigma_\alpha) \wedge \prod_{\xi \in \alpha} \|\sigma_\xi = \sigma_\alpha\|.$$

Pokažimo da za svako $\alpha \in \beta$ postoji $\pi_\alpha \in V^{\mathcal{B}}$ tako da je

$$\|\sigma_\alpha \neq 0 \Rightarrow \pi_\alpha \in \sigma_\alpha\| = \mathbf{1}.$$

S obzirom da je $V^{\mathcal{B}}$ pun model, to je dovoljno pokazati da je

$$\|0 \neq \sigma_\alpha \Rightarrow \exists x(x \in \sigma_\alpha)\| = \mathbf{1}.$$

Zaista,

$$\begin{aligned}
\|0 \neq \sigma_\alpha \Rightarrow \exists x(x \in \sigma_\alpha)\| &= \|0 = \sigma_\alpha\| \vee \sum_{x \in V^{\mathcal{B}}} \|x \in \sigma_\alpha\| \\
&= \|\sigma_\alpha \subseteq 0\| \vee \sum_{x \in V^{\mathcal{B}}} \|x \in \sigma_\alpha\| \\
&= \prod_{x \in \mathrm{dom}(\sigma_\alpha)} \sigma_\alpha(x)^c \vee \sum_{x \in V^{\mathcal{B}}} \|x \in \sigma_\alpha\| \\
&\geqslant \prod_{x \in \mathrm{dom}(\sigma_\alpha)} \sigma_\alpha(x)^c \vee \sum_{x \in \mathrm{dom}(\sigma_\alpha)} \sigma_\alpha(x) = \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Uz prethodnu simboliku, neka je za svako $\alpha \in \beta$

$$x_\alpha = \langle \sigma_\alpha, \pi_\alpha\rangle^{\mathcal{B}}.$$

Uočimo $\tau \in V^{\mathcal{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(\tau) = \{x_\alpha \mid \alpha \in \beta\}$
- $\tau(x_\alpha) = y_\alpha, \quad \alpha \in \beta.$

Može se pokazati da je τ Booleovska funkcija izbora za σ, tj. da je

$$\|\sigma \neq 0 \Rightarrow \tau : \sigma \longrightarrow \bigcup \sigma \wedge (\forall x \in \sigma)\tau(x) \in x\| = \mathbf{1}.$$

□

B.4 Očuvanje kardinala i kofinalnosti

Kažemo da uređenje $\mathcal{P}$ *čuva kardinale i kofinalnosti* ako za svaki M-generički filter G u $\mathcal{P}$ i svaki granični ordinal $\alpha \in M$ važi:

1. $M \models \alpha \in \mathrm{Card}$ akko $M[G] \models \alpha \in \mathrm{Card}$;
2. $(\mathrm{cf}\,\alpha)^M = (\mathrm{cf}\,\alpha)^{M[G]}$.

B.4.1 Zadatak Neka $\mathcal{P}$ čuva kofinalnosti. Dokazati da tada $\mathcal{P}$ čuva kardinale.

B.4.2 Zadatak Neka $\mathcal{P}$ čuva regularne neprebrojive kardinale. Dokazati da $\mathcal{P}$ tada čuva kofinalnosti.

Prelazimo na opis svojstava koje treba da ima uređenje $\mathcal{P}$ kako bi očuvalo kardinale i kofinalnosti. To su pre svega κCC i κ-zatvorenost. Pokazaćemo da prvo od njih obezbeđuje očuvanje kardinala i kofinalnosti $\geqslant \kappa$, dok drugo čuva kardinale i kofinalnosti ispod κ.

B.4.3 Definicija Uređenje $\mathcal{P}$ zadovoljava κCC (κ chain condition) ako u $\mathcal{P}$ nema antilanaca (antilanac je skup međusobno inkompatibilnih elemenata) kardinalnosti $\geqslant \kappa$.

B.4.4 Definicija Uređenje $\mathcal{P}$ je *κ-zatvoreno* ako svaki opadajući niz u $\mathcal{P}$ dužine $< \kappa$ ima minorantu (element manji od svih članova niza).

B.4.5 Lema *Neka $\mathcal{P} \in M$, $M \models$ "$\mathcal{P}$ zadovoljava κCC", $A, B \in M$, G je M-generički filter u $\mathcal{P}$, i neka je $f \in M[G]$ funkcija čiji je domen skup A, a kodomen skup B. Tada postoji funkcija $F \in M$ sa sledećim svojstvima:*

1. $F : A \longrightarrow P(B)$;
2. $(\forall a \in A)(f(a) \in F(a))$;
3. $(\forall a \in A)(M \models |F(a)| < \kappa)$.

Dokaz

Neka je $\tilde{f}$ ime funkcije f i neka je $p \in G$ uslov takav da

$$p \Vdash \tilde{f} : \check{A} \longrightarrow \check{B}.$$

Traženu funkciju F definišimo sa

$$F(a) = \{b \in B \mid (\exists q \leqslant p)(q \Vdash \tilde{f}(\check{a}) = \check{b})\}.$$

Na osnovu forsing teoreme $F \in M$ (relacija $\Vdash$ je definabilna u M). Pokažimo da F zadovoljava 1–3. Prva stavka je očigledno zadovoljena, pa prelazimo na drugu. Neka je $a \in A$ proizvoljno i neka je $b = f(a)$. Tada postoji $r \in G$ tako da

$$r \Vdash \tilde{f}(\check{a}) = \check{b},$$

a kako su uslovi $r, p \in G$ kompatibilni, postoji uslov $q \in G$ manji i od p i od r. Dakle, $q \leqslant p$ i $q \Vdash \tilde{f}(\check{a}) = \check{b}$ ($q \leqslant r$), odakle sledi da $b \in F(a)$.

Prelazimo na dokaz poslednjeg svojstva. Neka je $a \in A$ proizvoljno. U M važi AC, pa postoji funkcija $g \in M$, $g : F(a) \longrightarrow \mathcal{P}$ takva da za svako $b \in F(a)$, $g(b) \leqslant p$ i $g(b) \Vdash \tilde{f}(\check{a}) = \check{b}$. Ako je $b \neq b'$

$(b, b' \in F(a))$, onda uslovi $g(b)$ i $g(b')$ moraju biti inkompatibilni jer forsiraju međusobno inkonsistentne rečenice. Dakle,

$$\{g(b) \mid b \in F(a)\}$$

je antilanac u $\mathcal{P}$, a kako $g \in M$, zajedno sa prethodnim imamo da

$$M \models |g(a)| = |F(a)| < \kappa.$$

$\square$

B.4.6 Teorema *Neka $\mathcal{P} \in M$ i $M \models$ "$\mathcal{P}$ zadovoljava κCC". Tada $\mathcal{P}$ čuva kofinalnosti $\geqslant \kappa$. Ako još i $M \models \kappa \in \mathrm{Reg}$, onda $\mathcal{P}$ čuva kardinale $\geqslant \kappa$.*

Dokaz

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji ordinal $\lambda \geqslant \kappa$ takav da $M \models \lambda \in \mathrm{Reg}$ i $M[G] \models \lambda \notin \mathrm{Reg}$. Odavde sledi da postoji ordinal $\alpha \in M$ i funkcija $f \in M[G]$ koja kofinalno slika α u λ. Na osnovu prethodne leme, postoji funkcija $F \in M$ takva da važi:

1. $F : \alpha \longrightarrow P(\lambda)$;
2. $(\forall a \in \alpha)(f(a) \in F(a))$;
3. $(\forall a \in \alpha)(M \models |F(a)| < \kappa)$.

Neka je

$$S = \bigcup \{F(a) \mid a \in \alpha\}.$$

Primetimo da $S \in M$ i da je S neograničen podskup od λ. Međutim, računajući u M,

$$|S| = \sum_{a \in \alpha} |F(A)| < \sum_{a \in \alpha} \kappa.$$

Kako u M važi $|\alpha| < \lambda$, $\kappa \leqslant \lambda$ i $\sum\limits_{a \in \alpha} \kappa = \max\{\kappa, |\alpha|\}$, imamo da

$$M \models |S| < \lambda,$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je λ regularan kardinal u M. $\square$

Skup $D \subseteq \mathcal{P}$ je *otvoren* u $\mathcal{P}$ ako sadrži donji konus svakog svog elementa, tj. ako $p \in D$ onda i $q \in D$ za svako $q \leqslant p$.

B.4.7 Lema *Neka je $\mathcal{P}$ κ–zatvoreno. Tada je za proizvoljnu familiju $\{D_\alpha \mid \alpha \in \lambda\}$ $(\lambda < \kappa)$ gustih otvorenih skupova u $\mathcal{P}$ skup*

$$D = \bigcap_{\alpha \in \lambda} D_\alpha$$

gust i otvoren u $\mathcal{P}$.

Dokaz

Iz definicije skupa D neposredno sledi njegova otvorenost, te ostaje još da pokažemo i da je gust u $\mathcal{P}$.

Neka je $p \in \mathcal{P}$ proizvoljno. Pošto je svaki od skupova D_α gust i da je $\mathcal{P}$ κ-zatvoreno, indukcijom po λ se sasvim lako pokazuje da postoji opadajući niz $\langle p_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$ u $\mathcal{P}$ takav da je $p_0 \leqslant p$ i da je $p_\alpha \in D_\alpha$ za svako $\alpha < \lambda$.

Sada iz κ-zatvorenosti uređenja $\mathcal{P}$ sledi egzistencija $q \in \mathcal{P}$ takvog da je

$$r \leqslant p_\alpha$$

za svako $\alpha < \lambda$. Ovo upravo znači da je $q \leqslant p$ i da $q \in D$, što je i trebalo dokazati. $\square$

B.4.8 Teorema *Neka je $\mathcal{P}$ κ-zatvoreno, neka $A \in M$ i neka*

$$M[G] \models a : \lambda \longrightarrow A,$$

pri čemu $M \models \lambda < \kappa \wedge \lambda \in \mathrm{Card}$. Tada $a \in M$. Posebno, u $M[G]$ su očuvani kardinali i kofinalnosti manji od κ i u $M[G]$ nema novih podskupova od λ.

Dokaz

Neka je $\tilde{a} \in M^{\mathcal{P}}$ ime funkcije a. Na osnovu teoreme B.2.12 postoji uslov $p \in G$ takav da $p \Vdash \tilde{a} : \check{\lambda} \longrightarrow \check{A}$, tj.

$$p \Vdash (\forall x \in \check{\lambda})(\exists_1 y \in \check{A})\langle x, y\rangle \in \tilde{a}.$$

Odavde sledi da

$$p \Vdash (\exists x \in A)\langle \check{\alpha}, \check{x}\rangle \in \tilde{a}$$

za svako $\alpha < \lambda$, što povlači da je za svako $\alpha < \lambda$ skup

$$D_\alpha = \{q \leqslant p \mid (\exists x \in A)(q \Vdash a(\check{\alpha}) = \check{x})\}$$

otvoren i gust ispod p. Primetimo da $D_\alpha \in M$. Neka je

$$D = \bigcap_{\alpha<\lambda} D_\alpha.$$

Na osnovu prethodne leme je D otvoren i gust ispod p. Da $D \in M$ neposredno sledi iz činjenice da je M model teorije ZFC koji sadrži λ i svaki od skupova D_α, $\alpha < \lambda$. Pošto je G M-generički filter, možemo izabrati uslov $p_a \in D \cap G$. Funkciju $f : \lambda \longrightarrow A$ definišimo na sledeći način:

$$f(\alpha) = x \Leftrightarrow_{\text{def}} p_a \Vdash \tilde{a}(\check{\alpha}) = \check{x}.$$

S obzirom da se u M može odlučiti da li $p_a \Vdash \tilde{a}(\check{\alpha}) = \check{x}$, vidimo da $f \in M$. Kako

$$p_a \Vdash \tilde{a} = \check{f},$$

imamo da $M[G] \models a = f$, odakle zbog tranzitivnosti modela $M[G]$ mora biti i $a = f$. □

Iz prethodnih razmatranja neposredno sledi da κ-zatvoreno i κCC uređenje $\mathcal{P}$, pri čemu je κ regularan kardinal u M, čuva kardinale i kofinalnosti. Od posebnog interesa su tzv. CCC uređenja, odnosno uređenja koja zadovoljavaju $\aleph_1$CC. Kako je ω apsolutan kardinal, CCC uređenja čuvaju sve kardinale i kofinalnosti.

Sekciju završavamo kombinatornim tvrđenjem koje ćemo koristiti u utvrđivanju κCC za razna uređenja $\mathcal{P}$. Prethodno definišimo pojam Δ-*sistema* odnosno *kvazi-disjunktne familije*:

B.4.9 Definicija Familija skupova A je *kvazi-disjunktna* (Δ-*sistem*) ako postoji skup r, koji zovemo i korenom familije A, takav da je $a \cap b = r$ za svaka dva međusobno različita skupa $a, b \in A$.

B.4.10 Δ-sistem lema *Neka je κ beskonačan kardinal i neka je $\lambda > \kappa$ regularan kardinal takav da je*

$$(\forall \xi < \lambda)(|[\xi]^{<\kappa}| < \lambda).$$

Tada, za svaku familiju skupova A takvu da je $|A| \geqslant \lambda$ i da

$$(\forall a \in A)(|a| < \kappa),$$

postoji Δ-sistem $B \subseteq A$ kardinalnosti λ.

Dokaz

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $|A| = \lambda$. Tada je $|\bigcup A| \leqslant \lambda$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\bigcup A \subseteq \lambda$. Tada svaki element a skupa A ima tip uređenja $< \kappa$ (kao podskup od λ). Kako je λ regularan kardinal veći od κ, postoji $\rho < \kappa$ tako da je skup

$$A_1 = \{a \in A \mid \mathrm{tp}\langle a, \in\rangle = \rho\}$$

kardinalnosti λ.

Primetimo da je $\bigcup A_1 = \lambda$. Zaista, za proizvoljno $\alpha < \lambda$, kako je $|[\alpha]^{<\kappa}| < \lambda$, iz regularnosti kardinala λ i izbora skupa A_1 sledi da postoji $x_\alpha \in A_1$ tako da $x_\alpha \nsubseteq \alpha$. Odavde sledi da je skup $\bigcup A_1$ neograničen u λ, a kako je $\bigcup A_1 \subseteq \lambda$, mora biti i $\bigcup A_1 = \lambda$.

Za $x \in A_1$ i $\xi < \rho$, sa $x(\xi)$ označimo ξ-ti element skupa x (uređenje je indukovano sa $\in$). Kako je

$$\lambda = \bigcup A_1 = \bigcup_{\xi < \rho} \{x(\xi) \mid x \in A_1\}$$

i kako je λ regularan kardinal, postoji $\xi < \rho$ tako da je

$$|\xi < \rho\{x(\xi) \mid x \in A_1\}| = \lambda.$$

Neka je ξ_0 najmanje takvo $\xi < \rho$. Definišimo ordinal α_0 sa

$$\alpha_0 = \bigcup\{x(\eta) + 1 \mid x \in A_1 \wedge \eta < \xi_0\}.$$

Tada je $\alpha_0 < \lambda$ i $x(\eta) < \alpha_0$ za svako $x \in A_1$ i svako $\eta < \xi_0$. Transfinitnom rekurzijom po $\mu < \lambda$ biramo $x_\mu \in A_1$ tako da je

$$x_\mu(\xi_0) > \max\{\alpha_0, \sup\{x_\nu(\eta) \mid \eta < \rho \wedge \nu < \mu\}\}.$$

Neka je

$$A_2 = \{x_\mu \mid \mu < \lambda\}.$$

Tada je $|A_2| = \lambda$ i $x \cap y \subseteq \alpha_0$ za svak dva medjusobno različita skupa x i y iz familije A_2. Najzad, kako je $\{\alpha_0]^{<\kappa}| < \lambda$, postoje $r \subseteq \alpha_0$ i familija $B \subseteq A_2$ kardinalnosti λ takva da za svako $x \in B$ važi

$$x \cap \alpha_0 = r,$$

odakle sledi da je B traženi Δ-sistem. $\square$.

B.5 Nezavisnost kontinuum hipoteze

Pod *Cohenovim uređenjem* podrazumevamo uređenje oblika

$$\langle Fn(I, J), \supseteq\rangle,$$

pri čemu je I proizvoljan skup, J je najviše prebrojiv skup ($|J| \geqslant 2$), a elementi skupa $Fn(I, J)$ su sve funkcije čiji je domen konačan podskup skupa I i čiji je kodomen podskup skupa J.

Neka su $p, q \in Fn(I, J)$ proizvoljni uslovi. S obzirom na definiciju $Fn(I, J)$, vidimo da su p i q inkompatibilni ako i samo ako postoji $i \in \mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q)$ tako da $p(i) \neq q(i)$.

B.5.1 Lema *Svako Cohenovo uređenje zadovoljava CCC.*

Dokaz

Neka je $\langle Fn(I,J), \supseteq \rangle$ proizvoljno Cohenovo uređenje. S obzirom da tvrđenje trivijalno važi u slučaju kada je skup I najviše prebrojiv, od interesa je slučaj kada je skup I neprebrojiv.

Neka je $X \subseteq Fn(I,J)$ neprebrojiv i neka je

$$A = \{\mathrm{dom}(p) \mid p \in X\}.$$

Na osnovu Δ-sistem leme, postoji neprebrojiva kvazi-disjunktna familija $B \subseteq A$. Ako su $p, q \in Fn(I,J)$ takvi da je $p \perp q$ i $\mathrm{dom}(p), \mathrm{dom}(q) \in B$, onda se inkompatibilnost ostvaruje na nekom $i \in r$. Kako je r konačan i kako je J najviše prebrojiv, međusobno inkompatibilnih uslova takvih da im je domen u B ne može biti neprebrojivo mnogo.

Dakle, u X postoje dva međusobno kompatibilna uslova. Kako ovo važi za svaki neprebrojivi $X \subseteq Fn(I,J)$, u $Fn(I,J)$ ne postoje neprebrojivi antilanci. $\square$

Generičko proširenje modela M dobijeno Cohenovim uređenjem zovemo i *Cohenovim modelom.* Na osnovu prethodne leme sledi da Cohenov forsing (Cohen forcing) čuva kardinale i kofinalnosti.

U nastavku ćemo posebnu paznju obratiti Cohenovim modelima koji nastaju pomoću uređenja

$$\langle Fn(\kappa \times \omega, 2), \supseteq \rangle,$$

pri čemu je κ u M neprebrojiv kardinal. Napomenimo da podrazumevamo da $Fn(\kappa \times \omega, 2) \in M$.

B.5.2 Lema *Neka je G M-generički filter u $Fn(\kappa \times \omega, 2)$. Tada*

$$\bigcup G : \kappa \times \omega \longrightarrow 2.$$

Dokaz

Očigledno je $\bigcup G \subseteq (\kappa \times \omega) \times 2$. Kako su svaka dva uslova iz G kompatibilna, $\bigcup G$ mora biti funkcija. Ostaje još da se proveri da je

$\mathrm{dom}(\bigcup G) = \kappa \times \omega$. Ovo je neposredna posledica činjenice da je za svako $\langle \alpha, n \rangle \in \kappa \times \omega$ skup

$$D(\alpha, n) = \{p \in Fn(\kappa \times \omega, 2) \mid \langle \alpha, n \rangle \in \mathrm{dom}(p)\}$$

gust u $Fn(\kappa \times \omega, 2)$ (naravno, $D(\alpha, n) \in M$). $\square$

B.5.3 Definicija Neka je G proizvoljan M-generički filter u $Fn(\kappa \times \omega, 2)$. Pod *Cohenovim realnim brojem* podrazumevamo skup

$$X_\alpha = \{n \in \omega \mid \bigcup G(\alpha, n) = 1\},$$

pri čemu je $\alpha < \kappa$.

Očigledno svaki Cohenov realan broj pripada generičkoj ekstenziji $M[G]$. Pokažimo da Cohenovi realni brojevi ne pripadaju polaznom modelu M.

B.5.4 Lema *Neka je X_α proizvoljan Cohenov realan broj. Tada*

$$X_\alpha \notin M.$$

Dokaz

Neka je S stari beskonačni podskup skupa ω ($S \in M$) i neka je $\chi_S : \omega \longrightarrow 2$ njegova karakteristična funkcija ($\chi_S(n) = 1 \Leftrightarrow n \in S$). Pokažimo da je skup

$$D = \{p \in Fn(\kappa \times \omega, 2) \mid (\exists n \in \omega)(p(\alpha, n) \neq \chi_S(n))\}$$

gust u $Fn(\kappa \times \omega, 2)$. Neka je $q \in Fn(\kappa \times \omega, 2)$ proizvoljno. Izaberimo $n < \omega$ tako da $\langle \alpha, n \rangle \notin \mathrm{dom}(q)$. Neka je

$$p = \begin{cases} q \cup \{\langle \langle \alpha, n \rangle, 1 \rangle\} & , \quad n \notin S \\ q \cup \{\langle \langle \alpha, n \rangle, 0 \rangle\} & , \quad n \in S \end{cases}.$$

Očigledno je $p \supseteq q$ i $p \in D$, čime smo pokazali da je dkup D gust u $Fn(\kappa \times \omega, 2)$. Kako još i $D \in M$, postoji uslov p_S koji pripada i G i D. Neka je $n_S < \omega$ takvo da je

$$p_S(\alpha, n_S) \neq \chi_S(n_S).$$

Kako je $\bigcup G(\alpha, n_S) = p(\alpha, n_S)$, imamo da

$$n_S \in (X_\alpha \setminus S) \cup (S \setminus X_\alpha),$$

tj. $X_\alpha \neq S$. □

Kao neposrednu posledicu prethodne leme imamo činjenicu da u generičkom proširenju ω ima bar κ novih podskupova. Ako

$$M \models \kappa \geqslant \aleph_2,$$

onda iz prethodnih razmatranja neposredno sledi da

$$M[G] \models 2^{\aleph_0} \geqslant \kappa > \aleph_1,$$

tj. $M[G] \models \neg CH$. Ako još i $M \models \kappa^{\aleph_0} = \kappa$, onda će biti i

$$M[G] \models 2^{\aleph_0} = \kappa. \tag{B.1}$$

Kako bismo ovo dokazali, uvedimo pojam *finog imena*:

B.5.5 Definicija Ime $\tau \in M^{\mathcal{P}}$ je *fino ime* za podskup imena $\sigma \in M^{\mathcal{P}}$, ukoliko je oblika

$$\bigcup \{\{\pi\} \times A_\pi \mid \pi \in \mathrm{dom}(\sigma)\},$$

pri čemu je svaki od skupova A_π antilanac u $\mathcal{P}$.

B.5.6 Lema *Neka su $\sigma, \sigma' \in M^{\mathcal{P}}$ proizvoljna imena. Tada poostoji fino ime $\tau \in M^{\mathcal{P}}$ za podskup od σ takvo da*

$$1 \Vdash (\sigma' \subseteq \sigma \Rightarrow \sigma' = \tau).$$

Dokaz

Za svako $\pi \in \mathrm{dom}(\sigma)$ neka je A_π antilanac u $\mathcal{P}$ sa sledećim svojstvima:

1. $(\forall p \in A_\pi) p \Vdash \pi \in \sigma'$;

2. A_π je maksimalan u odnosu na prethodnu tačku.

Kako je $\Vdash$ definabilno u M i kako $M \models$ ZFC, imamo da

$$\{A_\pi \mid \pi \in \mathrm{dom}(\sigma)\} \in M.$$

Neka je

$$\tau = \bigcup \{\{\pi\} \times A_\pi \mid \pi \in \mathrm{dom}(\sigma)\}.$$

Preostaje da pokažemo da $1 \Vdash (\sigma' \subseteq \sigma \Rightarrow \sigma' = \tau)$. U dokazu koristimo forsing teoremu. Neka je G proizvoljan M-generički filter u $\mathcal{P}$. Ako $\mathtt{I}_G(\sigma') \nsubseteq \mathtt{I}_G(\sigma)$, onda trivijalno

$$M[G] \models \mathtt{I}_G(\sigma') \subseteq \mathtt{I}_G(\sigma) \Rightarrow \mathtt{I}_G(\sigma') = \mathtt{I}_G(\tau),$$

te je stoga od interesa slučaj kada je $\mathtt{I}_G(\sigma') \subseteq \mathtt{I}_G(\sigma)$.

Prvo pokažimo da je $\mathtt{I}_G(\sigma') \subseteq I_G(\tau)$. Neka je $x \in \mathtt{I}_G(\sigma')$ proizvoljno. Tada postoje ime π i uslov p takvi da $\langle \pi, p\rangle \in \sigma$, $x = \mathtt{I}_G(\pi)$ i $p \in G$. Ako je $G \cap A_\pi \neq 0$, onda za jedinstveno $q \in G \cap A_\pi$ važi da

$$q \Vdash \pi \in \sigma' \wedge \pi \in \tau,$$

a time i $\mathtt{I}_G(\pi) \in \mathtt{I}_G(\tau)$. Tvrdimo da je $G \cap A_\pi \neq 0$. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji uslov $q \in G$ inkompatibilan sa svim uslovima iz A_π (svaki M-generički filter je i ultrafilter) takav da $q \Vdash \pi \in \sigma'$, pa bi $A_\pi \cup \{q\}$ bio antilanac koji zadovoljava 1., a ovo je u kontradikciji sa maksimalnošću antilanca A_π.

Preostaje da pokažemo da ej $\mathtt{I}_G(\tau) \subseteq \mathtt{I}_G(\sigma')$. Neka je $x \in \mathtt{I}_G(\tau)$ i neka su ime π i uslov p takvi da $\langle \pi, p\rangle \in \tau$, $p \in G$ i $\mathtt{I}_G(\pi) = x$. Iz definicije uslova τ tada neposredno sledi da $p \in A_\pi$, pa $p \Vdash \pi \in \sigma'$, a kako $p \in G$, imamo da $\mathtt{I}_G(\pi) \in \mathtt{I}_G(\sigma')$. □

B.5.7 Teorema *Neka je $\mathcal{P} \in M$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata takvo da važi:*

- $M \models |\mathcal{P}| = \kappa \geqslant \aleph_0$;
- $M \models$ *"$\mathcal{P}$ zadovoljava CCC";*

- $M \models \nu = \kappa^{\lambda} \wedge \lambda \geqslant \aleph_0 \wedge \lambda \in \text{Card}$.

Tada za svaki M-generički filter G u $\mathcal{P}$ imamo da

$$M[G] \models 2^{\lambda} \leqslant \nu.$$

Dokaz

U M, svaki antilanac uređenja $\mathcal{P}$ je najviše prebrojiv, odakle sledi da imamo najviše $\kappa^{\aleph_0}$ antilanaca u $\mathcal{P}$. Dalje,

$$|\text{dom}(\check{\lambda})| = |\{\check{\alpha} \mid \alpha < \lambda\}| = \lambda,$$

pa imamo najviše

$$(\kappa^{\aleph_0})^{\lambda} = \kappa^{\lambda} = \nu$$

finih imena za podskupove od $\check{\lambda}$. Neka je $\{\tau_\alpha \mid \alpha < \nu\}$ skup svih takvih imena.

Neka je

$$\sigma = \{\langle \text{op}(\check{\alpha}, \tau_\alpha), \mathbf{1} \rangle \mid \alpha < \nu\}$$

i neka je $f = \mathtt{I}_G(\sigma)$. Tada je $f(\alpha) = \mathtt{I}_G(\tau_\alpha), \alpha < \nu$. Na osnovu prethodne leme je

$$P(\lambda) \cap M[G] \subseteq \text{rng}(f),$$

odakle sledi da

$$M[G] \models 2^{\lambda} < \nu.$$

$\square$

Primetimo da smo prethodnom teoremom kompletirali dokaz za (B.1).

B.5.8 Zadatak Neka je M prebrojiv tranzitivan model teorije ZF. Pokazati da tada postoji prebrojiv tranzitivan model teorije

$$\text{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_2.$$

Uputstvo

Primetitmo da je L^M prebrojiv tranzitivan model teorije ZFL, pa u njemu važe askioma izbora i generalisana kontinuum hipoteza. Iskoristiti GCH u dokazu činjenice

$$L^M \models \aleph_2^{\aleph_0} = \aleph_2.$$

Traženi model je $L^M[G]$, pri čemu je G L^M-generički filter u

$$\langle Fn(\aleph_2 \times \omega, 2), \supseteq\rangle^{L^M}.$$

$\square$

B.6 Kompletna utapanja

Radi pojednostavljenja notacije, podrazumevamo da se kompletna argumentacija koja se ne odnosi na generička proširenja sprovodi unutar M.

B.6.1 Definicija Preslikavanje $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ je *kompletno utapanje* uređenja $\langle \mathcal{P}, \leqslant\rangle$ u uređenje $\langle \mathcal{Q}, \leqslant\rangle$ ako važi:

- $(\forall p_1, p_2 \in \mathcal{P})(p_1 \leqslant p_2 \Rightarrow i(p_1) \leqslant i(p_2))$;
- Uslovi p_1 i p_2 su inkompatibilni u $\mathcal{P}$ ako i samo ako su uslovi $i(p_1)$ i $i(p_2)$ inkompatibilni u $\mathcal{Q}$;
- Za svako $q \in \mathcal{Q}$ postoji $p_q \in \mathcal{P}$ tako da za svako $p \in \mathcal{P}$, ukoliko je $p \leqslant p_q$, onda su $i(p)$ i q kompatibilni u $\mathcal{Q}$.

Posebno, ako je $\langle \mathcal{P}, \leqslant\rangle$ podure đenje uređenja $\langle \mathcal{Q}, \leqslant\rangle$, onda

$$\langle \mathcal{P}, \leqslant\rangle \subseteq_c \langle \mathcal{Q}, \leqslant\rangle$$

označava da je inkluzija kompletno utapanje $\mathcal{P}$ u $\mathcal{Q}$.

B.6.2 Zadatak Koristeći separativnost uređenja $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ pokazati da je svako kompletno utapanje $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ zaista utapanje, tj. da je 1–1 i da za svako $p_0, p_1 \in \mathcal{P}$ važi

$$p_0 \leqslant p_1 \Leftrightarrow i(p_0) \leqslant i(p_1).$$

Uputstvo

Neka je $i(p_0) \leqslant i(p_1)$. Ako nije $p_0 \leqslant p_1$, onda zbog separativnosti uređenja $\mathcal{P}$ postoji uslov $p_2 \leqslant p_0$ inkompatibilan sa p_1. Sada iz definicije kompletnog utapanja sledi da su $i(p_0)$ i $i(p_2)$ inkompatibilni. Međutim, zbog monotonosti i je

$$i(p_2) \leqslant i(p_0) \leqslant i(p_1),$$

čime smo dobili kontradikciju.

Neka je $i(p_0) = i(p_1)$. Prema upravo dokazanom mora biti i $p_0 \leqslant p_1$. Ako nije $p_1 \leqslant p_0$, onda zbog separativnosti $\mathcal{P}$ postoji $p_2 \leqslant p_1$ inkompatibilno sa p_0. Međutim, tada moraju biti $i(p_0)$ i $i(p_2)$ inkompatibilni, što je u suprotnosti sa $i(p_2) \leqslant i(p_1) = i(p_0)$.

$\square$

B.6.3 Zadatak Dokazati sledeće:

1. Svaki izomorfizam separativnih uređenja je i kompletno utapanje;
2. Ako je $I \subseteq I'$, onda je $Fn(I, J, \kappa) \subseteq_c Fn(I', J, \kappa)$

B.6.4 Zadatak Neka su $\langle \mathcal{P}, \leqslant \rangle$ i $\langle \mathcal{Q}, \leqslant \rangle$ u M separativna uređenja i neka je $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ u M kompletno utapanje. Ako je H M-generički filter u $\mathcal{Q}$, pokazati da je $G = i^{-1}[H]$ M-generički filter u $\mathcal{P}$.

Uputstvo

Ako $p \in G$ i ako je $p \leqslant p'$, onda zbog monotonosti i mora biti i $i(p) \leqslant i(p')$. H je filter i $i(p) \in H$, pa je i $i(p') \in H$, odakle sledi da $p' \in H$.

Što se tiče preostale stavke iz definicije filtera, prvo primetimo da je G kompatibilan skup u $\mathcal{P}$, jer i čuva kompatibilnost i H je kompatibilan skup u $\mathcal{Q}$. Ukoliko pokažemo da je G M-generički, onda će G biti i filter u $\mathcal{P}$.

Pokažimo da je G M-generički skup. Neka je $D \in M$ gust u $\mathcal{P}$. Lako se proverava da je ili $H \cap i[D] \neq 0$, ili postoji $q \in H$ inkompatibilno sa svim elementima skupa $i[D]$. Pretpostavimo da postoji takvo q. Zbog kompletnosti i postoji $p_q \in \mathcal{P}$ tako da su za svaki uslov $p \leqslant p_q$ uslovi $i(p)$ i q kompatibilni u $\mathcal{Q}$.

No D je gust u $\mathcal{P}$, pa postoji $p \in D$ tako da je $p \leqslant p_q$, odakle sledi da su $i(p)$ i q kompatibilni u $\mathcal{Q}$, što je u kontradikciji sa izborom q.

Dakle, takvo q ne postoji, pa je $H \cap i[D] \neq \emptyset$, tj. $G \cap D \neq \emptyset$. $\square$

B.6.5 Zadatak Neka je $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ izomorfizam i neka je $G \subseteq \mathcal{P}$ filter.

1. Dokazati da je $H = i[G]$ filter u $\mathcal{Q}$;

2. Dokazati da je G M generički ako i samo ako je H M-generički.

B.6.6 Teorema *Neka je $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ kompletno utapanje i neka je H M-generički filter u $\mathcal{Q}$. Tada je $i^{-1}[H]$ M-generički filter u $\mathcal{P}$ i*

$$M[i^{-1}[H]] \subseteq M[H]$$

Dokaz

Neka je $G = i^{-1}[H]$. Na osnovu zadatka B.6.4 je G M-generički filter u M. S obzirom da $i \in M$ i da $H \in M[H]$, to i $G \in M[H]$. Kako je $M[G]$ najmanji prebrojivi tranzitivan model teorije ZFC takav da je $M \subseteq M[G]$ i da $G \in M[G]$, mora biti

$$M[G] \subseteq M[H].$$

$\square$

Primetimo da u slučaju kada je i izomorfizam imamo jednakost generičkih proširenja $M[G]$ i $M[H]$.

B.6.7 Zadatak Pokazati da je svako gusto utapanje ujedno i kompletno.

B.6.8 Zadatak Neka su G i H M-generički filteri u $\mathcal{P}$ takvi da je $G \subseteq H$. Dokazati da je $G = H$.

B.6.9 Definicija Neka je $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ u M gusto utapanje i neka je G filter u $\mathcal{P}$. Skup $G_i \subseteq \mathcal{Q}$ definišemo sa

$$G_i = \{q \in \mathcal{Q} \mid (\exists p \in \mathcal{P}) i(p) \leqslant q\}.$$

B.6.10 Zadatak Uz simboliku iz prethodne definicije, pokazati sledeće:

1. G_i je filter u $\mathcal{Q}$;
2. $G = i^{-1}[G_i]$;
3. G je M-generički ako i samo ako je G_i M-generički;
4. Ako je G M-generički, onda je $M[G] = M[G_i]$.

B.6.11 Definicija Neka je $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ utapanje. Za proizvoljno $\mathcal{P}$-ime σ rekurzivno definišemo odgovarajuće $\mathcal{Q}$ ime $i(\sigma)$ sa

$$i(\sigma) = \{\langle i(\tau), i(p)\rangle \mid \langle \tau, p\rangle \in \sigma\}.$$

B.6.12 Teorema *Neka je $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ u M kompletno utapanje. Tada važi:*

1. *Ako je H M-generički filter u $\mathcal{Q}$, onda je*

$$\sigma^{M[i^{-1}[H]]} = i(\sigma)^{M[H]}$$

za svako $\mathcal{P}$-ime σ;

2. Neka je $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ formula apsolutna za tranzitivne modele teorije ZFC i neka su $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ proizvoljna $\mathcal{P}$-imena. Tada za svaki uslov $p \in \mathcal{P}$,

$$p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

ako i samo ako

$$i(p) \Vdash_{\mathcal{Q}} \varphi(i(\sigma_1), \dots, i(\sigma_n));$$

3. Ako je $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ gusto utapanje, onda za svaku formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, proizvoljna $\mathcal{P}$-imena $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ i bilo koji uslov $p \in \mathcal{P}$ važi da

$$p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

ako i samo ako

$$i(p) \Vdash_{\mathcal{Q}} \varphi(i(\sigma_1), \dots, i(\sigma_n)).$$

Dokaz

(1): Pošto je

$$\sigma^{M[i^{-1}[H]]} = \{\tau^{M[i^{-1}[H]]} \mid (\exists p \in i^{-1}[H])\langle \tau, p\rangle \in \sigma\},$$

kao i da je

$$0^{M[i^{-1}[H]]} = i(0)^{M[H]} = 0,$$

tvrđenje se sasvim lako dokazuje indukcijom po imenskom rangu.

(2): Pretpostavimo prvo da $p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ i uočimo proizvoljan M-generički filter H u $\mathcal{Q}$ takav da $i(p) \in H$. Da bismo pokazali da

$$i(p) \Vdash_{\mathcal{Q}} \varphi(i(\sigma_1), \dots, i(\sigma_n)),$$

na osnovu forcing teoreme (teorema B.2.12) je dovoljno pokazati da

$$M[H] \models \varphi(i(\sigma_1)^{M[H]}, \dots, i(\sigma_n)^{M[H]}).$$

Kako je po (1)

$$i(\sigma_k)^{M[H]} = \sigma_k^{M[i^{-1}[H]]}, \quad k = 1, \dots, n,$$

ustvari treba dokazati da

$$M[H] \models \varphi(\sigma_1^{M[i^{-1}[H]]}, \dots, \sigma_n^{M[i^{-1}[H]]}).$$

No formula φ je apsolutna za tranzitivne modele teorije ZFC, pa zbog $M[i^{-1}[H]] \subseteq M[H]$ imamo da

$$M[H] \models \varphi(\sigma_1^{M[i^{-1}[H]]}, \dots, \sigma_n^{M[i^{-1}[H]]})$$

ako i samo ako

$$M[i^{-1}[H]] \models \varphi(\sigma_1^{M[i^{-1}[H]]}, \dots, \sigma_n^{M[i^{-1}[H]]}).$$

No poslednje direktno sledi iz forcing teoreme i pretpostavke da $p \Vdash \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Što se tiče obratne implikacije, pretpostavimo da

$$p \nVdash \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Tada postoji uslov $p_0 \leqslant p$ takav da

$$p_0 \Vdash \neg\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

pa po dokazanom smeru važi

$$i(p_0) \Vdash \neg\varphi(i(\sigma_1), \dots, i(\sigma_n)),$$

odakle zbog monotonosti i imamo da

$$ip \nVdash \neg\varphi(i(\sigma_1), \dots, i(\sigma_n)).$$

(3): Neznatna modifikacija dokaza stavke (2): treba primetiti da je $M[i^{-1}[H]] = M[H]$. $\square$

B.6.13 Definicija Neka su $\langle \mathcal{P}_\xi, \leqslant, \mathbf{1}_\xi \rangle$, $\xi < \alpha$ separativna uređenja bez minimalnih elemenata. Njihov *proizvod* je uređenje

$$\langle \prod_{\xi<\alpha} \mathcal{P}_\xi, \leqslant, \mathbf{1} \rangle$$

definisano na sledeći način:

- $\langle p_\xi \mid \xi < \alpha \rangle \leqslant \langle q_\xi \mid \xi < \alpha \rangle \Leftrightarrow (\forall \xi < \alpha) p_\xi \leqslant q_\xi$;
- $\mathbf{1} = \langle \mathbf{1}_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$.

Za proizvoljno $p \in \prod\limits_{i \in I} P_i$ neka je

$$\mathrm{supp}(p) = \{ i \in I \mid p(i) \neq \mathbf{0} \}.$$

Kanonsko utapanje $i_\eta : \mathcal{P}_\eta \longrightarrow \prod\limits_{\xi<\alpha} \mathcal{P}_\xi$ definišemo na sledeći način:

$$i_\eta(p)(\xi) = \begin{cases} \mathbf{1}_\xi & , \quad \xi \neq \eta \\ p & , \quad \xi = \eta \end{cases} .$$

U specijalnom slučaju kada je $\alpha = 2$ neka je

$$i_0(p) = \langle p, \mathbf{1} \rangle \quad \text{i} \quad i_1(p) = \langle \mathbf{1}, p \rangle.$$

κ-podržan proizvod definišemo sa

$$\prod_{\xi<\alpha}^{<\kappa} \mathcal{P}_\xi = \{ p \in \prod_{\xi<\alpha} \mathcal{P}_\xi \mid |\mathrm{supp}(p)| < \kappa \}.$$

B.6.14 Zadatak Pokazati da je svaka od funkcija i_η kompletno utapanje.

Literatura

[1] J. Canny. Some algebraic and geometric computations in PSPACE. In *Proc. of XX ACM Symposium on theory of computing*, 460–467. 1978.

[2] C. C. Chang, H. J. Keisler. Model theory. 3rd ed. North-Holland, 1990.

[3] D. Dubois, H. Prade. Qualitative possibility functions and integrals. In: E. Pap, editor, *Handbook of measure theory*, North-Holland, 1499 – 1522, 2002.

[4] R. Fagin, J. Halpern. Reasoning about knowledge and probability, Journal of the ACM 41(2), pp 340–367, 1994

[5] R. Fagin, J. Halpern, N. Megiddo. A logic for reasoning about probabilities, Information and Computation 87(1–2), pp 78–128, 1990

[6] P. Hájek. Metamathematics of fuzzy logic. Kluwer academic publishers, 1998.

[7] A. Heifetz, P. Mongin. Probability logic for type spaces. Games and economic behavior 35, 31–53, 2001.

[8] T. Jech, Multiple forcing, Cambridge university press, 1986.

[9] T. Jech, *Set Theory*, The Third Millennium Edition, revised and expanded Series, Springer Monographs in Mathematics, 3rd rev. ed., 2003.

[10] A. Jovanović, Some more details in Rudin Keilser order, Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, serie II, numero 28, anno 1992.

[11] A. Jovanović, Uniform measures over continuum, Teoria della misura e sue applicazioni, atti del convegno, Trieste (1980), 127–129

[12] A. Jovanović, On real valued measures, Open Days in Model Theory and Set Theory, Proc. of a Conference held at Jadwisin, Poland (1981), W. Guzicki, W. Marek, A. Pelc and C. Rauszer, eds, 145–152

[13] A. Jovanović, Real valued measurability, some set–theoretic aspects, in Handbook of measure theory, E. Pap editor, Elsevier 2002, pp 1261–1293.

[14] A. Jovanović, A. Perović. Contrapunctus of the Continuum problem and the Measure problem. Publications de l'institut mathematique, Nouvelle serie, 82 (96) (2007), 83-91.

[15] A. Jovanović, A. Perović. LF and HF spectral domains for Brain Computer Interface. Proc. Of the Neuromath Workshop 2007. Rome, Dec. 4-5, 2007, 63–64.

[16] J. Keisler. Elementary calculus. An infinitesimal approach. 2nd ed. Boston, Massachusetts, Prindle, Weber and Schmidt. 1986.

[17] S. Koppelberg, General theory of Boolean algebras, in D. Monk, R. Bonnet, editors, Handbook of Boolean algebras, Volume 1, Elsevier 1989.

[18] K. Kunen *Set theory. An introduction to independence proofs* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.

[19] D. Lehmann, Generalized qualitative probability: Savage revisited, Procs. of 12 th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-96), (E. Horvitz and F. Jensen eds.), pp. 381–388, 1996

[20] D. Lehmann, and M. Magidor. What does a conditional knowledge base entail? *Artificial Intelligence* 55:1 – 60. 1992.

[21] T. Lukasiewicz. Probabilistic Default Reasoning with Conditional Constraints. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 34, 35 – 88. 2002.

[22] T. Lukasiewicz. Nonmonotonic probabilistic logics under variable-strength inheritance with overriding: Complexity, algorithms, and implementation. *International Journal of Approximate Reasoning* 44(3), 301-321, 2007.

[23] E. Marchioni, L. Godo, A Logic for Reasoning about Coherent Conditional Probability: A Modal Fuzzy Logic Approach. In J. Leite and J. Alferes, editors, 9th European Conference Jelia'04, Lecture notes in artificial intelligence (LNCS/LNAI), 3229, 213 - 225, 2004.

[24] D. Marker, Model Theory, Springer 2002.

[25] M. Meier. An infinitary probability logic for type spaces. Israel J. of Mathematics, ∞.

[26] Žarko Mijajlović.

[27] Ž. Mijajlović, An introduction to model theory, University of Novi Sad, Institute of Mathematics, 1987.

[28] Ž. Mijajlović, M. Milošević, A. Perović. Infinitesimals in non-standard analysis versus infinitesimals in p-adic fields. A. Y. Khrennikov, Z. Rakic and I. V. Volovich (Eds.) p-adic Mathematical Physics. 2nd int'l. conf. Belgrade 15-21 Sept. 2005. AIP conference proceedings, vol 826 (2006), 274–279.

[29] Ž. Mijajlović, M. Milošević, A. Perović. Ideal membership in signomial rings. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 18 (2007), 64–67.

[30] Ž. Mijajlović, M. Milošević, A. Perović. Sums of like powers and some dense sets. Publications de l'institut mathematique, Nouvelle serie, tome 81 (95) (2007), 45–52.

[31] J. R. Munkres, Topology. A first course, Prentice–Hall 1975

[32] L. Narens, On qualitative axiomatizations for probability theory, Journal of Philosophical Logic, Volume 9, Number 2, pp 143–151, Springer 1980

[33] N. Nilsson. Probabilistic logic. Artificial intelligence, 28, 71–87, 1986.

[34] P. Odifreddi. Classical recursion theory. North–Holland 1989.

[35] Z. Ognjanović, M. Rašković, A logic with higher order probabilities, Publications de l'institut mathematique, Nouvelle série, tome 60(74), pp 1–4, 1996

[36] Z. Ognjanović, M. Rašković, Some probability logics with new types of probability operators, J. Logic Computat., Vol 9 No. 2, pp 181–195, 1999

[37] Z. Ognjanović, M. Rašković, Some first-order probability logics, Theoretical Computer Science 247(1–2), pp 191–212, 2000

[38] Z. Ognjanović, Z. Marković, M. Rašković. Completeness Theorem for a Logic with imprecise and conditional probabilities, Publications de L'Institute Matematique (Beograd), ns. 78 (92) 35 - 49, 2005.

[39] Z. Ognjanović, A. Perović, M. Rašković. Logic with the qualitative probability operator. Logic journal of IGPL, Oxford University press, doi:10.1093/jigpal/jzm031

[40] A. Perović. Forcing with propositional Lindenbaum algebras. Publications de l'institut mathematique, Nouvelle serie, 82 (96) (2007), 133-136.

[41] A. Perović, A. Jovanović, B. Veličković. Teorija skupova. Matematički fakultet, Beograd, 2007.

[42] A. Perović, M. Jovanović, A. Jovanović. An application of the interpretation method in the axiomatization of the Lukasiewicz logic and the Product logic. Acta Polytechnica Hungarica, Vol. 5, no 1, 2008, 105–110.

[43] A. Perović, Z. Ognjanović, M. Rašković, Z. Marković. A probabilistic logic with polynomial weight formulas. S. Hartmann and G. Kern-Isberner (Eds.) FoIKS 2008 LNCS 4932, pp 239–252, 2008.

[44] A. Perović, Z. Ognjanović, M. Rašković, Z. Marković. How to restore compactness into probabilistic logic? LNCS, ∞

[45] M. Rašković. Classical logic with some probability operators, Publications de l'institut mathematique, Nouvelle série, tome 53(67), pp 1–3, 1993.

[46] M. Rašković, Z. Ognjanović. A first order probability logic LP_Q. Publications de l'institut mathematique, Nouvelle série, tome 65(79), pp 1–7, 1999.

[47] M. Rašković, Z. Ognjanović, Z. Marković, A logic with Conditional Probabilities, In J. Leite and J. Alferes, editors, 9th European Conference Jelia'04 Logics in Artificial Intelligence, volume 3229 of Lecture notes in computer science, pages 226–238, Springer-Verlag 2004

[48] Miodrag Rašković, Zoran Marković, Zoran Ognjanović. A Logic with Approximate Conditional Probabilities that can Model Default Reasoning International Journal of Approximate Reasoning, doi:10.1016/j.ijar.2007.08.006

[49] D. Scott. Measurement models and linear inequalities. Journal of Mathematical Psychology, 1, 233–247, 1964.

[50] A. Robinson. Non-standard analysis. Amsterdam, North-Holland. 1966.

[51] W. van der Hoek, Some considerations on the logic $P_F D$: a logic combining modality and probability, Journal of Applied Non-Classical Logics, 7(3), 287–307, 1997

[52] M. P. Wellman, Some varieties of qualitative probability, Proceedings of the 5th International Conference on Information Processing and the Management of Uncertainty, Paris 1994