ACTA ARITHMETICA
LXIV.3 (1993)

Zur Anzahl unitärer Faktoren abelscher Gruppen

von

Peter Georg Schmidt (Marburg)

1. Einleitung. Bezüglich des direkten Produktes ist die Menge $\mathcal{A}$ der abstrakten endlichen abelschen Gruppen eine kommutative Halbgruppe mit der Einheitsgruppe E als neutralem Element. $G_1, G_2 \in \mathcal{A}$ heißen *teilerfremd*, wenn nur E gemeinsamer direkter Faktor von G_1 und G_2 ist. In diesem Falle werden G_1 und G_2 *unitäre Faktoren* von $G := G_1 \times G_2$ genannt.

Die Rolle, die in vielen Belangen die Riemannsche Zetafunktion für die multiplikative Halbgruppe $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen spielt, übernimmt für $\mathcal{A}$ die Funktion (vgl. E. Cohen [2])

$$Z(s) := \sum_{G\in\mathcal{A}} (\#G)^{-s} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \zeta(\nu s) \qquad (\sigma := \operatorname{Re} s > 1)\,,$$

die durch das Produkt in die rechte Halbebene meromorph fortgesetzt ist. Bezeichnet etwa $t(n)$ die Anzahl der Zerlegungen von $n \in \mathbb{N}$ in zwei teilerfremde Faktoren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und, in Analogie dazu, $t(G)$ die Anzahl der unitären Faktoren der Gruppe $G \in \mathcal{A}$, so gilt für $\sigma > 1$ ([1], Remark 5.1)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t(n)}{n^s} = \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}\,, \qquad \sum_{G\in\mathcal{A}} \frac{t(G)}{(\#G)^s} = \frac{Z^2(s)}{Z(2s)}\,. \tag{1}$$

Die Pole der in der rechten Halbebene meromorphen Funktion

$$Z^2(s)/Z(2s) = \zeta^2(s)\zeta(2s) \cdot \zeta^2(3s)\zeta(4s) \cdot \ldots \tag{2}$$

liegen bei $1, 1/2, 1/3, \ldots$ Ist für $x \ge 2$

$$H(x) := \sum_{n=1}^{2} \operatorname*{Res}_{s=1/n} \frac{Z^2(s)}{Z(2s)} \frac{x^s}{s} = (A \log x + B)x + C\sqrt{x} \;\; (^1) \tag{3}$$

und das Restglied $\Delta(x)$ durch

(1) Wegen A, B, C siehe (15), (7) und [6], (13)–(15).

$$T(x) := \sum_{\substack{G\in\mathcal{A}\\ \#G\le x}} t(G) = H(x) + \Delta(x) \tag{4}$$

gegeben, so zeigten E. Cohen [1], E. Krätzel [6], H. Menzer [7], Satz 7.5

$$\Delta(x) \ll x^{1/2}\log x,\ x^{11/29}\log^2 x,\ x^{31/82}\log^2 x\,.$$

Ziel dieser Arbeit ist der folgende

Hauptsatz. $\Delta(x) \ll x^{3/8}\log^{7/2} x$ $(x \ge 2)$.

Der Beweis des Hauptsatzes wird in §3 geführt. Die dortigen Sätze 1 und 2 reduzieren den Hauptsatz auf die Abschätzung der in (16) definierten Summe $S(x)$.

Satz 3 ist das Kernstück der Arbeit: $S(x)$ wird vermöge des "ψ-e-Satzes" (§2) durch die in (17) erklärten Exponentialsummen abgeschätzt, die zunächst einer van der Corputschen Transformation unterworfen werden (vgl. (19)), wodurch folgende drei Maßnahmen, auf denen Satz 3 und somit der Hauptsatz beruht, möglich und wirksam werden:

— Die Summenaufspaltung (25),
— die Zusammenfassung der Summationsvariablen n_1 und ν_2 in (27) zu $m = n_1\nu_2$ in (28) auf Kosten eines Faktors $\tau(m)$, der Anzahl der Teiler von m, und
— die Verwendung der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung in (29), die unter anderem den unangenehmen Faktor $\tau(m)$ beseitigt.

Die multiplikative Zusammenfassung zweier Summationsvariablen bei der Abschätzung dreidimensionaler Exponentialsummen habe ich erstmals bei der Behandlung des Piltzschen Teilerproblems durch Yüh [13] gesehen. Die beiden anderen Maßnahmen entsprechen in etwa einer Weylschen Schiftung.

Es verbleibt die Abschätzung der in (31) definierten Summen $S^{\pm}$. Dazu benutze ich lediglich den einfachsten Satz der van der Corput-Methode, nämlich (32), um die Wirksamkeit obigen Vorgehens deutlich zu machen. Hier liegt der Schlüssel zur Verschärfung des Hauptsatzes, sofern das Restglied in Satz 2 und die Abschätzungen (22) und (23) flankierend verbessert werden. Ich vermute, daß bei erträglichem Aufwand $\Delta(x) \ll x^{5/14+\varepsilon}$ $(5/14 = 0.357\ldots)$ erreichbar ist. Die Grenze der Methode dürfte bei $\Delta(x) \ll x^{0.354\ldots}$ liegen.

2. Hilfssätze. Der "Restglied-Erhaltungssatz" umfaßt viele in der Literatur formulierte und bewiesene Spezialfälle. Ein Hilfssatz zur Partiellen Summation wird bereitgestellt. Ein Spezialfall des auf J. D. Vaaler [11] basierenden "ψ-e-Satzes" findet sich bei S. W. Graham, G. Kolesnik [4].

Restglied-Erhaltungssatz (vgl. [9], Hilfssatz 1, [5], Lemma 7.1). *Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ zahlentheoretische Funktionen. $\gamma(s) := \sum g(n)n^{-s}$ habe die Abszisse σ_0 der absoluten Konvergenz. Sei $\Theta > \sigma_0$ und L ein Gebiet, das die Halbebene $\sigma := \mathrm{Re}\, s \geq \Theta$ umfaßt. Die nicht beständig divergente Dirichletreihe $\varphi(s) := \sum f(n)n^{-s}$ sei nach L meromorph fortsetzbar. Die Menge Ω der Polstellen ω von $\varphi(s)/s$ mit $\varrho := \mathrm{Re}\,\omega \geq \Theta$ sei endlich und nicht leer. Für $x \geq 1$ sei*

$$H_0(x) := \sum_{\omega\in\Omega} \operatorname*{Res}_{\omega} \varphi(s)\frac{x^s}{s} \tag{5}$$

und

$$H(x) := \sum_{\omega\in\Omega} \operatorname*{Res}_{\omega} \varphi(s)\gamma(s)\frac{x^s}{s}\,.$$

Ferner sei $h(x)$ auf $[1,\infty[$ positiv und stetig differenzierbar. Für $x \to \infty$ strebe $xh'(x)/h(x) \to 0$. Ist dann

$$\sum_{n\leq x} f(n) = H_0(x) + O\{x^\Theta h(x)\}\,, \tag{6}$$

so gilt mit nur von f, g, h und Θ abhängiger O-Konstanten

$$\sum_{mn\leq x} f(m)g(n) = H(x) + O\{x^\Theta h(x)\}\,.$$

Bemerkungen. 1. Hat der Pol von $\varphi(s)/s$ bei $\omega \in \Omega$ die Ordnung k_ω, so hat dort $\varphi(s)x^s/s$ das Residuum $x^\omega P_\omega(\log x)$, worin P_ω ein (leicht zu bestimmendes) Polynom des Grades $k_\omega - 1$ bezeichnet, und $\varphi(s)\gamma(s)x^s/s$ das Residuum

$$x^\omega \sum_{\nu\geq 0} \frac{\gamma^{(\nu)}(\omega)}{\nu!} P_\omega^{(\nu)}(\log x)\,. \tag{7}$$

2. Oft ist $h(x) := \log^c(x+1)$ oder $h(x) := \exp(c\log^\vartheta x)$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $\vartheta \in]0,1[$; aber auch $h(x) := \exp(c(\log x)^\vartheta \sin\log\log x)$ wäre möglich.

Beweis. Mit

$$R := \sum_{n\leq x} \left(\frac{x}{n}\right)^\Theta h\left(\frac{x}{n}\right)|g(n)|$$

gilt nach (6), (5) und Bemerkung 1

$$\begin{aligned} S :&= \sum_{mn\leq x} f(m)g(n) = \sum_{n\leq x} H_0\left(\frac{x}{n}\right)g(n) + O(R) \\ &= \sum_{n\leq x}\sum_{\omega\in\Omega} \left(\frac{x}{n}\right)^\omega P_\omega(\log x - \log n)g(n) + O(R) \end{aligned} \tag{8}$$

$$= \sum_{\omega\in\Omega} x^\omega \sum_{n\le x} \frac{g(n)}{n^\omega} \sum_{\nu\ge 0} P_\omega^{(\nu)}(\log x)\frac{(-\log n)^\nu}{\nu!} + O(R)\,.$$

Sei $k := \max\{\operatorname{grad} P_\omega \mid \omega\in\Omega\}$ und

$$R_\omega := x^\varrho \sum_{n>x} \frac{|g(n)|}{n^\varrho}\log^k n \qquad (\varrho := \operatorname{Re}\omega)\,.$$

Dann folgt wegen (7)

$$S = \sum_{\omega\in\Omega} x^\omega \sum_{\nu\ge 0} \frac{\gamma^{(\nu)}(\omega)}{\nu!} P_\omega^{(\nu)}(\log x) + O\Big(R + \sum_{\omega\in\Omega} R_\omega\Big) \tag{9}$$

$$= H(x) + O\Big(R + \sum_{\omega\in\Omega} R_\omega\Big)\,.$$

Ein *festes* $u>0$ werde nun so gewählt, daß $\Theta - u > \sigma_0$ ist. Wegen $\{x^u h(x)\}' = x^{u-1}h(x)\{u + xh'(x)/h(x)\}$ und $xh'(x)/h(x)\to 0$ für $x\to\infty$ gibt es ein *festes* $x_u\ge 1$ derart, daß $x^u h(x)$ für $x\ge x_u$ monoton wächst. Sind die *festen* positiven Zahlen c und C Minimum und Maximum von $x^u h(x)$ auf $[1, x_u]$, und ist die positive, auf $[1,\infty[$ monoton wachsende Funktion r durch $r(x) := C$ für $1\le x< x_u$ und $r(x) := Cc^{-1}x^u h(x)$ für $x\ge x_u$ definiert, so gilt $x^u h(x)\le r(x)\le Cc^{-1}x^u h(x)$ für $x\ge 1$. Daher ist

$$(x/n)^u h(x/n) \le r(x/n) \le r(x) \ll x^u h(x) \qquad \text{für } 1\le n\le x$$

und

$$R \ll x^u h(x) \sum_{n\le x} \left(\frac{x}{n}\right)^{\Theta-u} |g(n)| \ll x^\Theta h(x)\,. \tag{10}$$

Schließlich wähle man zu jedem $\omega\in\Omega$ ein *festes* $v\in\,]\varrho-\Theta, \varrho-\sigma_0[$. Dann ist $v>0$ und $\sigma_0 < \varrho - v < \Theta$, und daher

$$R_\omega < x^\varrho \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{n}{x}\right)^v \frac{|g(n)|}{n^\varrho}\log^k n \ll x^{\varrho-v} \ll x^\Theta h(x)\,. \tag{11}$$

Aus (8)–(11) folgt die Behauptung des Restglied-Erhaltungssatzes.

d-DIMENSIONALE PARTIELLE SUMMATION. *Seien* $d, n_1,\ldots,n_d\in\mathbb{N}$. *Für* $\delta = 1,\ldots,d$ *und* $\nu_\delta = 1,\ldots,n_\delta$ *sei* $a_{\delta,1}\ge\ldots\ge a_{\delta,n_\delta}\ge 0$ *und* $z_{\nu_1,\ldots,\nu_d}\in\mathbb{C}$. *Setzt man*

$$Z := \max_{m_1\le n_1}\ldots\max_{m_d\le n_d}\Big|\sum_{\nu_1\le m_1}\cdots\sum_{\nu_d\le m_d} z_{\nu_1,\ldots,\nu_d}\Big|\,,$$

so gilt

$$\Big|\sum_{\nu_1\le n_1}\cdots\sum_{\nu_d\le n_d} a_{1,\nu_1}\ldots a_{d,\nu_d}\cdot z_{\nu_1,\ldots,\nu_d}\Big| \le a_{1,1}\ldots a_{d,1}\cdot Z\,.$$

Beweis. Für $d=1$ folgt die Behauptung aus den Identitäten

$$\sum_{\nu\le n_1} a_{1,\nu} z_\nu = \sum_{\nu<n_1} (a_{1,\nu}-a_{1,\nu+1}) \sum_{\mu\le\nu} z_\mu + a_{1,n_1} \sum_{\mu\le n_1} z_\mu\,,$$

$$\sum_{\nu<n_1} (a_{1,\nu}-a_{1,\nu+1}) + a_{1,n_1} = a_{1,1}\,;$$

und für $d>1$ durch vollständige Induktion (vgl. den Beweis zu [10], Hilfssatz 8).

ψ-e-Satz (vgl. [8], (114)–(127), [4], §3, Lemma A ff; schwächere Fassung: [10], Hilfssatz 3, [5], (1.18)). *Ist J eine nichtleere endliche Indexmenge, $u_j\in\mathbb{R}$ für $j\in J$, $\psi(u) := u-[u]-1/2$ für $u\in\mathbb{R}$, $K\in\mathbb{R}^+$ und $\mathcal{N} := \{2^\nu-1 \mid \nu\in\mathbb{N}\}$, so gilt*

$$\Bigl|\sum_{j\in J}\psi(u_j)\Bigr| < \frac{\#J}{K+1} + \sum_{\substack{N\in\mathcal{N}\\ N\le K}} \frac{1}{N} \max_{N\le N'\le 2N} \Bigl|\sum_{\substack{N\le n\le N'\\ j\in J}} e(nu_j)\Bigr|\,.$$

Beweis. Ist $K<1$, so ist der Satz wegen $|\psi|\le 1/2$ trivial. Sei nun $K\ge 1$. Nach Vaaler [11], Theoreme 6 und 18 und den dortigen Formeln (6.5) und (6.6), ist mit $a_n := [K+1-n]/[K+1]^2$ für $n=0,\dots,[K]$; $g(t) := \pi t(1-t)\cot(\pi t)+t$ für $0<t<1$; $b_n := g(n/[K+1])/(\pi n)$ für $n=1,\dots,[K]$ und

$$T^{\pm}(u) := a_0/2 + \sum_{n\le K} \{a_n\cos(2\pi nu) \mp b_n \sin(2\pi nu)\}$$

$$a_0 > \ldots > a_{[K]} > 0; \qquad a_n \le 1/(4n) \qquad \text{für } n=1,\dots,[K]; \tag{12}$$

$$b_1 > \ldots > b_{[K]} > 0; \qquad b_n < 1/(\pi n) \qquad \text{für } n=1,\dots,[K]; \tag{13}$$

und wegen $T^{\pm}(m)=1/2$ für $m\in\mathbb{Z}$

$$\psi(u)\le T^+(u), \qquad -\psi(u)\le T^-(u) \qquad \text{für } u\in\mathbb{R}\,.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\pm\sum_{j\in J}\psi(u_j) &\le \sum_{j\in J} T^{\pm}(u_j)\\ &= \frac{\#J}{2[K+1]} + \sum_{N\in\mathcal{N}} \sum_{\substack{n=N\\ n\le K}}^{2N} \Bigl\{a_n \sum_{j\in J}\cos(2\pi nu_j) \mp b_n \sum_{j\in J}\sin(2\pi nu_j)\Bigr\}\,.\end{aligned}$$

Wegen

$$\max_{N\le N'\le 2N} \Bigl|\sum_{\substack{n=N\\ n\le K}}^{N'} \sum_{j\in J} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2\pi nu_j)\Bigr| \le \max_{N\le N'\le 2N} \Bigl|\sum_{n=N}^{N'}\sum_{j\in J} e(nu_j)\Bigr|$$

für $N \in \mathcal{N}$ liefert "1-dimensionale Partielle Summation", sofern man (12) und (13) beachtet,

$$\Big|\sum_{j\in J}\psi(u_j)\Big| < \frac{\#J}{K+1} + \sum_{\substack{N\in\mathcal{N}\\ N\le K}}(a_N+b_N)\max_{N\le N'\le 2N}\Big|\sum_{n=N}^{N'}\sum_{j\in J}e(nu_j)\Big|$$

mit $a_N + b_N < 1/N$, und der ψ-e-Satz ist bewiesen.

3. Beweis des Hauptsatzes. Die Abschätzung von $\Delta(x)$ kann als unendlich-dimensionales Gitterpunktproblem aufgefaßt werden; denn aus (1), (2) und (4) folgt

$$T(x) = \#\{(n_1, n_2, \ldots) \in \mathbb{N}^\infty \mid n_1n_2n_3^2 \cdot n_4^3n_5^3n_6^4 \cdot \ldots \le x\}\,. \tag{14}$$

Definiert man in Analogie zu (14), (3) und (4)

$$\begin{aligned} T_0(x) &: = \#\{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3 \mid n_1n_2n_3^2 \le x\}\,,\\ H_0(x) &: = \sum_{n=1}^{2}\operatorname*{Res}_{s=1/n}\zeta^2(s)\zeta(2s)\frac{x^s}{s} \qquad (15)\\ &= \{\zeta(2)(\log x + 2\gamma - 1) + 2\zeta'(2)\}x + \zeta^2(1/2)\sqrt{x}\ \ (^2),\\ \Delta_0(x) &: = T_0(x) - H_0(x)\,, \end{aligned}$$

so wird vermöge des "Restglied-Erhaltungssatzes" (§2), wenn man dort $\varphi(s) := \zeta^2(s)\zeta(2s)$, $\gamma(s) := \zeta^2(3s)\zeta(4s)\cdot\ldots$ und $h(x) := \log^\vartheta(x+1)$ setzt, der Hauptsatz auf ein dreidimensionales Gitterpunktproblem reduziert:

Satz 1. *Ist $x \ge 2$, und sind $\Theta > 1/3$ und ϑ feste reelle Zahlen, so folgt*

$$\Delta(x) \ll x^\Theta \log^\vartheta x \qquad \textit{aus} \qquad \Delta_0(x) \ll x^\Theta\log^\vartheta x\,.$$

Es genügt also, $\Delta_0(x)$ abzuschätzen. Wir beginnen mit einer Darstellung von $\Delta_0(x)$ mittels der Summe

$$S(x) := \sum_{\substack{n_2n_3\le\sqrt{x}\\ n_3\le x^{1/4}}}\psi\Big(\frac{x}{n_2n_3^2}\Big) \tag{16}$$

mit $\psi(u) := u - [u] - 1/2$ für $u \in \mathbb{R}$.

Satz 2. $\Delta_0(x) = -2S(x) + O(x^{3/8}\log^3 x)$ $(x \ge 2)$.

Beweis. Ausgangspunkt sei Krätzel [6], (9):

$$\Delta_0(x) = -2S_{1,1,2}(x) - 2S_{1,2,1}(x) - 2S_{2,1,1}(x) + O(x^{1/4})$$

(^{2}) γ: Euler–Mascheroni-Konstante.

mit

$$S_{a,b,c}(x) := \sum_{\substack{n_2^{a+b} n_3^c \le x \\ n_2 > n_3}} \psi(\{x n_2^{-b} n_3^{-c}\}^{1/a}) \,.$$

Dies ist ein Spezialfall von Theorem 6.1 in Krätzels Monographie [5], dort "basic formula" genannt. Einen ersten Beweis der Basisformel lieferte Duttlinger [3] aufgrund einer Idee des Verfassers ([9], Satz 1; vgl. auch [12]). Setzt man noch

$$S^*(x) := \sum_{\substack{n_2 n_3^3 \le x \\ n_3 > x^{1/4}}} \psi\left(\frac{x}{n_2 n_3^2}\right),$$

so ist

$$S_{1,1,2}(x) + S_{1,2,1}(x) = S(x) + S^*(x) + O(x^{1/4}) \,,$$

und daher

$$\Delta_0(x) = -2S(x) - 2S^*(x) - 2S_{2,1,1}(x) + O(x^{1/4}) \,.$$

Wie üblich zerlege man $S^*(x)$ bzw. $S_{2,1,1}(x)$ in je $O(\log^2 x)$ Summen $S^*(x; N_2, N_3)$ bzw. $S_{2,1,1}(x; N_2, N_3)$, indem man für $N_2, N_3 \in \mathcal{N} := \{2^\nu - 1 \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ in $S^*(x)$ bzw. $S_{2,1,1}(x)$ die Summationsbedingung $(n_2, n_3) \in [N_2, 2N_2] \times [N_3, 2N_3]$ hinzufügt und nur solche N_2, N_3 zuläßt, für die die entstehenden Teilsummen nicht leer sind.

$S^*(x; N_2, N_3)$ bzw. $S_{2,1,1}(x; N_2, N_3)$ wird nun durch [5], Theorem 2.16 abgeschätzt: Setzt man dort

$$\begin{gathered} D' := [N_2, 2N_2] \times [N_3, 2N_3] \,, \\ f(t_1, t_2) := x t_1^{-1} t_2^{-2} \text{ bzw. } (x t_1^{-1} t_2^{-1})^{1/2} \,, \\ D := \{(t_1, t_2) \in D' \mid t_1 t_2^3 \le x,\ t_2 > x^{1/4}\} \text{ bzw.} \\ \{(t_1, t_2) \in D' \mid t_1^3 t_2 \le x,\ t_1 > t_2\} \,, \\ \lambda_1 := f(N_2, N_3)/N_2^2 \,, \quad \lambda_2 := f(N_2, N_3)/N_3^2 \,, \quad r := N_2/N_3^2 \,, \end{gathered}$$

so sind alle Voraussetzungen erfüllt, und mit der Abkürzung $\lambda := f(N_2, N_3)$ gilt

$$\begin{aligned} &S^*(x; N_2, N_3) \text{ bzw. } S_{2,1,1}(x; N_2, N_3) \\ &\quad \ll \{(\lambda N_2 N_3)^{1/2} + (N_3 \text{ bzw. } N_2) \cdot |\log(\lambda N_2^{-1} N_3^{-1})| + \lambda^{-1} N_2 N_3\} \log x \,. \end{aligned}$$

Wegen $\lambda \ge N_3 \gg N_2$ bzw. $\lambda \ge N_2 \gg N_3$ majorisiert der erste Term der geschweiften Klammer die beiden anderen. Man erhält

$$\begin{gathered} S^*(x; N_2, N_3) \ll (x N_3^{-1})^{1/2} \log x \,, \\ S_{2,1,1}(x; N_2, N_3) \ll (x N_2 N_3)^{1/4} \log x \,. \end{gathered}$$

Da $S^*(x; N_2, N_3)$ bzw. $S_{2,1,1}(x; N_2, N_3)$ nicht leer sein soll, ist $N_3^{-1} < 2x^{-1/4}$ bzw. $N_2N_3 < (2N_2^3N_3)^{1/2} \le (2x)^{1/2}$, also

$$S^*(x; N_2, N_3),\ S_{2,1,1}(x; N_2, N_3) \ll x^{3/8}\log x$$

und folglich

$$S^*(x),\ S_{2,1,1}(x) \ll x^{3/8}\log^3 x\,.$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Satz 3. $\Delta_0(x) \ll x^{3/8}\log^{7/2} x \ \ (x \ge 2)$.

Beweis. Ich zerlege $S(x)$, definiert in (16), auf weniger übliche Art in $O(\log^2 x)$ nichtleere Teilsummen

$$S := \sum_{\substack{N \le n_2n_3 \le 2N,\sqrt{x}\\ N_3 \le n_3 \le 2N_3, x^{1/4}}} \psi\left(\frac{x}{n_2n_3^2}\right) \qquad (N, N_3 \in \mathcal{N} := \{2^\nu - 1 \mid \nu \in \mathbb{N}\})\,.$$

Hierin ist $n_2 \gg\ll N_2 := N/N_3$, und die Anzahl der Summanden ist $\ll N_2N_3 = N$. Die Abschätzung von S wird vermöge des "ψ-e-Satzes" (§2) auf die Abschätzung der Exponentialsumme

$$S_0 := \sum_{\substack{N_1 \le n_1 \le N_1'\\ N \le n_2n_3 \le 2N,\sqrt{x}\\ N_3 \le n_3 \le 2N_3, x^{1/4}}} e(f) \qquad (N_1' \in [N_1, 2N_1];\ f := -xn_1/(n_2n_3^2)) \tag{17}$$

zurückgeführt:

$$S \ll \frac{N}{K+1} + \sum_{\substack{N_1 \in \mathcal{N}\\ N_1 \le K}} \frac{1}{N_1} \max_{N_1 \le N_1' \le 2N_1} |S_0|\,. \tag{18}$$

Wir schreiben S_0 in der Form

$$S_0 = \sum_{\substack{N_1 \le n_1 \le N_1'\\ N_3 \le n_3 \le 2N_3, x^{1/4}}} \ \sum_{Nn_3^{-1} \le n_2 \le (2N,\sqrt{x})n_3^{-1}} e(f)\,,$$

und unterwerfen die innere Summe einer van der Corputschen Transformation in der Fassung [5], Theorem 2.9, die auf E. Phillips zurückgeht. Etwas Rechnung liefert, wenn man $\alpha := \max\{x/(2N)^2, 1\}$, $\beta := x/N^2$, $F := xN_1N_2^{-1}N_3^{-2}$ und $\varphi := -2(xn_1\nu_2)^{1/2}n_3^{-1}$ setzt,

$$S_0 = \sum_{\substack{N_1 \le n_1 \le N_1'\\ N_3 \le n_3 \le 2N_3, x^{1/4}}} \left\{\frac{1-i}{2} \sum_{\alpha n_1 \le \nu_2 \le \beta n_1} (xn_1\nu_2^{-3}n_3^{-2})^{1/4} e(\varphi) \right.$$
$$\left. + O(F^{-1/2}N_2 + \log(FN_2^{-1} + 2) + F^{1/3}) \right\} \tag{19}$$

$$= \frac{1-i}{2} \sum_{\substack{N_1 \le n_1 \le N_1' \\ \alpha n_1^2 \le n_1\nu_2 \le \beta n_1^2}} \sum_{N_3 \le n_3 \le 2N_3, x^{1/4}} (xn_1\nu_2^{-3}n_3^{-2})^{1/4} e(\varphi)$$
$$+N_1 O(F^{-1/2}N + N_3\{\log(FN_2^{-1}+2) + F^{1/3}\}) .$$

Letztere Exponentialsumme vereinfachen wir durch “3-dimensionale Partielle Summation” (§2). Wegen $\nu_2 \gg\ll \beta N_1 = xN^{-2}N_1 = FN_2^{-1}$ ist $(xn_1\nu_2^{-3}n_3^{-2})^{1/4} \gg\ll F^{-1/2}N_2$ und daher

$$S_0 \ll F^{-1/2}N_2S_1 + N_1(F^{-1/2}N + N_3\{\log(FN_2^{-1}+2) + F^{1/3}\}) \tag{20}$$

mit

$$S_1 := \sum_{M/4 \le n_1\nu_2 \le 4M} \Big| \sum_{N_3 \le n_3 \le N_3'} e(-\varphi) \Big| ,$$

$M := \beta N_1^2 = xN^{-2}N_1^2 = N_1FN_2^{-1} \ge 1$ und geeignetem, von n_1 und ν_2 unabhängigem $N_3' \in [N_3, \min(2N_3, x^{1/4})]$.

Zur mühelosen Abschätzung des Restgliedes setze man in (18) im Hinblick auf die Behauptung des Satzes 3 $K := x^{-3/8}N$. Aus $N = N_2N_3 \le \sqrt{x}$, $N_3 \le x^{1/4}$ und $N_1 \le K$ folgt dann $F = (\sqrt{x}/N)^2N_1N_2 \ge N_1N_2 \ge 1$, also

$$\log(FN_2^{-1}+2) \ll F^{1/3} , \tag{21}$$

$F^{-1/2}N = (x^{-1}N_1^{-1}N^3N_3)^{1/2} \le (x^{-1+0+3/2+1/4})^{1/2}$, also

$$F^{-1/2}N \le x^{3/8} , \tag{22}$$

und $F^{1/3}N_3 \le (xKN_2^{-1}N_3)^{1/3} = (x^{5/8}N_3^2)^{1/3} \le (x^{5/8+2/4})^{1/3}$, also

$$F^{1/3}N_3 \le x^{3/8} . \tag{23}$$

Verwendet man (21)–(23) in (20), so folgt

$$S_0 \ll F^{-1/2}N_2S_1 + N_1x^{3/8} . \tag{24}$$

(25) Sei $1 \le 2v \le N_3$. Ich zerlege das Summationsintervall $[N_3, N_3']$ in $O(N_3/v)$ Teilintervalle der Form $I := [\widetilde{N}_3, \widetilde{N}_3']$ mit $N_3 \le \widetilde{N}_3 \le N_3'$ und $\widetilde{N}_3' := \min(\widetilde{N}_3 + v, N_3')$.

Dann ist $I \subset [N_3, N_3']$, I enthält höchstens $[v]+1 \le 2v$ ganze Zahlen, und es gilt

$$S_1 \ll \frac{N_3}{v} \max_{N_3 \le \widetilde{N}_3 \le N_3'} S_2 \tag{26}$$

mit

$$S_2 := \sum_{M/4 \le n_1\nu_2 \le 4M} \Big| \sum_{n_3 \in I} e(2\{xn_1\nu_2\}^{1/2}n_3^{-1}) \Big| . \tag{27}$$

Setzt man $n_1\nu_2 = m$, und bezeichnet $\tau(m)$ die Anzahl der Teiler von m, so hat man

$$S_2 = \sum_{M/4\le m\le 4M} \tau(m)|S_3| \quad \text{mit} \quad S_3 := \sum_{n_3\in I} e(2\{xm\}^{1/2}n_3^{-1}), \tag{28}$$

und die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} S_2^2 &\le \sum_{m\le 4M} \tau^2(m) \cdot \sum_{M/4\le m\le 4M} S_3\overline{S}_3 \\ &\ll M\log^3(M+1) \sum_{M/4\le m\le 4M} \sum_{n_3,\widetilde{n}_3\in I} e(2\{xm\}^{1/2}\{n_3^{-1}-\widetilde{n}_3^{-1}\}). \end{aligned} \tag{29}$$

Setzt man $h := \widetilde{n}_3 - n_3$, so ist $h\in\mathbb{Z}$ und $|h| \le \widetilde{N}_3' - \widetilde{N}_3 \le v$. Da n_3 und $\widetilde{n}_3 = n_3 + h$ in I liegen, ist

$$n_3 \in I_h := \begin{cases} [\widetilde{N}_3, \widetilde{N}_3' - h] & \text{für } h\ge 0,\\ [\widetilde{N}_3 + |h|, \widetilde{N}_3'] & \text{für } h<0. \end{cases}$$

Man beachte, daß $I_0 = I$ ist, $N_3/2 \le N_3 - v \le n_3 + h \le N_3' + v < 3N_3$ gilt und I_h für $|h| > \widetilde{N}_3' - \widetilde{N}_3$ leer ist. Nach (29) ist

$$S_2^2 \ll M\log^3 x \cdot \Big\{M\sum_{n_3\in I} 1 + \sum_{h=1}^{[v]}(|S^+| + |S^-|)\Big\} \tag{30}$$

mit

$$S^{\pm} := \sum_{\substack{M/4\le m\le 4M\\ n_3\in I_{\pm h}}} e(2h\{xm\}^{1/2}\{n_3(n_3\pm h)\}^{-1}). \tag{31}$$

Van der Corput bewies (1921): Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $|f''| \gg\ll F_2$, $F_2>0$, so gilt (vgl. [5], Theorem 2.1)

$$\sum_{a\le n\le b} e(f(n)) \ll (b-a+1)F_2^{1/2} + F_2^{-1/2}. \tag{32}$$

Diese Abschätzung liefert für $1\le h\le v$ mit $F_2 := h(xM)^{1/2}N_3^{-2}M^{-2}$

$$\begin{aligned} &\sum_{M/4\le m\le 4M} e(2h\{xm\}^{1/2}\{n_3(n_3\pm h)\}^{-1}) \\ &\qquad \ll Mh^{1/2}(xM)^{1/4}N_3^{-1}M^{-1} + h^{-1/2}(xM)^{-1/4}N_3M. \end{aligned}$$

Summation über $n_3\in I_{\pm h}\subset I$ ergibt wegen $\#(I\cap\mathbb{N}) \ll v$

$$\begin{aligned} S^{\pm} &\ll v\{h^{1/2}(xM)^{1/4}N_3^{-1} + h^{-1/2}(x^{-1}M^3)^{1/4}N_3\}, \\ \sum_{h\le v}|S^{\pm}| &\ll v^2\{v^{1/2}(xM)^{1/4}N_3^{-1} + v^{-1/2}(x^{-1}M^3)^{1/4}N_3\} \end{aligned}$$

und schließlich nach (30)

$$S_2^2 \ll v^2 M \log^3 x \cdot \{v^{-1}M + v^{1/2}(xM)^{1/4} N_3^{-1} + v^{-1/2}(x^{-1}M^3)^{1/4} N_3\} .$$

Würde man $2v := (x^{-1}M^3N_3^4)^{1/6} = (xN_3^{-1})^{1/3} N_1 N_2^{-1}$ setzen, so hätten die beiden ersten Terme der geschweiften Klammer dieselbe Größenordnung und eine der in (25) geforderten Bedingungen, nämlich $2v \le N_3$, wäre wegen $2v \le (xN_3^{-1})^{1/3} K N_2^{-1} = x^{-1/24} N_3^{2/3} < N_3$ erfüllt. Leider wäre nicht immer $2v \ge 1$. Wir setzen daher

$$2v := \max\{(xN_3^{-1})^{1/3} N_1 N_2^{-1}, 1\} .$$

Erster Fall:

$$2v = (xN_3^{-1})^{1/3} N_1 N_2^{-1} > 1 . \tag{33}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S_2^2 &\ll v^2 M \log^3 x \{v^{-1}M + v^{-1/2}(x^{-1}M^3)^{1/4} N_3\} \\ &= (v/N_3)^2 \{v^{-1} M^2 N_3^2 + vMN_3^2\} \log^3 x . \end{aligned}$$

(26), (24) und (33) ergeben unmittelbar

$$\begin{aligned} S_1 &\ll \{v^{-1} M^2 N_3^2 + vMN_3^2\}^{1/2} \log^{3/2} x \\ &= \{v^{-1} x^2 N_1^4 N_2^{-4} N_3^{-2} + vxN_1^2 N_2^{-2}\}^{1/2} \log^{3/2} x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} N_1^{-1} S_0 &\ll \{v^{-1} x N_1 N_2^{-1} + v N_1^{-1} N_2 N_3^2\}^{1/2} \log^{3/2} x + x^{3/8} \\ &\ll \{x^2 N_3 + x N_3^5\}^{1/6} \log^{3/2} x + x^{3/8} \\ &\le \{2x^2 N_3\}^{1/6} \log^{3/2} x + x^{3/8} . \end{aligned}$$

Zweiter Fall: $2v = 1$. Dann ist $\sum_{1 \le h \le v} |S^{\pm}| = 0$, $\#(I \cap \mathbb{N}) \le 1$ und $(xN_3^{-1})^{1/3} N_1 N_2^{-1} \le 1$ oder

$$N_1 N_2^{-1} \le (x^{-1} N_3)^{1/3} . \tag{34}$$

Aus (30), (26) und (24) folgt nun nacheinander

$$\begin{aligned} S_2^2 &\ll M^2 \log^3 x , \\ S_1 &\ll N_3 M \log^{3/2} x = x N_1^2 N_2^{-2} N_3^{-1} \log^{3/2} x , \\ N_1^{-1} S_0 &\ll (x N_1 N_2^{-1})^{1/2} \log^{3/2} x + x^{3/8} \end{aligned}$$

und mit (34)

$$N_1^{-1} S_0 \ll (x^2 N_3)^{1/6} \log^{3/2} x + x^{3/8} .$$

In jedem Falle gilt also

$$N_1^{-1} S_0 \ll (x^2 N_3)^{1/6} \log^{3/2} x + x^{3/8} .$$

Verwendet man dies in (18), so erhält man wegen $N/(K+1) < x^{3/8}$

$$S \ll (x^2 N_3)^{1/6} \log^{5/2} x + x^{3/8} \log x$$

und schließlich

$$S(x) = \sum_{N, N_3 \in \mathcal{N}} S \ll (x^{2+1/4})^{1/6} \log^{7/2} x = x^{3/8} \log^{7/2} x\,.$$

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Der Hauptsatz folgt nun aus den Sätzen 1 und 3.

Literatur

[1] E. Cohen, *On the average number of direct factors of a finite Abelian group*, Acta Arith. 6 (1960), 159–173.
[2] —, *Arithmetical functions of finite Abelian groups*, Math. Ann. 142 (1961), 165–182.
[3] J. Duttlinger, *Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung und ein verwandtes Gitterpunktproblem*, Dissertation, Frankfurt/Main 1972.
[4] S. W. Graham and G. Kolesnik, *On the difference between consecutive squarefree integers*, Acta Arith. 49 (1988), 435–447.
[5] E. Krätzel, *Lattice Points*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1988.
[6] —, *On the average number of direct factors of a finite Abelian group*, Acta Arith. 51 (1988), 369–379.
[7] H. Menzer, *Exponentialsummen und verallgemeinerte Teilerprobleme*, Habilitationsschrift, Jena 1992.
[8] P. G. Schmidt, *Abschätzungen bei unsymmetrischen Gitterpunktproblemen*, Dissertation, Göttingen 1964.
[9] —, *Zur Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung*, J. Reine Angew. Math. 229 (1968), 34–42.
[10] —, *Zur Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung II*, Acta Arith. 13 (1968), 405–417.
[11] J. D. Vaaler, *Some extremal problems in Fourier analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 183–216.
[12] M. Vogts, *Teilerprobleme in drei Dimensionen*, Math. Nachr. 101 (1981), 243–256.
[13] Ming-i Yüh, *A divisor problem*, Acta Math. Sinica 8 (1958), 496–506 (chinesisch, englisches summary).

FACHBEREICH MATHEMATIK
UNIVERSITÄT
D-35032 MARBURG, GERMANY

Eingegangen am 10.9.1992 (2304)