Über unerreichbare Kardinalzahlen.

Von

Alfred Tarski (Warszawa).

Auf den Begriff der unerreichbaren Kardinalzahl ist man in den mengentheoretischen Untersuchungen schon seit langem gestossen (wenn auch der Ausdruck *„unerreichbare Kardinalzahl“* selbst erst vor kurzem in die Fachlitteratur eingeführt wurde)[1]. Anfangs hat man aber die unerreichbaren Zahlen eher als eine Kuriosität betrachtet; so spricht z.B. Hausdorff in seinem bekannten Werke *Grundzüge der Mengenlehre* die Meinung aus, diese Zahlen seien von einer so „exorbitanten“ Größe, daß sie für die üblichen Zwecke der Mengenlehre kaum jemals in Betracht kommen werden[2]. Erst später wurde die Bedeutung des betrachteten Begriffs für die Grundlagenfragen erkannt[3]. Und in den letzten Jahren hat es sich herausgestellt, daß die unerreichbaren Zahlen auch für gewisse sachliche Probleme der Mengenlehre nicht bedeutungslos sind, ja sogar in manchen Untersuchungen eine wesentliche Rolle spielen[4]. Aus diesen Gründen scheint es heute der Mühe wert, den Begriff der unerreichbaren Kardinalzahl einer genaueren Betrachtung zu unterwerfen; einen Beitrag zu diesem Problem soll der vorliegende Aufsatz liefern.

§ 1. Definition und charakteristische Eigenschaften der unerreichbaren Kardinalzahlen.

Dem vorliegenden Ausführungen wird das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem zugrunde gelegt[5]. Soll das Operieren mit Kardinalzahlen auf dem Boden dieses Systems ermöglicht sein, so kann man folgendermaßen verfahren. Man betrachtet den Begriff *„die Kardinalzahl* (bzw. *die Mächtigkeit) der Menge M“*, in Zeichen „$\overline{\overline{M}}$“, als einen neuen Grundbegriff und man schaltet in das System zwei neue Axiome ein, nämlich:

Axiom I. *Jeder Menge M entspricht ein $\mathfrak{m}$ derart, daß $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$.*

Axiom II. *Zwei beliebige Mengen M und N sind dann und nur dann gleichmächtig, wenn $\overline{\overline{M}}=\overline{\overline{N}}$.*

Man könnte freilich ohne diese Axiome auskommen: man müßte dann aber stets über die Mengen selbst statt über deren Mächtigkeiten sprechen.

Wir definieren nun:

Definition 1. *Die Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ heißt im weiteren Sinne unerreichbar, wenn $\mathfrak{m}$ von 0 verschieden ist und folgenden Bedingungen genügt:*

$\mathfrak{B}_1$. *Ist X eine beliebige Menge von einer Mächtigkeit $<\mathfrak{m}$ und ist jedem Element $x\in X$ eine Kardinalzahl $\mathfrak{n}_x<\mathfrak{m}$ zugeordnet, so gilt*

$$\sum_{x\in X}\mathfrak{n}_x<\mathfrak{m};$$

$\mathfrak{B}_2$. *Ist $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$, so gibt es eine Kardinalzahl $\mathfrak{p}$ derart, daß $\mathfrak{n}<\mathfrak{p}<\mathfrak{m}$.*

Definition 2. *Die Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ heißt im engeren Sinne unerreichbar, wenn $\mathfrak{m}$ von 0 verschieden ist und der Bedingung $\mathfrak{B}_1$ sowie folgender Bedingung genügt:*

$\mathfrak{B}_3$. *Ist $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}<\mathfrak{m}$, so gilt $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}<\mathfrak{m}$* [6].

Wir geben nun in einer Reihe von Sätzen, die zum Teil ganz elementar sind, verschiedene charakteristische Eigenschaften beider Arten von unerreichbaren Zahlen an.

Hilfssatz 1. *Die Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ genügt dann und nur dann der Bedingung $\mathfrak{B}_1$, wenn entweder $\mathfrak{m}\leqslant 2$ ist oder es eine Ordnungszahl α gibt, so daß $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$ und ω_α eine reguläre Anfangszahl ist.*

Beweis. Aus der einleuchtenden Formel: $\mathfrak{m}=(\mathfrak{m}-1)+1$ ersieht man sofort, daß keine endliche Zahl $\mathfrak{m}>2$ der Bedingung $\mathfrak{B}_1$ genügt. Ist $\mathfrak{m}$ unendlich, so kann man $\mathfrak{m}$ auf Grund des Wohlordnungssatzes als Alef betrachten: $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$. Man kann ferner eine Folge von Zahlen $\mathfrak{n}_\xi$ vom Typus $\omega_{cf(\alpha)}$ derart angeben, daß

$$(1)\qquad \aleph_\alpha=\sum_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}\mathfrak{n}_\xi \quad \textit{und} \quad \mathfrak{n}_\xi<\mathfrak{m} \quad \textit{für jedes} \quad \xi<\omega_{cf(\alpha)}\ ^{7}).$$

Wäre nun ω_α singulär, d.h. $cf(\alpha)<\alpha$, so hätten wir

$$\aleph_{cf(\alpha)}=\overline{\overline{\underset{\xi}{E}[\xi<\omega_{cf(\alpha)}]}}<\aleph_\alpha,$$

und die Formeln (1) würden der Bedingung $\mathfrak{B}_1$ widersprechen.

Wenn also $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$ diese Bedingung erfüllt, so muß ω_α regulär sein. Ebenso leicht kann man zeigen, daß sowohl die Zahlen $0,1$ und 2 als auch jede Zahl $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$ mit regulärer Anfangszahl ω_α der Bedingung $\mathfrak{B}_1$ genügt. Hilfssatz 1 gilt demnach in beiden Richtungen.

Hilfssatz 2. *Die Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ genügt dann und nur dann der Bedingung $\mathfrak{B}_2$, wenn entweder $\mathfrak{m}=0$ ist oder es eine Ordnungszahl α gibt, so daß $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$ und dabei α gleich 0 oder eine Limeszahl ist.*

Beweis: mit Rücksicht auf den Wohlordnungssatz einleuchtend.

Satz 3. *Die Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ ist dann und nur dann im weiteren Sinne unerreichbar, wenn es eine Ordnungszahl α gibt, so daß $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$ und daß entweder $\alpha=0$ oder ω_α eine reguläre Anfangszahl mit Limesindex ist.*

Beweis. Der Satz ergibt sich aus Definition 1 sowie aus Hilfssätzen 1 und 2.

Aus Satz 3 folgt unmittelbar

Satz 4. *$\aleph_0$ ist die kleinste im weiteren Sinne unerreichbare Kardinalzahl.*

Hilfssatz 5. *Die Zahlen 0, 2 und $\aleph_0$ genügen der Bedingung $\mathfrak{B}_3$; es gibt keine endliche, von 0 und 2 verschiedene Kardinalzahl $\mathfrak{m}$, die dieser Bedingung genügt.*

Beweis. Die Bedingung $\mathfrak{B}_3$ wird durch die Zahl 0 in trivialer Weise erfüllt. Die Definition der Potenz von Kardinalzahlen ergibt $0^0=1^0=1$ und $0^1=0$; die Zahl 2 genügt demnach der Bedingung $\mathfrak{B}_3$, die Zahl 1 aber nicht. Auch keine endliche Zahl $\mathfrak{m}>2$ genügt dieser Bedingung, da ja z.B. $\mathfrak{n}=2<\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}-1<\mathfrak{m}$ und trotzdem $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}=2^{\mathfrak{m}-1}>\mathfrak{m}$ ist. Sind schließlich die Zahlen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{p}$ endlich, so ist auch $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$ endlich, die Zahl $\aleph_0$ genügt also der Bedingung $\mathfrak{B}_3$.

Satz 6. *2 ist die kleinste und $\aleph_0$ die nächstgrößere im engeren Sinne unerreichbare Kardinalzahl.*

Beweis: nach Definition 2 sowie nach Hilfssätzen 1 und 5.

Es ist zu bemerken, daß verschiedene Sätze, die ursprünglich nur für unendliche unerreichbare Zahlen formuliert und bewiesen wurden, sich auch für die Zahl 2 (dagegen für keine andere endliche Kardinalzahl) als gültig erweisen [8]). Es scheint deshalb zweckmäßig zu sein, den Begriff einer im engeren Sinne unerreichbaren Zahl so zu fassen, daß auch 2 unter diesen Begriff fällt.

Hilfssatz 7. *Jede Kardinalzahl $\mathfrak{m}$, die folgender Bedingung genügt:*

$\mathfrak{B}_4$. Ist $\mathfrak{p}<\mathfrak{m}$, so gilt $2^{\mathfrak{p}}<\mathfrak{m}$,

genügt auch der Bedingung $\mathfrak{B}_2$ und ist demnach entweder gleich 0 oder unendlich.

Ist $\mathfrak{m}\neq 2$, so sind die Bedingungen $\mathfrak{B}_3$ und $\mathfrak{B}_4$ äquivalent.

Beweis. Nehmen wir an, $\mathfrak{m}$ genüge der Bedingung $\mathfrak{B}_4$. Aus der Cantorschen Ungleichung $\mathfrak{n}<2^{\mathfrak{n}}$ ersehen wir sofort, daß $\mathfrak{m}$ auch der Bedingung $\mathfrak{B}_2$ genügen muß; gemäß Hilfssatz 2 ist also $\mathfrak{m}$ entweder gleich 0 oder unendlich.

Ist $\mathfrak{m}=0$, so genügt $\mathfrak{m}$ offenbar der Bedingung $\mathfrak{B}_3$. Ist aber $\mathfrak{m}$ unendlich, so leiten wir $\mathfrak{B}_3$ aus $\mathfrak{B}_4$ folgendermaßen ab. Es sei $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}<\mathfrak{m}$; es gilt dann bekanntlich $\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{p}<\mathfrak{m}$, wonach auf Grund von $\mathfrak{B}_4$ $2^{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{p}}<\mathfrak{m}$ ist; da anderseits $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}\leqslant(2^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}}=2^{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{p}}$, so ist schließlich $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}<\mathfrak{m}$.

Genügt umgekehrt die Zahl $\mathfrak{m}\neq 2$ der Bedingung $\mathfrak{B}_3$, so ist nach Hilfssatz 5 $\mathfrak{m}>2$ (vom trivialen Fall $\mathfrak{m}=0$ abgesehen); $\mathfrak{B}_4$ ist dann in $\mathfrak{B}_3$ als ein Spezialfall enthalten. Hiermit ist der Beweis zu Ende geführt.

Aus Definition 2 und Hilfssatz 7 ergibt sich unmittelbar

Satz 8. *Damit $\mathfrak{m}$ eine von 2 verschiedene (bzw. unendliche) im engeren Sinne unerreichbare Zahl ist, ist es notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{m}$ von 0 verschieden ist sowie den Bedingungen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_4$ genügt.*

Satz 9. *Jede von 2 verschiedene (bzw. unendliche) im engeren Sinne unerreichbare Kardinalzahl ist auch im weiteren Sinne unerreichbar.*

Ist die Cantorsche Alefhypothese:

$$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1} \text{ für jede Ordnungszahl } \alpha$$

richtig, so ist auch umgekehrt jede im weiteren Sinne unerreichbare Kardinalzahl im engeren Sinne unerreichbar [6]).

Beweis. Der erste Teil des Satzes ergibt sich sofort aus Sätzen 7 und 8 auf Grund der Definition 1.

Setzen wir nun die Gültigkeit der Cantorschen Alefhypothese voraus. Ist die Zahl $\mathfrak{m}$ im weiteren Sinne unerreichbar, so ist sie nach Satz 3 von der Form $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$, wobei α gleich 0 oder eine Limeszahl ist. Gilt $\mathfrak{p}<\mathfrak{m}$, so ist sicher $2^{\mathfrak{p}}<\mathfrak{m}$, falls $\mathfrak{p}$ endlich ist; ist aber $\mathfrak{p}$ unendlich, also $\mathfrak{p}=\aleph_\beta$, so folgt aus der Cantorschen Alefhypothese, daß $2^{\mathfrak{p}}=2^{\aleph_\beta}=\aleph_{\beta+1}$ und demnach wiederum $2^{\mathfrak{p}}<\aleph_\alpha=\mathfrak{m}$ ist. Folglich genügt die Zahl $\mathfrak{m}$ der Bedingung $\mathfrak{B}_4$ und ist nach Satz 8 im engeren Sinne unerreichbar, w. z. b. w.

Satz 10. *Die Kardinalzahl* $\mathfrak{m}$ *ist dann und nur dann im engeren Sinne unerreichbar, wenn* $\mathfrak{m}$ *von* 0 *verschieden ist und folgender Bedingung genügt:*

$\mathfrak{B}_5$. *Ist* X *eine beliebige Menge von einer Mächtigkeit* $<\mathfrak{m}$ *und ist jedem Element* $x\in X$ *eine Kardinalzahl* $\mathfrak{n}_x<\mathfrak{m}$ *zugeordnet, so gilt*

$$\prod_{x\in X}\mathfrak{n}_x<\mathfrak{m}.$$

Beweis. $\mathfrak{m}$ sei eine im engeren Sinne unerreichbare Kardinalzahl. Nehmen wir an, daß jedem Element x einer Menge X von der Mächtigkeit $\overline{\overline{X}}=\mathfrak{p}<\mathfrak{m}$ eine Zahl $\mathfrak{n}_x$ zugeordnet ist. Es gilt dann nach $\mathfrak{B}_1$

$$\sum_{x\in X}\mathfrak{n}_x<\mathfrak{m}$$

und hieraus nach $\mathfrak{B}_3$

$$\Bigl(\sum_{x\in X}\mathfrak{n}_x\Bigr)^{\mathfrak{p}}<\mathfrak{m};$$

da anderseits

$$\prod_{x\in X}\mathfrak{n}_x\leqslant\Bigl(\sum_{x\in X}\mathfrak{n}_x\Bigr)^{\mathfrak{p}}$$

(vom trivialen Fall: $X=0$ abgesehen), so erhält man schließlich $\prod\limits_{x\in X}\mathfrak{n}_x<\mathfrak{m}$. Die Zahl $\mathfrak{m}$ genügt also der Bedingung $\mathfrak{B}_5$.

Setzen wir umgekehrt voraus, daß $\mathfrak{m}\neq 0$ die Bedingung $\mathfrak{B}_5$ erfüllt. Die Bedingung $\mathfrak{B}_3$ ist als ein Spezialfall in $\mathfrak{B}_5$ enthalten: es gilt ja

$$\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}=\prod_{x\in X}\mathfrak{n}_x,$$

falls $\overline{\overline{X}}=\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{n}_x=\mathfrak{n}$ jedes $x\in X$ ist. $\mathfrak{B}_1$ ergibt sich aus $\mathfrak{B}_5$ auf Grund der bekannten Ungleichung:

$$\sum_{x\in X}\mathfrak{n}_x\leqslant\prod_{x\in X}\mathfrak{n}_x$$

(diese Ungleichung gilt nicht, wenn unter den Zahlen $\mathfrak{n}_x$ die Zahl 0 vorkommt oder wenn alle Zahlen $\mathfrak{n}_x$ gleich 1 sind; die beiden Ausnahmsfälle können aber ohne die geringste Schwierigkeit erledigt werden). Die Zahl $\mathfrak{m}\neq 0$ genügt also den Bedingungen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_3$ und ist demnach im engeren Sinne unerreichbar, w. z. b. w.

Etwas tiefer als die vorangehenden Sätze liegt der weiter unten angegebene Satz 13, der wohl die einfachste Charakterisierung der im engeren Sinne unerreichbaren Kardinalzahlen liefert. Wir schicken diesem Satz zwei Hilfssätze voran.

Hilfssatz 11. *Genügt die unendliche Kardinalzahl* $\mathfrak{m}$ *der Bedingung* $\mathfrak{B}_1$, *so gilt für jedes* $\mathfrak{p}\neq 0$

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}=\mathfrak{m}\cdot\sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}}{}'\,\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}.$$

Beweis. Es gilt zunächst ganz allgemein

$$\mathfrak{m}\cdot\sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}}{}'\,\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}\leqslant\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}\cdot\overline{\overline{\underset{\mathfrak{n}}{E}[\mathfrak{n}<\mathfrak{m}]}}\leqslant\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}\cdot\mathfrak{m}$$

und hienach, da $\mathfrak{m}$ unendlich und $\mathfrak{p}>0$ ist,

$$\mathfrak{m}\cdot\sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}}{}'\,\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}\leqslant\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}. \tag{1}$$

Beim Beweis der inversen Ungleichung:

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}\leqslant\mathfrak{m}\cdot\sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}}{}'\,\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} \tag{2}$$

sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\mathfrak{p}<\aleph_0$, $\aleph_0\leqslant\mathfrak{p}<\mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{p}\geqslant\mathfrak{m}$ ist.

Ist $\mathfrak{p}$ endlich, so gilt (2) sicher, denn man hat ja dann $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}=\mathfrak{m}$.

Ist $\mathfrak{p}$ unendlich und $<\mathfrak{m}$, so setzen wir:

$$\mathfrak{m}=\aleph_\alpha \quad \textit{und} \quad \mathfrak{p}=\aleph_\gamma. \tag{3}$$

Nach Hilfssatz 1 muß dabei ω_α eine reguläre Anfangszahl sein, so daß

$$\gamma<cf(\alpha)=\alpha. \tag{4}$$

Ist nun α eine Limeszahl, so hat man nach einem bekannten Satz [9]) (mit Rücksicht auf (3) und (4)):

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}=\aleph_\alpha^{\aleph_\gamma}=\sum_{\xi<\alpha}{}'\,\aleph_\xi^{\aleph_\gamma}=\sum_{\aleph_0\leqslant\mathfrak{n}<\mathfrak{m}}{}'\,\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}\leqslant\sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}}{}'\,\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}},$$

und hieraus erhält man sofort (2). Ist dagegen α keine Limeszahl, so muß α von der Form $\alpha=\beta+1$ sein (da nach (4) $\alpha\neq 0$ ist). Nach der Hausdorffschen Rekursionsformel [10]) gilt dann

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}=\aleph_{\beta+1}^{\aleph_\gamma}=\aleph_{\beta+1}\cdot\aleph_\beta^{\aleph_\gamma}=\mathfrak{m}\cdot\aleph_\beta^{\mathfrak{p}},$$

woraus sich unmittelbar (2) ergibt.

Betrachten wir schließlich den Fall $\mathfrak{p} \geqslant \mathfrak{m}$. Wir haben dann bekanntlich $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = 2^{\mathfrak{p}}$ [10]); aus dieser Formel folgt aber wiederum die Ungleichung (2).

Die Ungleichungen (1) und (2) ergeben sofort die zu beweisende Gleichung.

Hilfssatz 12. *Jede Kardinalzahl* $\mathfrak{m}$, *die folgender Bedingung genügt:*

$\mathfrak{B}_6$. *Ist* $0 < \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, *so gilt* $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$,

genügt auch der Bedingung $\mathfrak{B}_1$.

Die Umkehrung dieses Satzes ist der Cantorschen Alefhypothese äquivalent.

Beweis. Nehmen wir zunächst an, $\mathfrak{m}$ genüge der Bedingung $\mathfrak{B}_6$. Sei X eine beliebige Menge von der Mächtigkeit $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$; jedem Element $x \in X$ sei ferner eine Zahl $\mathfrak{n}_x < \mathfrak{m}$ zugeordnet. Setzen wir noch $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}$ für $x \in X$. Da $\mathfrak{n}_x < \mathfrak{m}_x$ für jedes $x \in X$, so folgt aus einem bekannten Satz von Zermelo [11]), daß

$$\sum_{x \in X} \mathfrak{n}_x < \prod_{x \in X} \mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}},$$

und hienach auf Grund von $\mathfrak{B}_6$

$$\sum_{x \in X} \mathfrak{n}_x < \mathfrak{m}.$$

Die Zahl $\mathfrak{m}$ genügt somit der Bedingung $\mathfrak{B}_1$.

Setzen wir jetzt die Gültigkeit der Cantorschen Alefhypothese voraus und betrachten eine Zahl $\mathfrak{m}$, die $\mathfrak{B}_1$ erfüllt. Ist $\mathfrak{m}$ endlich, so muß $\mathfrak{m}$ nach Hilfssatz 1 eine der drei Zahlen $0, 1, 2$ sein; jede dieser Zahlen genügt offenbar der Bedingung $\mathfrak{B}_6$. Es sei nun $\mathfrak{m}$ unendlich und $0 < \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$. Nach Hilfssatz 11 gilt dann

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m} \cdot \sum_{\mathfrak{n} < \mathfrak{m}} \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} \leqslant \mathfrak{m} \cdot \sum_{\mathfrak{n} < \mathfrak{m}} (2^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m} \cdot \sum_{\mathfrak{n} < \mathfrak{m}} 2^{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p}}. \tag{1}$$

Ist $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, so ist auch $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$; aus der Cantorschen Alefhypothese ist dann leicht $2^{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p}} \leqslant \mathfrak{m}$ zu schließen, wonach auf Grund von (1)

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \leqslant \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} \cdot \overline{\overline{\underset{\mathfrak{n}}{E}[\mathfrak{n} < \mathfrak{m}]}} \leqslant \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}.$$

Da die inverse Ungleichung $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$ einleuchtet, erhält man schließlich, daß $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$, d. h. daß $\mathfrak{B}_6$ erfüllt ist.

Es bleibt noch, aus der Behauptung:

(2) *Jede Kardinalzahl* $\mathfrak{m}$, *die der Bedingung* $\mathfrak{B}_1$ *genügt, genügt auch der Bedingung* $\mathfrak{B}_6$

die Cantorsche Alefhypothese abzuleiten. Zu diesem Zweck betrachten wir eine beliebige Ordnungszahl α. Da $\omega_{\alpha+1}$ regulär ist, so genügt $\mathfrak{m} = \aleph_{\alpha+1}$ der Bedingung $\mathfrak{B}_1$ (vgl. Hilfssatz 1). Mit Rücksicht auf (2) genügt also $\aleph_{\alpha+1}$ auch der Bedingung $\mathfrak{B}_6$; für $\mathfrak{p} = \aleph_\alpha$ erhalten wir hieraus $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Bekanntlich ist aber diese Formel der Formel $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ äquivalent [12]). Damit ist der Beweis zu Ende geführt.

Satz 13. *Die Kardinalzahl* $\mathfrak{m}$ *ist dann und nur dann im engeren Sinne unerreichbar, wenn* $\mathfrak{m}$ *von* 0 *verschieden ist und den Bedingungen* $\mathfrak{B}_3$ *und* $\mathfrak{B}_6$ *genügt.*

Beweis. Ist die Zahl $\mathfrak{m}$ im engeren Sinne unerreichbar, so genügt sie nach Definition 2 den Bedingungen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_3$. Nach Satz 6 ist dabei $\mathfrak{m}$ entweder gleich 2 oder unendlich. Die Zahl $\mathfrak{m} = 2$ genügt der Bedingung $\mathfrak{B}_6$. Ist $\mathfrak{m}$ unendlich, so ergibt sich aus Hilfssatz 11 die Formel

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m} \cdot \sum_{\mathfrak{n} < \mathfrak{m}} \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$$

für jedes $\mathfrak{p} > 0$; ist hiebei $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, so erhält man daraus mit Hilfe von $\mathfrak{B}_3$

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \leqslant \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$$

und ferner $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$. Die Zahl $\mathfrak{m}$ genügt also wiederum der Bedingung $\mathfrak{B}_6$.

Erfüllt umgekehrt $\mathfrak{m} \neq 0$ die Bedingungen $\mathfrak{B}_3$ und $\mathfrak{B}_6$, so ersieht man sofort aus Hilfssatz 12 und Definition 2, daß $\mathfrak{m}$ im engeren Sinne unerreichbar ist, w. z. b. w.

Satz 14. *Damit* $\mathfrak{m}$ *eine von* 2 *verschiedene (bzw. unendliche) im engeren Sinne unerreichbare Kardinalzahl ist, ist es notwendig und hinreichend, daß* $\mathfrak{m}$ *von* 0 *verschieden ist und den Bedingungen* $\mathfrak{B}_4$ *und* $\mathfrak{B}_6$ *genügt.*

Die Bedingung $\mathfrak{B}_4$ *kann hierbei durch folgende Bedingung ersetzt werden:*

$\mathfrak{B}_7$. *Es gibt keine Kardinalzahl* $\mathfrak{p}$, *für die* $2^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$ *ist.*

Beweis. Den Sätzen 8 und 13 gemäß erfüllt jede im engeren Sinne unerreichbare Zahl $\mathfrak{m} \neq 2$ die Bedingungen $\mathfrak{B}_4$ und $\mathfrak{B}_6$; aus $\mathfrak{B}_4$ ergibt sich unmittelbar $\mathfrak{B}_7$ (auf Grund der Ungleichung: $\mathfrak{p} < 2^{\mathfrak{p}}$). Nehmen wir nun an, die Zahl $\mathfrak{m} \neq 0$ genüge den Bedingungen $\mathfrak{B}_6$ und $\mathfrak{B}_7$. Nach Hilfssatz 12 genügt dann $\mathfrak{m}$ auch der Bedingung $\mathfrak{B}_1$. Aus $\mathfrak{B}_7$ ersieht man sofort, daß $\mathfrak{m} > 2$ sein muß. Ist also $\mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, so gilt $2^{\mathfrak{p}} \leqslant \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$ und hienach $2^{\mathfrak{p}} \leqslant \mathfrak{m}$ wegen $\mathfrak{B}_6$; da nach $\mathfrak{B}_7$ $2^{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{m}$ ist, so hat man ferner $2^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}$, die Zahl $\mathfrak{m}$ erfüllt also $\mathfrak{B}_4$. Nach Satz 8 ist folglich $\mathfrak{m}$ eine von 2 verschiedene im engeren Sinne unerreichbare Zahl. Satz 14 ist somit bewiesen.

Satz 15. *Damit $\mathfrak{m}$ eine von 2 verschiedene (bzw. unendliche) im engeren Sinne unerreichbare Kardinalzahl ist, ist es notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{m} \neq 0$ ist und der Bedingung $\mathfrak{B}_4$ sowie folgender Bedingung genügt:*

$\mathfrak{B}_8$. *Ist $\mathfrak{p} \neq 0$, so gilt $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m} \cdot 2^{\mathfrak{p}}$.*

Beweis. Nach Satz 14 genügt jede unendliche im engeren Sinne unerreichbare Zahl $\mathfrak{m}$ den Bedingungen $\mathfrak{B}_4$ und $\mathfrak{B}_6$. Ist also $0 < \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, so erhält man $2^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$ und hienach

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m} \cdot 2^{\mathfrak{p}}. \tag{1}$$

Ist aber $\mathfrak{p} \geqslant \mathfrak{m}$, so gilt bekanntlich $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = 2^{\mathfrak{p}}$ [10]), woraus sich wiederum (1) ergibt. Somit besteht die Formel (1) für jedes $\mathfrak{p} \neq 0$; mit anderen Worten: $\mathfrak{m}$ genügt der Bedingung $\mathfrak{B}_8$.

Nehmen wir nun umgekehrt an, die Zahl $\mathfrak{m} \neq 0$ erfülle die Bedingungen $\mathfrak{B}_4$ und $\mathfrak{B}_8$. Für jede Zahl $\mathfrak{p}$, $0 < \mathfrak{p} < \mathfrak{m}$, ist also $2^{\mathfrak{p}} < \mathfrak{m}$ und es gilt (1); da hiebei nach Hilfssatz 7 $\mathfrak{m}$ unendlich ist, so erhält man $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$. Die Zahl $\mathfrak{m}$ genügt demnach der Bedingung $\mathfrak{B}_6$. Mit Rücksicht auf Satz 14 ist folglich $\mathfrak{m}$ eine unendliche im engeren Sinne unerreichbare Zahl, w. z. b. w.

Hilfssatz 16. *Sei M eine beliebige Menge von der Mächtigkeit $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$. Damit $\mathfrak{m}$ eine von 2 verschiedene und der Bedingung $\mathfrak{B}_6$ genügende Kardinalzahl ist, ist es notwendig und hinreichend, daß M folgende Bedingung erfüllt:*

$\mathfrak{C}_1$. *M ist mit dem Mengensystem $\underset{X}{E}[X \subset M$ und $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{M}}]$ gleichmächtig.*

Beweis. Vom trivialen Fall $\mathfrak{m} < \aleph_0$ wollen wir absehen (man ersieht ja leicht, daß eine endliche Zahl $\mathfrak{m} > 2$ weder $\mathfrak{B}_6$ noch $\mathfrak{C}_1$ erfüllt). Es sei nun $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$. Einem Satz von Sierpiński zufolge [12]) hat das System $\underset{X}{E}[X \subset M$ und $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{M}}]$ die Mächtigkeit $\sum_{\mathfrak{p} < \mathfrak{m}} \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$ [13]); die Bedingung $\mathfrak{C}_1$ ist also der Formel

$$\mathfrak{m} = \sum_{\mathfrak{p} < \mathfrak{m}} \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \tag{1}$$

äquivalent. Es ist aber leicht diese Formel aus $\mathfrak{B}_6$ abzuleiten; man hat ja auf Grund von $\mathfrak{B}_6$

$$\mathfrak{m} \leqslant \sum_{\mathfrak{p} < \mathfrak{m}} \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \leqslant \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}.$$

Ebenso leicht kann die inverse Implikation gewonnen werden. Die Bedingungen $\mathfrak{B}_6$ und (1), bzw. $\mathfrak{C}_1$, sind somit äquivalent, w.z.b.w.

Satz 17. *Ist M eine beliebige Menge von der Mächtigkeit $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$, so ist $\mathfrak{m}$ dann und nur dann eine von 2 verschiedene (bzw. unendliche) im engeren Sinne unerreichbare Zahl, wenn M nicht leer ist und der Bedingung $\mathfrak{C}_1$ sowie folgender Bedingung genügt:*

$\mathfrak{C}_2$. *Es gibt keine Menge P, so daß M mit dem Mengensystem $\underset{X}{E}[X \subset P]$ gleichmächtig ist.*

Beweis: nach Satz 14 und Hilfssatz 16 (die Bedingung $\mathfrak{C}_2$ drückt ja im Grunde dasselbe aus wie $\mathfrak{B}_7$).

Hilfssatz 18. *Sei α eine beliebige Ordnungszahl und N eine beliebige Menge von der Mächtigkeit $\overline{\overline{N}} < \aleph_\alpha$; jeder Ordnungszahl $\xi < \omega_\alpha$ sei ein Mengensystem N_ξ zugeordnet, und zwar derart, daß:*

$$N_0 = \underset{X}{E}[X \subset N], \tag{i}$$

$$N_\xi = \underset{X}{E}\Big[X \subset \sum_{\eta < \xi} N_\eta \text{ und } \overline{\overline{X}} < \aleph_\alpha\Big] \text{ für jedes } \xi \text{ und } 0 < \xi < \omega_\alpha; \tag{ii}$$

sei ferner

$$M = \sum_{\xi < \omega_\alpha} N_\xi. \tag{iii}$$

Dann gilt Folgendes:

(I) *M genügt der Bedingung*

$\mathfrak{D}_1$. *Ist* $X\in M$ *und* $Y\subset X$, *so ist auch* $Y\in M$;

(II) *genügt die Zahl* $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$ *der Bedingung* $\mathfrak{B}_4$, *so genügt* M *der Bedingung*

$\mathfrak{D}_2$. *Ist* $X\in M$, *so ist auch* $\underset{Y}{E}[Y\subset X]\in M$;

(III) *genügt die Zahl* $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$ *der Bedingung* $\mathfrak{B}_6$, *so ist das Mengensystem* M *von der Mächtigkeit* $\overline{\overline{M}}=\aleph_\alpha$ *und genügt dabei der Bedingung*

$\mathfrak{D}_3$. *Ist* $X\subset M$ *und* $\overline{\overline{X}}<\overline{\overline{M}}$, *so ist* $X\in M$;

(IV) *ist* $N=0$ *und genügt die Zahl* $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$ *der Bedingung* $\mathfrak{B}_6$, *so genügt* M *der Bedingung*

$\mathfrak{D}_4$. $M=\underset{X}{E}[X\subset M$ *und* $\overline{\overline{X}}<\overline{\overline{M}}]$.

Beweis. Aus (i) und (ii) ergibt sich sofort:

(1) *Ist* $\xi<\omega_\alpha$, $X\in N_\xi$ *und* $Y\subset X$, *so ist auch* $Y\in N_\xi$;

mit Rücksicht auf (iii) erhalten wir hieraus:

(2) *Ist* $X\in M$ *und* $Y\subset X$, *so ist auch* $Y\in M$; *m. a. W.* M *genügt der Bedingung* $\mathfrak{D}_1$.

Da $\overline{\overline{N}}<\aleph_\alpha$, so folgt ferner aus (i)-(iii), daß

(3) $\overline{\overline{X}}<\aleph_\alpha$ *für jedes* $X\in N_\xi$, $\xi<\omega_\alpha$, *und allgemeiner für jedes* $X\in M$.

Nehmen wir nun an, die Zahl $\aleph_\alpha$ genüge der Bedingung $\mathfrak{B}_4$. Hat dann eine Menge X die Mächtigkeit $\overline{\overline{X}}=\mathfrak{p}<\aleph_\alpha$, so hat bekanntlich das System $\underset{Y}{E}[Y\subset X]$ die Mächtigkeit $2^{\mathfrak{p}}$, also auch eine Mächtigkeit $<\aleph_\alpha$. Mit Rücksicht darauf erhalten wir aus (1), (3) und (ii):

(4) *genügt* $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$ *der Bedingung* $\mathfrak{B}_4$ *und gilt* $\xi<\omega_\alpha$ *sowie* $X\in N_\xi$, *so ist* $\underset{Y}{E}[Y\subset X]\subset N_\xi\subset\sum_{\eta<\xi+1}N_\eta$, $\overline{\overline{\underset{Y}{E}[Y\subset X]}}<\aleph_\alpha$ *und schließlich* $\underset{Y}{E}[Y\subset X]\in N_{\xi+1}$.

Aus (4) und (iii) ergibt sich unmittelbar:

(5) *genügt* $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$ *der Bedingung* $\mathfrak{B}_4$ *und ist* $X\in M$, *so ist auch* $\underset{Y}{E}[Y\subset X]\in M$; *die Menge* M *genügt also der Bedingung* $\mathfrak{D}_2$.

Wir wollen nun zeigen, daß

(6) $$\overline{\overline{M}}\geqslant\aleph_\alpha.$$

Auf Grund von (iii) gilt (6) sicher dann, wenn es eine Zahl $\xi<\omega_\alpha$ gibt, für die

$$\overline{\overline{\sum_{\eta<\xi}N_\eta}}\geqslant\aleph_\alpha$$

ist. Wenn es aber keine solche Zahl ξ gibt, so schließt man aus (ii), daß

$$N_\xi=\underset{X}{E}\Big[X\subset\sum_{\eta<\xi}N_\eta\Big]$$

für jedes ξ, $0<\xi<\omega_\alpha$, gilt. Hieraus folgt sofort, daß jedes Mengensystem N_ξ von einer größeren Mächtigkeit ist als die Summe aller vorangehenden Mengensysteme; man hat demnach:

(7) $$N_\xi-\sum_{\eta<\xi}N_\eta\neq0 \quad \textit{für jedes } \xi, \quad 0<\xi<\omega_\alpha.$$

Aus (iii) ergibt sich anderseits die Formel:

(8) $$M=N_0+\sum_{0<\xi<\omega_\alpha}\Big(N_\xi-\sum_{\eta<\xi}N_\eta\Big).$$

Mit Rücksicht auf (7) wird durch (8) eine Zerlegung des Mengensystems M in $\aleph_\alpha$ disjunkte nicht leere Teilsysteme bestimmt; M muß also die Formel (6) erfüllen.

Aus (3) und (6) gewinnen wir sofort:

(9) *Ist* $X\in M$, *so ist* $\overline{\overline{X}}<\overline{\overline{M}}$.

Wir setzen nunmehr voraus, die Zahl $\aleph_\alpha$ genüge der Bedingung $\mathfrak{B}_6$. Mit Hilfe der transfiniten Induktion wollen wir zeigen, daß

(10) $$\overline{\overline{N_\xi}}\leqslant\aleph_\alpha$$

für jedes $\xi<\omega_\alpha$ gilt. Ist in der Tat $\xi=0$ und setzt man $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{p}$, so ersieht man aus (i), daß N_ξ die Mächtigkeit $2^{\mathfrak{p}}$ hat; da aber $\mathfrak{p}<\aleph_\alpha$, so folgt aus $\mathfrak{B}_6$, daß $\overline{\overline{N_\xi}}=2^{\mathfrak{p}}\leqslant\aleph_\alpha^{\mathfrak{p}}\leqslant\aleph_\alpha$ ist.

Es sei nun $0<\xi<\omega_\alpha$. Angenommen, daß alle Mengensysteme N_η mit $\eta<\xi$ von einer Mächtigkeit $\leqslant\aleph_\alpha$ sind, erhalten wir

$$\overline{\overline{\sum_{\eta<\xi}N_\eta}}=\mathfrak{n}\leqslant\aleph_\alpha\cdot\overline{\overline{\underset{\eta}{E}[\eta<\xi]}}\leqslant\aleph_\alpha\cdot\aleph_\alpha=\aleph_\alpha.$$

Ist $\mathfrak{n}<\aleph_\alpha$, so schließen wir aus (ii), daß

$$N_\xi = \underset{X}{E}\Big[X\subset \sum_{\eta<\xi}' N_\eta\Big]$$

und demnach $\overline{\overline{N}}_\xi = 2^\mathfrak{n}$ ist; hieraus ergibt sich (genau wie im Falle $\xi=0$) die Formel (10). Ist aber $\mathfrak{n}=\aleph_\alpha$, so setzen wir in Hilfssatz 15:

$$\mathfrak{m}=\aleph_\alpha, \qquad M=\sum_{\eta<\xi}' N_\eta$$

und erhalten sofort (wiederum auf Grund von (ii) und $\mathfrak{B}_6$) $\overline{\overline{N}}_\xi=\aleph_\alpha$.

Somit ist (10) für jedes $\xi<\omega_\alpha$ bewiesen. Nach (iii) folgt hieraus, daß $\overline{\overline{M}}\leqslant\aleph_\alpha\cdot\aleph_\alpha=\aleph_\alpha$; mit (6) zusammen ergibt diese Ungleichung

(11) $$\overline{\overline{M}}=\aleph_\alpha.$$

Betrachten wir nun ein beliebiges Mengensystem X, derart daß $X\subset M$ und $\overline{\overline{X}}<\overline{\overline{M}}$. Mit Rücksicht auf (iii) und (11) haben wir

(12) $$X\subset\sum_{\xi<\omega_\alpha}' N_\xi \quad \textit{und} \quad \overline{\overline{X}}<\aleph_\alpha.$$

Wir wenden jetzt Hilfssätze 1 und 12 an. Da $\aleph_\alpha$ der Bedingung $\mathfrak{B}_6$ genügt, so muß ω_α regulär sein, d.h.

(13) $$\aleph_\alpha=\aleph_{cf(\alpha)}.$$

Auf Grund eines bekannten Satzes [14]) schließt man aus (11) und (12) auf die Existenz einer Zahl ξ, $0<\xi<\omega_\alpha$, für die

$$X\subset\sum_{\eta<\xi} N_\eta$$

gilt; mit Rücksicht auf (11), (ii) und (iii) erhält man hieraus $X\,\epsilon\, N_\xi$ und $X\,\epsilon\, M$.

Formulieren wir das Schlußergebnis dieser Betrachtung:

(14) *Genügt* $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$ *der Bedingung* $\mathfrak{B}_6$, *so ist das Mengensystem* M *von der Mächtigkeit* $\overline{\overline{M}}=\aleph_\alpha$ *und es genügt dabei der Bedingung* $\mathfrak{D}_3$: *ist* $X\subset M$ *und* $\overline{\overline{X}}<\overline{\overline{M}}$, *so ist* $X\,\epsilon\, M$.

Um schließlich $\mathfrak{D}_4$ zu begründen, betrachten wir folgende Implikation:

15) *Ist* $X\,\epsilon\, N_\xi$, *so ist* $X\subset M$.

Ist $0<\xi<\omega_\alpha$, so ergibt sich (15) unmittelbar aus (ii) und (iii). Für $\xi=0$ gilt (15) im allgemeinen nicht. Ist aber $N=0$, so ersieht man aus (i), daß N_0 die Nullmenge als das einzige Element enthält; unter dieser Voraussetzung besteht also (15) auch für $\xi=0$ und demnach für jedes $\xi<\omega_\alpha$. Auf Grund von (iii) erhält man dann:

(16) *Ist* $X\,\epsilon\, M$, *so ist* $X\subset M$.

Nehmen wir nun an, daß $N=0$ ist und daß zugleich $\aleph_\alpha$ der Bedingung $\mathfrak{B}_6$ genügt. Es bestehen dann drei Implikationen: (9), (16) sowie, mit Rücksicht auf (14), die Implikation $\mathfrak{D}_3$; diese drei Implikationen können offenbar in eine Formel:

$$M=\underset{X}{E}[X\subset M \quad \textit{und} \quad \overline{\overline{X}}<\overline{\overline{M}}]$$

zusammengefaßt werden. Es gilt folglich:

(17) *Ist* $N=0$ *und genügt* $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$ *der Bedingung* $\mathfrak{B}_6$, *so genügt* M *der Formel* $\mathfrak{D}_4$: $M=\underset{X}{E}[X\subset M \;\textit{und}\; \overline{\overline{X}}<\overline{\overline{M}}]$.

Nach (2), (5), (14) und (17) hat das Mengensystem M alle behaupteten Eigenschaften.

Hilfssatz 19. *Damit die Zahl* $\mathfrak{m}$ *eine von 2 verschiedene und der Bedingung* $\mathfrak{B}_6$ *genügende Kardinalzahl ist, ist es notwendig und hinreichend, daß es ein Mengensystem* M *mit der Mächtigkeit* $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$ *gibt, das die Bedingung* $\mathfrak{D}_3$ *erfüllt.*

Dabei kann $\mathfrak{D}_3$ *durch die Bedingung* $\mathfrak{D}_4$ *ersetzt werden.*

Beweis. Der Fall $\mathfrak{m}<\aleph_0$ ist leicht zu erledigen: es gibt, wie sofort ersichtlich, nur zwei endliche Zahlen $\mathfrak{m}\neq 2$, die $\mathfrak{B}_6$ erfüllen, nämlich $\mathfrak{m}=0$ und $\mathfrak{m}=1$, und es gibt auch nur zwei endliche Mengensysteme, die der Bedingung $\mathfrak{D}_3$, bzw. $\mathfrak{D}_4$, genügen, nämlich die Nullmenge und das System, das die Nullmenge als das einzige Element enthält.

Es sei nun $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$ und zwar $\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$. Wir setzen $N=0$ und definieren durch Rekurrenz die Mengensysteme N_ξ für $\xi<\omega_\alpha$ mittels der in Hilfssatz 18 angegebenen Formeln (i) und (ii); durch die Formel (iii) wird ferner das Mengensystem M bestimmt (die Existenz der Systeme N_ξ und M ergibt sich aus dem Axiom der Ersetzung). Nehmen wir an, $\mathfrak{m}$ genüge der Bedingung $\mathfrak{B}_6$. Nach der Behauptung des Hilfssatzes 18 hat dann das System M die Mächtigkeit $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$; es erfüllt dabei die Formel $\mathfrak{D}_4$ und umsomehr die Bedingung $\mathfrak{D}_3$, die eine unmittelbare Folgerung aus $\mathfrak{D}_4$ ist.

Setzen wir nun umgekehrt voraus, es sei ein Mengensystem M von der Mächtigkeit $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}=\aleph_\alpha$ vorhanden, das $\mathfrak{D}_3$ erfüllt. Aus $\mathfrak{D}_3$ folgt, daß das System

$$N=\underset{X}{E}[X\subset M \quad \textit{und} \quad \overline{\overline{X}}<\overline{\overline{M}}]$$

ein Teilsystem von M ist. Anderseits ist M mit einem Teilsystem von N gleichmächtig, und zwar mit dem System

$$P=\underset{X}{E}[X\subset M \quad \textit{und} \quad \overline{\overline{X}}=1].$$

Dem Cantor-Bernsteinschen Äquivalenzsatz zufolge sind also die Mengensysteme M und N gleichmächtig. Durch Anwendung des Hilfssatzes 16 schließen wir hieraus, daß die Zahl $\mathfrak{m}=\overline{\overline{M}}$ der Bedingung $\mathfrak{B}_6$ genügt, w. z. b. w.

Im Zusammenhang mit Hilfssatz 19 wollen wir bemerken, daß sich die Bedingung $\mathfrak{B}_6$ für $\mathfrak{m}=\aleph_{\alpha+1}$ auf die Formel

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}, \qquad \text{bzw.} \qquad 2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$$

reduziert (vgl. den Beweis des Hilfssatzes 12). Setzt man also insbesondere $\mathfrak{m}=\aleph_1$, so ersieht man, daß die Kontinuumhypothese

$$2^{\aleph_0}=\aleph_1$$

der folgenden Behauptung äquivalent ist:

Es gibt eine Menge M mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{M}}=\aleph_1$, die der Bedingung $\mathfrak{D}_3$, bzw. $\mathfrak{D}_4$ genügt.

Satz 20. *Sei $\mathfrak{m}$ eine beliebige Kardinalzahl und N eine Menge mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{n}$. Die Zahl $\mathfrak{m}$ ist dann und nur dann eine von 2 verschiedene (bzw. unendliche) im engeren Sinne unerreichbare Kardinalzahl, die $>\mathfrak{n}$ ist, wenn es ein Mengensystem M mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$ gibt, das den Bedingungen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ genügt und die Menge N als Element enthält.*

Beweis. Nehmen wir an, die Zahl $\mathfrak{m}\neq 2$ sei im engeren Sinne unerreichbar und $>\mathfrak{n}$. Von der Menge N ausgehend, konstruieren wir das Mengensystem M auf die in Hilfssatz 18 angegebene Weise.

Da $\mathfrak{m}$ den Bedingungen $\mathfrak{B}_4$ und $\mathfrak{B}_6$ genügt (Satz 14), so ist M von der Mächtigkeit $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$ und erfüllt die Bedingungen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$; aus den Formeln (i) und (iii) (Hilfssatz 18) ergibt sich dabei, daß $N\in M$.

Sei, umgekehrt, ein Mengensystem M mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$ gegeben, das die Bedingungen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ erfüllt und N als Element enthält. Da M nicht leer ist, so ist $\mathfrak{m}\neq 0$. Betrachten wir eine Zahl $\mathfrak{p}<\mathfrak{m}$. Es gibt sicher ein System $X\subset M$ mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{X}}=\mathfrak{p}$; nach $\mathfrak{D}_3$ ist $X\in M$. Setzen wir:

$$U=\underset{Y}{E}[Y\subset X] \qquad \text{und} \qquad V=\underset{Y}{E}[Y\subset U].$$

Nach $\mathfrak{D}_2$ ist $U\in M$; aus $\mathfrak{D}_1$ folgt hienach, daß $V\subset M$; es gilt folglich

(1) $$\overline{\overline{V}}\leqslant\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}.$$

Wir haben anderseits

(2) $$\overline{\overline{U}}=2^{\mathfrak{p}}<\overline{\overline{V}}=2^{2^{\mathfrak{p}}};$$

die Ungleichungen (1) und (2) ergeben sofort $2^{\mathfrak{p}}<\mathfrak{m}$. Die Zahl $\mathfrak{m}$ genügt also der Bedingung $\mathfrak{B}_4$. Auf Grund von Hilfssatz 19 ergibt sich ferner aus $\mathfrak{D}_3$, daß auch die Bedingung $\mathfrak{B}_6$ erfüllt ist. Wir können nun den Satz 14 anwenden: es stellt sich heraus, daß $\mathfrak{m}$ eine unendliche im engeren Sinne unerreichbare Zahl ist. Da schließlich $N\in M$ ist, so gilt nach $\mathfrak{D}_2$

$$\underset{Y}{E}[Y\subset N]\subset M;$$

man ersieht hieraus, daß $\mathfrak{m}=\overline{\overline{M}}$ größer als $\mathfrak{n}=\overline{\overline{N}}$ ist. Die Zahl $\mathfrak{m}$ hat demnach alle gewünschten Eigenschaften, und Satz 20 ist in beiden Richtungen bewiesen.

Satz 21. *$\mathfrak{m}$ ist dann und nur dann eine von 2 verschiedene (bzw. unendliche) im engeren Sinne unerreichbare Kardinalzahl, wenn es ein nicht leeres Mengensystem M mit der Mächtigkeit $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$ gibt, das den Bedingungen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ genügt.*

Die Bedingungen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_3$ können dabei durch $\mathfrak{D}_4$ ersetzt werden.

Beweis. Um den ersten Teil des Satzes zu begründen, genügt es in Satz 20 $\mathfrak{n}=0$ zu setzen. Will man dagegen zeigen, daß die Bedingungen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_3$ durch $\mathfrak{D}_4$ ersetzt werden können, so muß man von Hilfssatz 18 für $N=0$ Gebrauch machen: der Behauptung dieses Hilfssatzes zufolge erfüllt das System M nicht nur die Bedingungen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$, sondern auch $\mathfrak{D}_4$. Anderseits sind $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_3$ offenbar Folgerungen aus $\mathfrak{D}_4$; genügt also M den Bedingungen $\mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{D}_4$, so muß $\mathfrak{m}$ (nach dem ersten Teile des Satzes) eine von 2 verschiedene, im engeren Sinne unerreichbare Kardinalzahl sein.

§ 2. Axiomatische Einführung der unerreichbaren Zahlen. Im Zusammenhang mit den Sätzen 4 und 6 taucht in natürlicher Weise die Frage auf, ob es im engeren oder zumindest im weiteren Sinne unerreichbare Zahlen gibt, die $>\aleph_0$ sind. Dieses Problem ist bis jetzt unentschieden und kann aller Wahrscheinlichkeit nach überhaupt nicht entschieden werden. Wenn es sich namentlich um die im engeren Sinne unerreichbaren Zahlen handelt, so läßt es sich ganz streng nachweisen, daß ihre Existenz auf dem Boden des Zermelo-Frankelschen Axiomensystems nicht begründet werden kann [3]). Will man die Existenz beliebig großer im engeren Sinne unerreichbarer Kardinalzahlen gewährleisten, so muß man das Zermelo-Fraenkelsche System um ein neues „Erzeugungsprinzip", also, formal genommen, um ein neues Axiom bereichern. Mit Rücksicht auf Satz 20 kann dieses Axiom folgendermaßen formuliert werden:

Axiom $\mathfrak{A}$. (Axiom der unerreichbaren Mengen). Zu jeder Menge N gibt es eine Menge M mit folgenden Eigenschaften:

$\mathfrak{A}_1$. $N \epsilon M$;

$\mathfrak{A}_2$. *ist* $X \epsilon M$ *und* $Y \subset X$, *so ist* $Y \epsilon M$;

$\mathfrak{A}_3$. *ist* $X \epsilon M$ *und ist* Z *die Menge, die alle Mengen* $Y \subset X$ *und keine anderen Dinge als Elemente enthält, so ist* $Z \epsilon M$;

$\mathfrak{A}_4$. *ist* $X \subset M$ *und sind dabei die Mengen* X *und* M *nicht gleichmächtig, so ist* $X \epsilon M$.

Übrigens sind verschiedene äquivalente Umformungen dieses Axioms bekannt. Man kann z.B. Bedingungen $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}_4$ beziehungsweise durch folgende Bedingungen ersetzen (und zwar jede Bedingung unabhängig von den anderen):

$\mathfrak{A}_{1'}$. $N \subset M$;

$\mathfrak{A}_{2'}$. *ist* $X \epsilon M$ *und* $Y \epsilon X$, *so ist* $Y \epsilon M$ *(m. a. W.: ist* $X \epsilon M$, *so ist* $X \subset M$*)*;

$\mathfrak{A}_{3'}$. *ist* $X \epsilon M$, *so gibt es eine Menge* $Z \epsilon M$, *die alle Mengen* $Y \subset X$ *als Elemente enthält*;

$\mathfrak{A}_{4'}$. *ist* $X \subset M$ *und ist* M *mit keiner Menge* $Y \subset X$ *gleichmächtig, so ist* $X \epsilon M$.

Das Axiom $\mathfrak{A}$ ist logisch so stark, daß seine Einschaltung verschiedene Vereinfachungen des Axiomensystems ermöglicht: einige andere Axiome werden dadurch zu beweisbaren Sätzen und können deshalb weggelassen werden. So ist z. B. einleuchtend, daß das Axiom der Potenzmenge aus Axiom $\mathfrak{A}$, und zwar aus $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, mit Hilfe des Aussonderungsaxioms hergeleitet werden kann (wie bekannt, läßt sich seinerseits das Aussonderungsaxiom aus dem Ersetzungsaxiom ableiten [15])); das Analoge betrifft das Axiom des Unendlichen; ferner ist das Axiom der Paarung eine Folgerung aus Axiom $\mathfrak{A}$ und aus dem Axiom der Ersetzung. Werden in $\mathfrak{A}$ die Bedingungen $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ durch $\mathfrak{A}_{2'}$ und $\mathfrak{A}_{3'}$ ersetzt, so wird neben den genannten Axiomen auch das Axiom der Vereinigung ableitbar.

Alle diese Folgebeziehungen sind ziemlich trivial. Interessanter scheint die Tatsache zu sein, daß auch das Auswahlaxiom auf dem Boden des erweiterten Axiomensystems zu einem beweisbaren Satz wird. Die Ableitung des Auswahlaxioms ist aber nicht so einfach. Daher wollen wir hier den Gedankengang des Beweises skizzieren [16]).

Wie bekannt, ist das Auswahlaxiom eine Folgerung des Wohlordnungssatzes [17]); es genügt also, den Wohlordnungssatz aus Axiom $\mathfrak{A}$ ohne Hilfe des Auswahlaxioms abzuleiten. Zermelo hat bekanntlich zwei Beweise dieses Satzes gegeben, die sich beide auf das Auswahlaxiom stützen [16]). Analysiert man nun den zweiten Zermeloschen Beweis, so gewinnt man folgenden Hilfssatz, der sich bereits ohne Auswahlaxiom begründen läßt:

I. *Ist M eine beliebige Menge und F eine Funktion, die jeder echten Teilmenge X von M ein Element $F(X) \epsilon M - X$ eindeutig zuordnet, so kann die Menge M wohlgeordnet werden.*

Man kann nun diesen Hilfssatz folgendermaßen verschärfen:

II. *Ist M eine beliebige Menge und F eine Funktion, die jeder mit M nicht gleichmächtigen Menge $X \subset M$ ein Element $F(X) \epsilon M - X$ eindeutig zuordnet, so kann die Menge M wohlgeordnet werden.*

Die Grundidee des Beweises bleibt dabei unverändert. Der Unterschied besteht im Folgenden: sind die Voraussetzungen von I erfüllt, so kann man „effektiv" eine binäre Relation definieren, durch welche die Menge M wohlgeordnet wird; im Beweise des Satzes II kann man nur eine „effektiv" wohlgeordnete Teilmenge $P \subset M$ konstruieren, von der man zeigen kann, daß sie mit M gleichmächtig ist (daraus schließt man sofort, daß auch die Menge M wohlordnungsfähig ist, aber man ist nicht imstande, M „effektiv" wohlzuordnen).

Aus II ergibt sich folgender Hilfssatz:

III. *Jede Menge M, die der Bedingung $\mathcal{A}_4$ genügt, kann wohlgeordnet werden.*

Um dies nachzuweisen, betrachten wir die Funktion F, bestimmt durch die Formel:

$$F(X) = \underset{Y}{E}\,[Y \epsilon X \textit{ und } Y \textit{ non } \epsilon\, Y]$$

(wird die Möglichkeit $Y \epsilon Y$ durch ein besonderes Axiom ausgeschlossen[15]), so setzt man einfach $F(X) = X$). Diese Funktion F ordnet jeder Menge X eine Teilmenge $F(X) \subset X$ zu. Man kann dabei zeigen, daß $F(X)$ *non* $\epsilon\, X$ gilt[17]). Ist nun $X \subset M$ und $\overline{\overline{X}} \neq \overline{\overline{M}}$, so ist auch $F(X) \subset M$ und $\overline{\overline{F(X)}} \neq \overline{\overline{M}}$ (hier wird offenbar der Cantor-Bernsteinsche Äquivalenzsatz gebraucht; will man das vermeiden, so muß man $\mathcal{A}_4$ durch $\mathcal{A}_{4'}$ ersetzen); nach $\mathcal{A}_4$ gilt also $F(X) \epsilon M$ und folglich $F(X) \epsilon M - X$. Die Funktion F genügt demnach der Voraussetzung von II, und die Menge M läßt sich wohlordnen.

Auf Grund des Axioms $\mathcal{A}$ kann man nunmehr aus III den allgemeinen Wohlordnungssatz ableiten:

IV. *Jede Menge N kann wohlgeordnet werden.*

Es sei, in der Tat, N eine beliebige Menge. Dem Axiom $\mathcal{A}$ gemäß gibt es eine Menge M, die den Bedingungen $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_4$ genügt ($\mathcal{A}_3$ kommt übrigens in diesem Beweise nicht in Betracht; auch $\mathcal{A}_2$ wird überflüßig, falls man $\mathcal{A}_1$ durch $\mathcal{A}_{1'}$ ersetzt). Nach Satz III kann M wohlgeordnet werden. Es ergibt sich anderseits aus $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$, daß N mit einer Teilmenge von M gleichmächtig ist, und zwar mit der Menge

$$P = \underset{X}{E}\,[X \subset N \textit{ und } \overline{\overline{X}} = 1].$$

Hieraus schließt man sofort, daß auch N wohlgeordnet werden kann.

Zum Schluß sei Folgendes bemerkt. Mit Rücksicht auf die Ergebnisse, die auf dem Gebiet der Metamathematik in den letzten Jahren erzielt wurden, wäre es irrig zu meinen, daß das Axiom

der unerreichbaren Mengen lediglich in höchst abstrakten mengentheoretischen Untersuchungen eine Rolle spielen kann. Man kann ja innerhalb der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre die ganze Analysis und insbesondere die reine Zahlentheorie aufbauen. Man kann deshalb nach der von Gödel entwickelten Methode gewisse Sätze konstruieren, die gänzlich in Termen der reinen Zahlentheorie formuliert werden und die sich auf Grund des Zermelo-Fraenkelschen Systems weder beweisen noch widerlegen lassen; diese Sätze werden aber entscheidbar, falls man in das System das Axiom $\mathcal{A}$ einschaltet[18]).

Es wäre anderseits naiv zu glauben, daß das Problem, die intuitive Cantorsche Mengenlehre in ihrem vollen Umfange zu axiomatisieren, durch die axiomatische Einführung der unerreichbaren Zahlen endgültig gelöst oder zumindest wesentlich gefördert wird; man kann ja ohne weiteres neue Arten von Kardinalzahlen definieren, deren Existenz sich auf dem Boden des erweiterten Axiomensystems nicht begründen läßt und erst durch neue „Erzeugungsprinzipien" gewährleistet werden kann. Das Problem der Axiomatisierung des „Cantorschen Absoluts" (ein Problem, dessen präzise Formulierung selbst erhebliche Schwierigkeiten bietet) bleibt nach wie vor offen, wenn es überhaupt gelöst werden kann.

Bemerkungen.

Über die in diesem Aufsatz enthaltenen Ergebnisse hat der Verfasser am 18. VI. 1937 in der Polnischen Mathematischen Gesellschaft, Abteilung Warschau, berichtet.

[1]) Zum ersten Mal dürfte wohl F. Hausdorff in seiner Arbeit *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*, Math. Ann. **65**, 1908, S. 443, die Frage aufgeworfen haben, ob es reguläre Anfangszahlen ω_α mit Limesindex α gibt. Die diesen Anfangszahlen zugeordneten Alefs $\aleph_\alpha$ stimmen mit den Kardinalzahlen überein, die in der vorliegenden Abhandlung als im weiteren Sinne unerreichbar bezeichnet werden (von der Zahl $\aleph_0$ bzw. ω_0 abgesehen, die hier mitgerechnet wird und bei Hausdorff nicht; vgl. weiter unten Definition 1 sowie Sätze 3 und 4). Der Ausdruck *„unerreichbare Kardinalzahlen" („nombres cardinaux inaccessibles")* wurde von C. Kuratowski vorgeschlagen. Der Begriff der im engeren Sinne unerreichbaren Kardinalzahlen wurde, soviel ich weiß, von mir eingeführt und zum ersten Mal in der gemeinsamen Arbeit von W. Sierpiński und mir: *Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles,* Fund. Math. 15, 1930, S. 292 definiert.

[2]) S. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre,* Leipzig 1914, S. 131 (man berücksichtige dabei die vorangehende Anmerkung, insbesondere bezüglich der Zahl $\aleph_0$).

[3]) Vgl. hiezu (neben der unter [1]) zitierten Abhandlung von Sierpiński und Tarski): C. Kuratowski, *Sur l'état actuel de l'axiomatique de la théorie des ensembles*, Ann. Soc. Pol. Math. **3**, S. 146 f.; A. Tarski, *Sur les principes de l'arithmétique des nombres ordinaux (transfinis)*, ibid., S. 148 f.; A. Lindenbaum et A. Tarski, *Communication sur les recherches de la Théorie des Ensembles*, C. R. Soc. Sc. Vars. **19**, Cl. III, 1926, S. 322 ff.; R. Baer, *Zur Axiomatik der Kardinalzahlen*, Math. Ztschr. **29**, 1929, S. 380 ff., insbesondere S. 382 f.; E. Zermelo, *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche*, Fund. Math. **16**, 1930, S. 29 ff., insbesondere SS. 43-47 (die von Zermelo betrachteten Grenzzahlen decken sich mit den Anfangszahlen ω_α, die den im engeren Sinne unerreichbaren Alefs $\aleph_\alpha$ entsprechen).

[4]) Vgl. hiezu die unter [1]) zitierte Abhandlung von Sierpiński und Tarski sowie folgende Arbeiten: S. Banach, *Über additive Maßfunktionen in abstrakten Mengen*, Fund. Math. **15**, 1930, S. 97 ff.; A. Koźniewski et A. Lindenbaum, *Sur les opérations d'addition et de multiplication dans les classes d'ensembles*, ibid., S. 342 ff.; S. Ulam, *Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math. **16**, 1930, S. 140 ff.; W. Sierpiński, *Sur un théorème de recouvrement dans la théorie générale des ensembles*, Fund. Math. **20**, 1933, S. 214 ff.; S. Ulam, *Über gewisse Zerlegungen von Mengen*, ibid., S. 221 ff.; A. Tarski, *Über additive und multiplikative Mengenkörper und Mengenfunktionen*, C. R. Soc. Sc. Vars. **30**, 1937, S. 151 ff. Vgl. auch das Buch von W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Monogr. Matem. **4**, Warszawa-Lwów 1934, insbesondere S. 107 und S. 152 ff. In diesem Zusammenhang sind noch gewisse ältere Untersuchungen aus der Theorie der geordneten Mengen zu berücksichtigen, namentlich die unter [1]) zitierte Arbeit von Hausdorff, z.B. S. 477 f., sowie die Abhandlung von P. Mahlo, *Über lineare transfinite Mengen*, Leipz. Ber. Math.-phys. Kl. **63**, (1911), S. 187 ff.

[5]) Vgl. z.B. A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, Berlin 1928, S. 268 ff.

[6]) Vgl. hiezu die unter [1]) zitierte Abhandlung von Sierpiński und Tarski, S. 292 ff. (Définition 1, Théorème 1 und Théorème 2); die Kenntnis dieser Arbeit wird hier nicht vorausgesetzt.

[7]) Das Symbol „$cf(\alpha)$" bezeichnet den Index der kleinsten mit der Zahl ω_α konfinalen Anfangszahl. Zu (1) vgl. A. Tarski, *Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires*, Fund. Math. **16**, 1930, S. 185, Lemme 2ª.

[8]) Das betrifft z. B. die weiter angegebenen Sätze 10 und 13 sowie den Hauptsatz der unter [1]) zitierten Abhandlung von Sierpiński und Tarski (S. 300, Théorème 5; vgl. hiezu die unter [4]) erwähnte Arbeit von Koźniewski und Lindenbaum, S. 354 f.).

[9]) S. A. Tarski, *Quelques théorèmes sur les alephs*, Fund. Math. **7**, 1925, S. 7 (Théorème 7ª).

[10]) S. z.B. A. Schoenflies, *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*, Leipzig und Berlin 1913, S. 136 f.

[11]) Ibidem, S. 66 f.

[12]) Vgl. z.B. meine unter [7]) erwähnte Arbeit, S. 194.

[13]) Ibidem, S. 195, Lemme 10ᵇ.

[14]) Ibidem, S. 185 f., Lemme 3ᶜ.

[15]) Vgl. z.B. die unter [3]) zitierte Abhandlung von Zermelo, S. 31.

[16]) Vgl. z.B. das unter [2]) zitierte Werk von Hausdorff, S. 133 ff. Zum Folgenden vgl. noch die Ableitung des Wohlordnungssatzes und des Auswahlaxioms in der Arbeit von J. v. Neumann, *Die Axiomatisierung der Mengenlehre*, Math. Ztschr. **27**, 1928, S. 726 ff.

[17]) Vgl. E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, I, Math. Ann. **65**, 1908, S. 264 f.

[18]) Vgl. hiezu K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatsh. Math. Phys. **1**, 1931, S. 187 ff., sowie A. Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, Stud. Phil. **1**, 1935, insbesondere S. 397, Anm. [106]), und S. 400 ff.