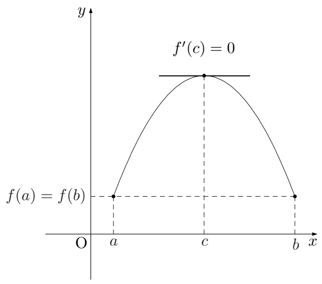
補足資料： **Taylor** 展開について

■平均値の定理の一般化と Taylor の定理

Rolle の定理

$$f(x):\quad \begin{array}{l} [a,b]\ \text{で連続} \\ (a,b)\ \text{で微分可能} \\ f(a)=f(b) \end{array} \quad\longrightarrow\quad f'(c)=0\ \text{となる}\ a<c<b\ \text{が存在する}.$$

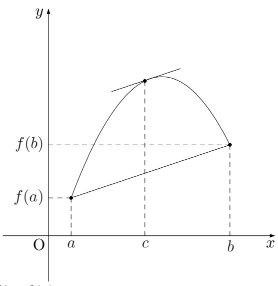


平均値の定理： **Rolle** の定理の一般化 ($f(b) = f(a)$ とおけば Rolle の定理に帰着)

平均値の定理

$$f(x):\quad \begin{array}{l} [a,b]\ \text{で連続} \\ (a,b)\ \text{で微分可能} \end{array} \quad\longrightarrow\quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ \text{となる}\ a<c<b\ \text{が存在する}.$$

平均値の定理の効用



- 近似 (授業でさんざんやった)
- 1 点の近傍のローカルな (「無限小の区間」の) 情報 → 有限区間の情報
  e.g. 微分係数の符号 → 単調性，2 階導函数の符号 → 凸性⋯.
- その他もろもろ

証明： 右図からわかるように，$y = f(x)$ から $(a, f(a)), (b, f(b))$ を通る直線 ($y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$) を引けば Rolle の定理に帰着される．そこで

$$F(x) := f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)$$

とおけば，$F(x)$ は Rolle の定理の仮定をみたすので，

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad\to\quad F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

となる $a < c < b$ が存在する．(証明終)

別証明： 証明すべき式を

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$$

と変形する．言い換えると，

$$f(b) = f(a) + R(b-a), \quad R\text{: 定数}$$

をみたす R を決定できればよい．そこで $(a = x$ とおいて)

$$F(x) := -f(b) + f(x) + R(b-x)$$

とおくと直ちに $F(b) = 0$ で，これに対して $F(a) = 0$ が成り立つように R を決めることになる．すると，Rolle の定理より

$$F'(x) = f'(x) - R \ \rightarrow \ F'(c) = f'(c) - R = 0$$

となる $a < c < b$ が存在するので $R = f'(c)$．(証明終)

平均値の定理の拡張: Taylor の定理　上の証明で現れた式 $f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$ を拡張して，

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + R(b-a)^2$$

が成り立つように定数 R を決めることができる．実際，

$$F(x) := -f(b) + f(x) + f'(x)(b-x) + R(b-x)^2$$

とおくと直ちに $F(b) = 0$ で，これに対して $F(a) = 0$ が成り立つように R を決めることになる．両辺を x で微分して

$$F'(x) = f'(x) + \left(f''(x)(b-x) - f'(x)\right) - 2R(b-x) = (b-x)\left(f''(x)(b-x) - 2R\right)$$

であるから，Rolle の定理より $a < c < b$ をみたす c が存在して

$$F'(c) = (b-c)\left(f''(c)(b-c) - 2R\right) = 0 \quad \rightarrow \quad R = \frac{f''(c)}{2}$$

となる．従って，

> 平均値の定理の拡張
>
> $$f(x) : \quad \begin{array}{l} [a,b] \text{ で 1 階微分可能で導函数も連続} \\ (a,b) \text{ で 2 階微分可能} \end{array}$$
>
> $$\longrightarrow f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2 \text{ となる } a < c < b \text{ が存在する．}$$

以上のことはさらに一般化され，

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R(b-a)^{n+1} \quad (※)$$

を満たす R を同様に決定することができる．以後この計算をするが，その前に自ら必ず手を動かして以下の計算をしておきなさい．

> 問： 上の計算を真似して，平均値の定理をさらに拡張して
>
> $$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + R(b-a)^3$$
>
> が成り立つように定数 R を決定しなさい．

さて，(※) を満たす R を決定しよう．

$$F(x) := -f(b) + f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{f''(x)}{2}(b-x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-x)^n + R(b-x)^{n+1}$$

とおくと定義より直ちに $F'(b)=0$ である．$F(a)=0$ が成り立つように R を決めよう．両辺を微分すると

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= f'(x) + \{f''(x)(b-x) - f'(x)\} + \left\{\frac{f'''(x)}{2}(b-x)^2 - f''(x)(b-x)^2\right\} \\
&\quad + \cdots + \left\{\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!}(b-x)^{n-2}\right\} + \left\{\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right\} - (n+1)R(b-x)^n \\
&= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - (n+1)R(b-x)^n
\end{aligned}
$$

であるから，Rolle の定理より $a<c<b$ を満たす c が存在して

$$
F'(c) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n - (n+1)R(b-c)^n \quad \to \quad R = \frac{f^{(n)}(c)}{(n+1)!}
$$

と R が決定できた．以上の結果を定理の形にまとめると以下のようになる．

Taylor の定理

$$
f(x)\ :\ \begin{array}{l} [a,b] \text{ で } n \text{ 階微分可能で } n \text{ 階導函数まで連続} \\ (a,b) \text{ で } (n+1) \text{ 階微分可能} \end{array}
$$

$$
\longrightarrow f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}
$$

となる $a<c<b$ が存在する．

■Taylor の定理と近似

Taylor の定理は，気分の問題ではあるが，$b=x$ とおくと

$$
f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}, \quad R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}
$$

とも書き直せる．この式は次のように読める．

- x での函数値を $x=a$ での函数値と微分係数で表す公式である．
- x が a に近いときに，$f(x)$ の値を「ずれ」$(x-a)$ の n 次式で近似する公式である．R_{n+1} は誤差を表す「剰余項」である．

また，$b=a+h$ とおいて

$$
f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_{n+1}, \quad R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, \quad 0<\theta<1
$$

と書くこともできる．この式も同様に次のように理解できる．

- $x=a$ での函数値と微分係数の値を用いて $x=a+h$ での函数値を求める公式である．
- また，h だけずれた点の値を「ずれ」h の n 次式で近似する公式とも読める．R_{n+1} は誤差を表す「剰余項」である．

とにかく重要なことは，$f(x)$ が $(x-a)$ の多項式で書け，$(x-a)^k$ の係数が $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ で与えられるということである．このことは次のように考えれば直感的に理解することができる．今，仮に $f(x)$ の値が $(x-a)$ の多項式

$$
f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots
$$

で表されたとしよう．両辺 $x = a$ とおくと $f(a) = c_0$ となるし，両辺を x で一度微分し

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots$$

$x = a$ とおくと $f'(a) = c_1$ となる．同様に，両辺 n 階微分をとって $x = a$ とおくと $f^{(n)}(a) = n!c_n$ となり，確かに Taylor 展開の形にならざるを得ないことがわかる．Taylor の定理はそれが本当であることを保証し，剰余項を含めた厳密な表式を与えているのである．

■例　以下の問題は授業でもやったが重要なので再掲する．

(1) $\sin x$ の $x \sim 0$ の回りの Taylor 展開を第 n 項まで書きなさい．また，剰余項も書きなさい．
(2) この結果を用いて $\sin 0.1$ の近似値を求めたい．今 Taylor 展開の第 1 項のみを取ったとき，誤差はどの程度の値になると考えられるか．
(3) $\sin 0.1$ を小数点以下 6 桁まで正しく計算するには，第何項まで取ればよいか．また，$\sin 0.1$ の小数点第 6 位まで正しい近似値を求めなさい．

(1) $f(x) = \sin x$ とすると，$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = -\sin x = \sin(x+\pi)$, $f'''(x) = -\cos x = \sin(x + \frac{3\pi}{2})$, $f^{(4)}(x) = \sin x = \sin(x + 2\pi)$, $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ であるから，

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{k-1} & (n = 2k-1) \\ 0 & (n = 2k) \end{cases}$$

$$f^{(2n+1)}(\theta x) = \sin(\theta x + \frac{2n+1}{2}\pi) = \cos(\theta x + n\pi) = (-1)^n \cos\theta x$$

従って，

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + R_{n+1}, \quad R_{n+1} = \frac{(-1)^n \cos\theta x}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}, \quad 0 < \theta < 1$$

(2) $n = 1$ として，

$$\sin x = x - \frac{\cos\theta x}{3!}x^3, \quad 0 < \theta < 1$$

従って第 1 項のみ取ると，誤差は

$$\left|-\frac{\cos\theta x}{3!}x^3\right| = \frac{1}{6}\cos 0.1\theta \times (0.1)^3 < \frac{1}{6} \times 10^{-3} = 1.67 \times 10^{-4}$$

程度と考えられる．

(3) 剰余項が

$$|R_{n+1}| = \left|\frac{(-1)^n \cos\theta x}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}\right| = \frac{1}{(2n+1)!}|\cos\theta x| \times |x^{2n+1}| < \frac{10^{-2n-1}}{(2n+1)!} =< 10^{-6}$$

となればよいが，これは $n = 2$ で満たされる．従って，第 2 項まで取ったもの

$$\sin x \sim x - \frac{1}{3!}x^3 = 0.1 - \frac{1}{6} \times 0.001 = 0.099833\cdots$$

が小数第 6 位まで正しい値である．

■MacLaurin 展開　Taylor 展開で特に $x = 0$ と取ったもの (0 における Taylor 展開)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}$$

を MacLaurin 展開ということがある（Taylor 展開と区別しない場合も多い）．繰り返し強調しておくが，これは x が 0 に近い場合，$f(x)$ を x の多項式で近似した式であると見なすことができる．

主な初等函数に対する MacLaurin 展開

以下の展開は大変重要なので，自分で導き，覚えておくこと．また，剰余項の表示は一通りではないので文献によって異なる．

(1)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_{n+1}, \quad R_{n+1} = e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

(2)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{n+1}, \quad R_{n+1} = (-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

(3)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{n+1}, \quad R_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

(4)

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_{n+1}, \quad R_{n+1} = (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1}$$

(5)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}$$

$$R_{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

特に

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + R_{n+1}, \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + R_{n+1}$$

はよく用いる．また，$\alpha = n$(自然数) の場合は $R_{n+1} = 0$ となり，いわゆる 2 項展開となる．

■ 初等函数の Taylor 展開における実際的な注意

与えられた函数 $f(x)$ の Taylor 展開は，できるとすれば一意的である．従って，Taylor 展開の係数を求める際に，わざわざ高階の微分係数を計算しなくとも既知の $\sin x$ などの展開を組み合わせてできる場合がある．

✔ 例

e^{x^2} の Taylor 展開：

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}(x^2)^2 + \frac{1}{3!}(x^2)^3 + \cdots = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots$$

$e^{\sin x}$ の Taylor 展開：

$$\begin{aligned}e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{1}{2!}\sin^2 x + \frac{1}{3!}\sin^3 x + \cdots \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)^4 + \cdots\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)^2 &= x^2 - 2 \times x \times \frac{x^3}{3!} + \left(\left(\frac{1}{3!}\right)^2 + 2 \times 1 \times \frac{1}{5!}\right)x^6 + O(x^8) \\ \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)^3 &= x^3 - 3 \times x^2 \times \frac{x^3}{3!} + O(x^7) \\ \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)^4 &= x^4 + O(x^6)\end{aligned}$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right) + +\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + O(x^8)\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{1}{2}x^5 + O(x^7)\right) + \frac{1}{24}(x^4 + O(x^6)) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^5)\end{aligned}$$

このような巾 (ベキ) の計算は工学でよく行われる！習熟しておくように．

(☆)　上の計算で，暗黙のうちに

$$\begin{aligned}(a + b + \cdots)^2 &= a^2 + b^2 + \cdots + 2(ab + \cdots) \\ (a + b + \cdots)^3 &= \underbrace{a^3 + b^3 + \cdots}_{(1)} + \underbrace{3(a^2b + ab^2 + \cdots)}_{(2)} \\ (a + b + \cdots)^4 &= a^4 + b^4 + \cdots + 4(a^3b + ab^3 + \cdots) + 6(a^2b^2 + \cdots)\end{aligned}$$

という展開を行っている．包括的な表現をすれば大変ややこしいことになるので，感覚でわかって欲しい．$(a+b+\cdots)^3$ を例に説明する．

$$(a + b + \cdots)^3 = \underbrace{(a + b + \cdots)}_{(i)}\underbrace{(a + b + \cdots)}_{(ii)}\underbrace{(a + b + \cdots)}_{(iii)}$$

この積は各因子 (i),(ii),(iii) から 1 項ずつ取ってかけ算をし，それらの項を全ての選び方について足しあげたものである．

- 全ての因子から a を選ぶ → a^3，b を選ぶ → b^3 $\cdots$ ((1) の部分)
- 二つの因子から a を選び，残りの一つから b を選ぶ → a^2b，選び方が 3 通りあるから $3a^3b$ ⋯((2) の部分)
- ⋯

といった感じである．または，例えば 3 乗を計算するときは，2 乗を計算しておき，それにもう 1 乗をかけ算して次数の小さい項から拾っていってもよかろう．

■Taylor 級数

もし，剰余項 R_{n+1} が n を大きくしたときに 0 に収束する，

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$$

であるならば，$f(x)$ は無限級数

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \cdots$$

で表示されるはずである．これを Taylor 級数と呼ぶ．右辺の級数が収束すれば両辺は同じ値を与える．しかし，

- 右辺が収束するとは限らない．
- 収束か発散かは x の値によっても異なる．
- さらに，右辺が収束しても左辺と同じ函数にならないかも知れない．

ということが起こり得る．

無限級数の理論では，次のようなことがわかっている[*1]．$(x-a)$ に関するベキ級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

において，

- ある $r \geq 0$ が存在し，$|x-a| < r$ では級数が収束，$|x-a| > r$ では級数は発散する (つまり収束する領域と発散する領域が交互に現れるようなことはない)．また $|x-a| = r$ での収束発散は場合による．r を収束半径と呼ぶ．全ての x について収束するときは $r = \infty$，どの x についても収束しないときは $r = 0$ と約束する．
- 収束半径の内部ではあたかも有限級数を扱っているように「普通に」計算ができる．項別微分，項別積分などなど．
- 収束半径の計算法：

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \quad \text{(d'Alembert の公式)}$$
$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \quad \text{(Cauchy の公式)}$$

上で列挙した初等函数の MacLaurin 展開においては，

- (1)–(3): 全ての x について右辺は収束し，右辺の級数は常に左辺の値と等しい ($r = \infty$).
- (4),(5): $|x| < 1$ に対して右辺は収束し，右辺の級数は左辺に等しい．しかし，$|x| > 1$ では発散する．($r = 1$)

ということがわかっている．特に $\frac{1}{1-x}$ の展開は，まさに初項 1，公比 x である等比数列の和の公式であることに注意．

■Taylor の定理の応用例：数値解析における Newton-Raphson 法　例えば，次の方程式

$$x + \cot x = 0$$

の解を求めよ，と言われたらどうするだろうか．当然既知の数, 例えば e や π などを用いて受験数学的な意味で「解ける」ことは期待できない．そういう場合にはコンピュータを用いて数値的に解を求めるのが普通である（実際水素原子のスペクトルに関する初等的な量子力学の問題でこの方程式を解かねばならない）．いろいろな解法が開発されているが，もっともよく用いられる方法の一つとして Newton–Raphson 法[*2]を紹介する．Newton-Raphson 法による

[*1] 残念ながら微分積分の授業では扱わない．どうしても ϵ-δ 論法に依拠しないと議論を進められないので．ただし，きちんとした本には書かれているので，不幸にも無限級数の知識が必要になった場合は参考書を読むこと．

[*2] Newton は万有引力の法則を見つけた Issac Newton である．

計算で実際に解が求まることを保証するときや，その計算法の速さなどを議論するときに Taylor 展開が本質的な役割を果たす．

Newton-Raphson 法

解くべき方程式を

$$f(x) = 0$$

とする．p を大体解に近そうなところを適当に選んだ初期値とするとき，次のような反復計算

$$x_0 = p,$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (n \geq 0)$$

を Newton–Raphson 法と呼ぶ．x_n があまり変化しなくなる，もしくは $|f(x_n)|$ が充分 0 に近くなったら反復を終了し，そのときの x_n が真の解の近似値を与える．

✔ 例

簡単な例として，$f(x) = x^2 - 2$ として $\sqrt{2}$ を Newton–Raphson 法で計算させよう．それには，

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

という反復計算をさせればよい．初期値として $x_0 = 2$ とすると，

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= 1.5 \\
x_2 &= 1.41666666667 \\
x_3 &= 1.41421568627 \\
x_4 &= 1.41421356237 \\
x_5 &= 1.41421356237 \\
x_6 &= 1.41421356237 \\
x_7 &= 1.41421356237 \\
x_8 &= 1.41421356237 \\
&\cdots \\
\sqrt{2} &= 1.41421356237
\end{aligned}$$

となっており，わずか 4 回目の反復で 10^{-11} の精度で既に正しい答を与えていることがわかる．□

なぜ Newton–Raphson 法で解が求まるのか

方程式 $f(x) = 0$ の真の解を a として (従って $f(a) = 0$)，x を a に近い数として $x = a + h$ とすると，

$$0 = f(a) = f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \cdots = f(x) - (x-a)f'(x) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(x) + \cdots$$

となっている．無限項続けても仕方がないので，思いきって $(x - a)$ の一次の項で切ってしまおう．

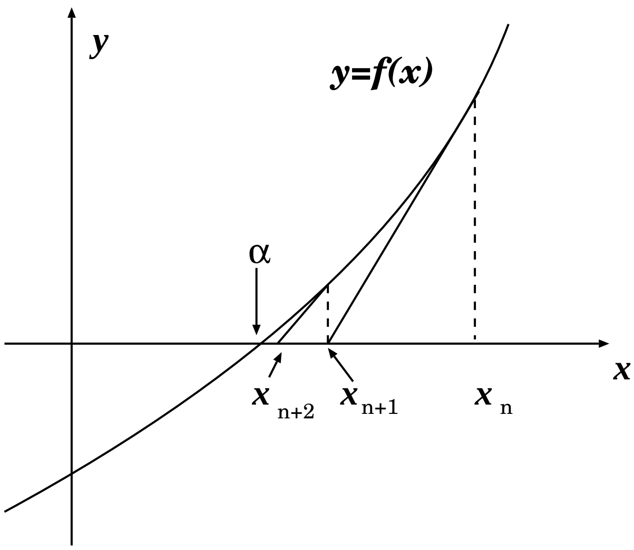
$$0 = f(a) \sim f(x) - (x-a)f'(x)$$

これから，真の解は大体

$$a \sim x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

程度と近似してよかろう．そこで，x を適当な近似値として次の近似値を右辺で求め，次々と反復計算していけば近似がよくなると考えられる．これが Netown-Raphson 法である．

または，次のように説明することもできる．今 x_n を第 n 近似値として，xy 平面上で $(x_n, f(x_n))$ における $y = f(x)$ の接線を引く：



接線の方程式は傾きが $f'(x_n)$ であるから，

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

である．図を見て，接線と x 軸との交点を次の近似値とすればよかろう．交点は $y = 0$ となる x を求めればよいから，

$$0 = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) \to x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

となる．これを第 $(n+1)$ 近似値 x_{n+1} としたものが Newton-Raphson 法である．

なぜ **Newton–Raphson** 法がよく使われるか

アルゴリズム (算法) が簡単で，非常に収束が速いからである． $\sqrt{2}$ の計算ではわずか 4 回の反復で 10^{-11} という精度が得られている．ではなぜ速いのか，どのような根拠でそれが言えるのだろうか．

ここでは誤差がどの程度の速さで 0 に収束していくかを考えよう．今，第 n 近似値 x_n と真の解 a の差（局所打ち切り誤差と呼ばれる）

$$\epsilon_n = x_n - a$$

を考える．Taylor の定理で $x = x_n$ とすると，x_n と a の間のある数 c_n が存在して

$$0 = f(x_n) - (x_n - a)f'(x_n) + \frac{1}{2}(x_n - a)^2 f''(c_n) \quad (*)$$

となるが，

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

であるから,

$$x_n - a = x_{n+1} - a + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

となっている.これに注意すると (∗) より

$$0 = -(x_{n+1} - a)f'(x_n) + \frac{1}{2}(x_n - a)^2 f''(c_n)$$

を得る.従って,

$$\epsilon_{n+1} = \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}\epsilon_n^2$$

となっていることがわかる.これは次のことを意味する:

ϵ_{n+1} は ϵ_n^2 に比例する[*3]

すなわち,ϵ_n が 10^{-1} 程度であれば ϵ_{n+1} は 10^{-2} 程度,ϵ_{n+2} は 10^{-4} 程度,ϵ_{n+3} は 10^{-8} 程度となり,精度の桁数が等比数列的に上がって行くことになる.従って,初期値をうまく選んでおけば非常に収束が速いわけである.

以上の議論で,Newton–Raphoson 法という非線形方程式の数値解法の導出や解析において Taylor 展開が如何に有効に使われるかが理解できたと思う.このように, **Taylor** 展開は理工学のさまざまな分野でまるで空気のように使われる解析技法なのである.

[*3] このような収束を「収束次数が 2 次」であるという.