MMRC
DISCUSSION PAPER SERIES

MMRC-J-166

コミットメントの単調比較静学

東京大学経済学研究科
ものづくり経営研究センター

渡邊泰典

2007 年 5 月

東京大学21世紀COE〔センター・オブ・エクセレンス〕
ものづくり経営研究センター

コミットメントの単調比較静学*

渡邊泰典†
東京大学 21 世紀 COE ものづくり経営研究センター

2007 年 5 月 7 日

概 要

この論文の主要な目的は Bajari and Tadelis (2001) によって分析された不確実性に対するコミットメントのモデルを連続モデルに一般化し，単調比較静学の手法を用いて分析するために必要となる条件を導出することである．意思決定者の最終的な利得関数に優モジュラ性を仮定する場合，分布関数に対して一階の確率支配条件を課すと共に，その限界代替率に対して逓増条件を課すことが必要十分条件であることが示される．さらにこのモデルにいくつかの追加的な仮定を設けることで Athey (2002) にある対数優モジュラモデルとして扱うことが可能となることを示す．

1 はじめに

Bajari and Tadelis (2001) は建設産業における施主と施工者の間の契約形態の分析を行い，その形態の差違が従来のプリンシパル＝エージェント理論が示唆するようなプリンシパルとエージェント間の情報の非対称性によるものではなく，両者が共に直面する不確実性にどのように対処するかによるとして単調比較静学の手法を用いて分析を行った．そこでは必要な建築物の調達を考えている施主がまず設計図を用意し，施工者に対しその建設を依頼する．この建築プロジェクトには実際に建設にとりかかるまで解消されない不確実性が存在する．それは例えば建設現場の地盤の状態や，施主が実際に必要とする建築物の詳細など，である．このような不確実性に対処する一つの極端なやり方は，起こりうるすべての事態に対し予め設計図に対処法を記載しておき，施工者がその通りに建設作業を行うというものである．ところが実際には事前に起こりうる状態をすべて想定することは困難である上に，その対処法を用意することにも費用がかかることから，このような解決法は採用されず，通常はある程度のところまで対処法を用意しておき，事前に想定していなかった事態が生じた場合には改めて費用をかけて設計変更と再交渉を行うという解決法が採用されることになる．彼らは事前にどこまでの事態に対応する解決策を用意しておくか，言い換えれば，事前にどの程度詳細な設計にコミットするか，を建築プロジェクトの複雑性とからめて分析し，プロジェクトの複雑性が増すにつれて，施主は詳細ではなく事後的に再交渉する確率が高いようなを好む，すなわち不確実性に対して事後的に対処することを好むことを示した．

彼らは離散モデルを用いて，建設プロジェクトを将来起こりうる状態数 T とその上の確率分布 $(f_t)_{t=1}^{T}$ の組み合わせとして定義し，さらにプロジェクト T がプロジェクト T' よりも複雑であることを，$(f_t)_{t=1}^{T}$ が一階の確率支配の意味で不確実性が高いこと，T は T' の状態をさらに細分化したものであること，という二つの条件が満たされることとして定義している．その上で状態数 T の増加が先述した二つの条件を自動的に含意するとして分析を行った．我々の主要な目的は彼らのモデルを連続化することで，より一般的な状況の下で単調比較静学による分析を可能とするための条件を導くことである．

---

*本稿をまとめるにあたり奥野正寛，瀧澤弘和，松八重泰輔の各氏からは多くの助言を頂いた．特に記して感謝したい．また東京大学における「建築アーキテクチャ研究会」の参加者，とりわけ藤本隆宏，野城智也，安藤正雄そして吉田敏の各氏にも議論を通じて有益な示唆を頂いた．本稿に残る誤りは全て筆者に帰するものである．

†watanabe-y@mmrc.e.u-tokyo.ac.jp

単調比較静学による分析は Milgrom and Shannon (1994) を嚆矢として近年盛んに研究されてきた分野である．不確実性下の意思決定問題を単調比較静学の手法を用いて解くことについては Athey (1998)，Athey (2002) が詳しい．本論文では補遺に単調比較静学のため必要となる数学的知識を含んでいるが，その多くは Athey (2002)，Topkis (1998) による．

本論文の構成は以下の通りである．2 節では簡単な数値例を用いて分析の概略を示す．3 節ではモデルの一般化を行い，利得関数に優モジュラ性を仮定した上で単調比較静学による分析を可能にするための条件として，分布関数の限界代替率に関する条件を導く．4 節では Athey (2002) の研究を元にモデルを修正することで，優モジュラ性ではなく対数優モジュラ性を用いた単調比較静学が可能になることを示す．最後に他の研究との関連と今後の研究課題について論ずる．補遺には単調比較静学分析を行うために必要となる数学的知識を記した．

2 数値例

ここでは簡単な数値例を用いて分析の概略を示す．

ある製品を市場に投入するために設計および生産を行おうとしている企業について考える．この製品の市場における消費者の嗜好は均質であるが，この製品について消費者がどのような機能を必要としているかは設計を始めた段階では不確実であるものとする．したがって設計を行う段階では考えうる様々な消費者の需要に対応できるような設計を行う必要がある．この考えうる機能に対する需要の全体は T で表され，最も基本的な機能を 0 として需要される可能性が高いものから低いものへと順序付けられているものとする，つまり集合 T は区間 $[0, \bar{t}]$ に等しく，$\bar{t}$ に近づくほど事前には予想し難い需要であるものとする．そのうちの任意の機能を t で表すと，より大きな t はより想定し難い需要に対応することの表現として，分布関数 $F(t, \theta)$ に対し確率密度関数 $f(t, \theta) = \partial F(t, \theta)/\partial t$ が t について減少関数であるとする．ここでは簡単化のために分布関数が

$$F(t, \theta) = \begin{cases} t/\theta & t \leq \theta \\ 1 & t > \theta \end{cases} \tag{2.1}$$

またはその確率密度が

$$f(t, \theta) = \begin{cases} 1/\theta & t \leq \theta \\ 0 & t > \theta \end{cases} \tag{2.2}$$

で表されるような確率分布を仮定する．$\theta > 0$ はこの分布のパラメータであり，ここでは f の台[1]を表している．θ が小さいほどより限られた主要な機能に対する需要が生じやすいことを意味する．逆にいえば θ が大きいほど潜在的な消費者の需要の多様性が高く，市場の不確実性が高いことを意味する．

企業はこの確率分布とパラメータ θ を所与として製品の設計を行う．ここで企業が考えなければならないことは，最も主要な機能 $t = 0$ に対応できるような設計を行うことはもちろんとして，どこまで瑣末な需要に対応できる設計を行うかである．具体的には，企業はある $\hat{t}$ を選択し $[0, \hat{t}]$ という範囲に含まれる機能に対応できる設計を行う．あるいは確率 p を選択し，事後的に消費者の需要をうまくとらえる確率がちょうどこの p と等しくなるように $\hat{t}$ を $p = F(\hat{t}, \theta)$ によって決定されるような $\hat{t}$ まで対応できる設計を行う．

設計が終了した段階で消費者の実際の需要 t が明らかになり，これに続く生産段階で実際の製品の質 x を作りこむことになる．ここで $x \in [0, \infty)$ とする．企業の売上は品質と消費者の需要に依存しており，ここでは

$$R(x, t) = \frac{x}{1 + t}, \tag{2.3}$$

[1] $f > 0$ であるような区間．

とする．すなわち主要な機能 (t が小さい) を消費者が望むほど，売上が品質に敏感に反応するものとする．品質の作り込みの費用は事前の設計が消費者の需要をきちんととらえているかどうかに依存する．うまく需要をとらえていない場合には，それに対応するための設計変更等の追加的な作業を行わなくてはならないため，事前の設計で需要をとらえている場合と比べて同じ品質 x を実現するために余分な費用がかかる．その費用関数は設計がうまくいった場合を $\omega = 1$，そうでない場合を $\omega = 0$ として

$$C(x, \omega) = \frac{x^2}{1 + \omega}, \tag{2.4}$$

とする．したがって企業の純利益は $\pi(x, t, \omega) \equiv R(x, t) - C(x, \omega)$ で与えられる．ここで注意すべきことは限界収入 $\partial R/\partial x$ が t の減少関数，限界費用 $\partial C/\partial x$ が ω の減少関数になっているということである．これによって純利益 π に関して機能の重要度と品質，設計と品質の間に補完関係があるといえる．

分析はまず需要 t が実現し設計がそれに対応しているかどうかが判明した時点から始める．このときの品質 x に関する一階条件は以下のようになる．

$$\frac{1}{1 + t} - \frac{2x}{1 + \omega} = 0. \tag{2.5}$$

したがって最適な品質 $x^*(t, \omega)$ は

$$x^*(t, \omega) = \frac{1 + \omega}{2(1 + t)}, \tag{2.6}$$

となる．これは明らかに t について減少関数，ω について増加関数となっている．この x^* にしたがった場合の企業の純利益は (t, ω) の関数として表され

$$\Pi(t, \omega) \equiv \pi(x^*(t, \omega), t, \omega) = \frac{1 + \omega}{4(1 + t)^2}, \tag{2.7}$$

となる．これもまた t について減少関数，ω について増加関数となっていることは明らかである．設計が需要をきちんととらえることの便益

$$\Pi(t, 1) - \Pi(t, 0) = \frac{1}{4(1 + t)^2},$$

を考えると，これは t に関する減少関数となっていることから，ここでも主要な需要と設計の間の補完性が保たれていることがわかる．つまり事後の最適な作りこみを織り込んでも設計を成功させることの便益は，消費者が主要な機能を望む場合ほど大きい．

以上で t が実現し設計の成否 ω が判明した場合の利得が求められたことから，次に設計を所与として事前の期待利得を求める．所与の分布関数 $F(t, \theta)$ に対して消費者の需要を確率 p でとらえるような設計を行うとすると，これは実現した t が区間 $[0, \hat{t}(p, \theta)]$ に含まれる確率がちょうど p になるように $\hat{t}(p, \theta)$ を選ぶことになる．ここで考えている一様分布に対しては $\hat{t}(p, \theta) = \theta p$ となる．事前の期待利得を $V(p, \theta)$ とすると，$t \leq \hat{t}(p, \theta)$ の場合には需要をうまくとらえることができており $(\omega = 1)$，逆に $t > \hat{t}(p, \theta)$ の場合には需要をとらえられない $(\omega = 0)$ ことに注意すれば

$$\begin{aligned}
V(p, \theta) &= \int_0^{\hat{t}(p,\theta)} \Pi(t, 1) f(t, \theta) dt + \int_{\hat{t}(p,\theta)}^{\infty} \Pi(t, 0) f(t, \theta) dt, \\
&= \int_0^{\theta p} \Pi(t, 1) f(t, \theta) dt + \int_{\theta p}^{\infty} \Pi(t, 0) f(t, \theta) dt \\
&= \int_0^{\theta p} \frac{2}{4(1 + t)^2} \frac{1}{\theta} dt + \int_{\theta p}^{\theta} \frac{1}{4(1 + t)^2} \frac{1}{\theta} dt \\
&= \left[-\frac{2}{4\theta(1 + t)} \right]_0^{\theta p} + \left[-\frac{1}{4\theta(1 + t)} \right]_{\theta p}^{\theta} \\
&= \frac{1 + p + 2\theta p}{4(1 + \theta p)(1 + \theta)}, \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

である．ここで

$$\frac{\partial V(\theta,p)}{\partial p} = \frac{(1+2\theta)(4(1+\theta p)(1+\theta)) - (1+p+2\theta p)4\theta(1+\theta)}{(4(1+\theta p)(1+\theta))^2}$$
$$= \frac{4(1+\theta)^2}{(4(1+\theta p)(1+\theta))^2} = \frac{1}{4(1+\theta p)^2} > 0,$$

であるから V は p に関して増加かつ凹関数である．また，この限界利得が θ について減少関数であることも明らかである．

最後に最適な設計の決定について分析する．先述したように，事前の設計の決定は p または $\hat{t}$ を決定することであり，このときの費用はどれくらい幅広い消費者の需要に対応するか，に依存するものとする．すなわち $\hat{t}$ の関数としてパラメータ $k>0$ に対して $C(\hat{t}) = k\hat{t}$ と表されるものとする．p，θ について書換えるならば $\hat{t}(p,\theta) = \theta p$ を用いて，$C(p,\theta) = k\theta p$ となる．したがって企業の事前の最大化問題は以下のように表される．

$$\max_{p\in[0,1]} V(p,\theta) - C(p,\theta) = \frac{1+p+2\theta p}{4(1+\theta p)(1+\theta)} - k\theta p. \tag{2.9}$$

この問題の一階条件

$$\frac{1}{4(1+\theta p)^2} - k\theta = 0, \tag{2.10}$$

より内点での最適な $p^*(\theta)$ は

$$p^*(\theta) = \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{2\sqrt{k\theta}} - 1\right) \tag{2.11}$$

となる．これは明らかに θ について減少関数となっている．したがって端点も考慮に入れると，事前の不確実性を所与としての最適な確率 $p^*(\theta)$ は以下の通りになる．

$$p^*(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{if } 2\sqrt{k\theta} \le (1+\theta)^{-1} \\ \theta^{-1}((2\sqrt{k\theta})^{-1} - 1) & \text{if } (1+\theta)^{-1} < 2\sqrt{k\theta} < 1 \\ 0 & \text{if } 2\sqrt{k\theta} \ge 1 \end{cases} \tag{2.12}$$

すなわち，市場の不確実性が増すにつれて消費者の需要を事前の設計でとらえる確率は減少していくことになる．

3 モデル

この節では前節で確認したようなコミットメントの一般モデルについて分析を行う．ここで扱うモデルは Bajari and Tadelis (2001) で分析されたモデルの連続変数への拡張であり，利得関数に優モジュラ性を仮定する際に単調比較静学を行うために必要となる分布関数の性質を特定することが主要な目的である．

3.1 設定

一人の意思決定者 (プレーヤー) が不確実性を含む問題に直面している状況を考える．このとき，このプレーヤーは不確実性が解消される前 (事前) の時点であるポジションにコミットする必要がある．プレーヤーが直面する不確実性を 0 を含む区間 T，パラメータ空間 $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ に対して，分布関数 $F : T \times \Theta \mapsto \mathbb{R}_+$ で表す．F は $T \subseteq \mathbb{R}_+$ を台とし，アトムを持たない確率測度であり，t，θ について 2 回連続微分可能であるとする．θ を不確実性の度合を表すパラメータとする．この分布の不確実さの順序関係は一階の確率支配関係によって表されるものとし，以下の仮定をおく．

仮定 3.1.

$$\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial \theta} < 0. \tag{3.1}$$

すなわち，θ が大きいほど密度関数が平坦となり事前の不確実性が大きいことを意味する．起こりうる事象 t が重要度の順に順序づけられていることを表すために密度関数が t について単調に減少することを仮定する．

仮定 3.2.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial t}\right) \leq 0. \tag{3.2}$$

このモデルの時系列は以下の通りとなる．

(i). 第 0 期にプレーヤーは不確実性の度合 θ を所与として，あるポジションにコミットする．

(ii). 第 1 期に不確実性が解消され，実現した事象 t とプレーヤーがコミットしたポジションに応じて事後的な状態が実現する．

(iii). 第 2 期に事後的な状態を所与としてプレーヤーはさらに別の意思決定を行い，最終的な利得が実現する．

プレーヤーがコミットするポジションとして，ここでは T の Borel 集合族 $\mathscr{B}_T$ の要素を考える．これは事前のポジション選択を「どの事象 t に応じた対策を予め用意しておくか」という問題であると考えることを意味する．事後的な状態 ω はこのとき実現した事象 t に対する対策が用意されているかどうか，に応じて決定されるものとし，$\Omega = \{0,1\}$ に対して，予め対策を用意できていた場合を $\omega = 1$，用意できなかったときを $\omega = 0$ とする．したがってプレーヤーのポジション S に対して事後状態を決定する関数 $h : \mathscr{B}_T \times T \mapsto \Omega$ は，

$$h(S,t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in S \\ 0 & \text{if } t \notin S \end{cases}, \tag{3.3}$$

で与えられる．

あるポジション $S \in \mathscr{B}_T$ にコミットする費用は S のルベーグ測度 $\mu(S)$ とパラメータ $k \in \mathbb{R}_{++}$ に対して $C(S) = k \cdot \mu(S)$ で与えられるものとする．

最後にプレーヤーの粗利得を定式化する．$X \subseteq \mathbb{R}$ をコンパクトな集合とし，これによって事後的な選択肢の集合を表す．最終的な利得はこの選択と，実現した事象，そして事後的な状態によって決定される．このプレーヤーの利得関数を

$$u : X \times T \times \Omega \mapsto \mathbb{R}_+, \tag{3.4}$$

と表す．この u の優モジュラ性を次のように仮定する．

仮定 3.3. $u(x,t,\omega)$ は $(x,-t,\omega)$ について優モジュラ，ω について増加的，また x と t について 2 回連続微分可能．

3.2 分析

まず第 2 期の意思決定問題を解き，それを考慮に入れた上で第 0 期のコミットメントの決定について分析する．

(t,ω) を所与として x を決定することを考える．プレーヤーの直面する問題は

$$\max_{x\in X} u(x,t,\omega), \tag{3.5}$$

であり，このときに最大化された値を $v(t,\omega)$ とおくと Topkis (1998) のいくつかの定理を利用することで直ちに次の結果が従う．

補題 3.1. T の順序を逆転した集合を $(-T)$ と表す．$v(t,\omega)$ は $(-T)\times\Omega$ 上で $(-t,\omega)$ について優モジュラ．さらに，

$$\arg\max_{x\in X} u(x,t,\omega),$$

の最大元，最小元が存在し $(-t,\omega)$ について単調増加．

Proof. X がコンパクトな $\mathbb{R}$ の部分集合であることから，所与の (t,ω) に対して u の最大値は必ず存在し $\arg\max_{x\in X} u(x,t,\omega)$ は非空である．したがって定理 A.1 より $v(t,\omega)$ は $(-T)\times\Omega$ 上で $(-t,\omega)$ について優モジュラ．

さらに，定理 A.2 より $\arg\max_{x\in X} u(x,t,\omega)$ の最大元と最小限が存在し，$(-T)\times\Omega$ 上で $(-t,\omega)$ について増加的． □

次に x の選択を所与として t，ω に関する期待値を求め，プレーヤーのコミットメントの選択について分析する．コミットメントとして任意の集合 $S\in\mathscr{B}_T$ を選択した場合の事前の期待値は

$$V(S,\theta)\equiv\int_S v(t,1)f(t,\theta)dt+\int_{S^C} v(t,0)f(t,\theta)dt,$$

となる．このとき S として 0 から始まる区間 $[0,\hat{t}]$ を選択することがルベーグ測度に対して効率的であることが示される．

補題 3.2. 与えられた $\bar{\mu}$ に対して $S=[0,\bar{\mu}]$ とすると，

$$S\in\arg\max_{\substack{S'\in\mathscr{B}\\ \mu(S')=\bar{\mu}}} V(S',\theta). \tag{3.6}$$

つまり 0 から始まる区間 $S=[0,\bar{\mu}]$ はルベーグ測度が $\bar{\mu}$ に等しいという条件の下で期待利得 V を最大化している．

Proof. $t'<\bar{\mu}<t''$ とし，$S=[0,\bar{\mu}]$ から $t=t'$ の微小区間 dt を取り除き，$t=t''$ の微小区間 dt を加えて S' を構成すると，$\mu(S)=\mu(S')=\bar{\mu}$ であり，これにともなう V の変化 dV は

$$\begin{aligned}dV&=v(t'',1)f(t'',\theta)dt-v(t'',0)f(t'',\theta)dt-(v(t',1)f(t',\theta)dt-v(t',0)f(t',\theta)dt)\\&=(v(t'',1)-v(t'',0))f(t'',\theta)dt-(v(t',1)-v(t',0))f(t',\theta)dt,\end{aligned}$$

となるが，これは仮定 3.2 と補題 3.1 により非正である． □

補題 3.2 により，事前のコミットメントとして $[0,\hat{t}]$ という区間のみを考えれば良いことがわかる．したがって，以後コミットメントの選択を表すために $\hat{t}$，もしくは $t\le\hat{t}$ となる確率 p を用いることにする．さらに p，θ を所与として $\hat{t}(p,\theta)$ を $p=F(\hat{t}(p,\theta),\theta)$ で定義する．また，すでに $\mathscr{B}_T$ 上の関数として定義した関数を p と $S=[0,\hat{t}(p,\theta)]$ を同一視することで $[0,1]$ 上で定義された関数として扱う．

以上を踏まえて x の選択を所与としたときの t,ω に関する期待利得は

$$V(p,\theta)\equiv\int_0^{\hat{t}(p,\theta)} v(t,1)f(t,\theta)dt+\int_{\hat{t}(p,\theta)}^{\infty} v(t,0)f(t,\theta)dt, \tag{3.7}$$

で表される．この期待利得の性質を調べるための準備として $\hat{t}(p,\theta)$ の性質を調べる．

補題 3.3. $\hat{t}(p,\theta)$ は (p,θ) について $[0,1]\times\Theta$ 上で増加的である．これに加えて (p,θ) について $[0,1]\times\Theta$ 上で優モジュラになるのは任意の (t,θ) に対して

$$\frac{\partial}{\partial t}\log\left(-\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial\theta}\Bigg/\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial t}\right)\geq 0, \tag{3.8}$$

が成立するとき，かつそのときのみである．

Proof. $p=F(\hat{t}(p,\theta),\theta)$ とし，この両辺を p，θ でそれぞれ偏微分する．

$$\begin{aligned}
1&=\frac{\partial F(\hat{t}(p,\theta),\theta)}{\partial t}\cdot\frac{\partial\hat{t}(p,\theta)}{\partial p},\\
0&=\frac{\partial F(\hat{t}(p,\theta),\theta)}{\partial t}\cdot\frac{\partial\hat{t}(p,\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial F(\hat{t}(p,\theta),\theta)}{\partial\theta},
\end{aligned}$$

したがって，

$$\frac{\partial\hat{t}(p,\theta)}{\partial p}=\left(\frac{\partial F(\hat{t}(p,\theta),\theta)}{\partial t}\right)^{-1}\geq 0, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial\hat{t}(p,\theta)}{\partial\theta}=-\frac{\partial F(\hat{t}(p,\theta),\theta)}{\partial\theta}\cdot\left(\frac{\partial F(\hat{t}(p,\theta),\theta)}{\partial t}\right)^{-1}\geq 0. \tag{3.10}$$

次に $\hat{t}(p,\theta)$ の優モジュラ性を確認する．そのために (3.8) を書き直す．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\log\left(-\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial\theta}\Bigg/\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial t}\right)&\geq 0\\
\frac{\partial}{\partial t}\log\left(-\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\log\left(\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial t}\right)&\geq 0\\
\frac{\partial^2F(t,\theta)}{\partial t\partial\theta}\Bigg/\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial^2F(t,\theta)}{\partial t^2}\Bigg/\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial t}&\geq 0\\
\frac{\partial^2F(t,\theta)}{\partial t\partial\theta}-\frac{\partial^2F(t,\theta)}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial\theta}\Bigg/\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial t}&\leq 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

実際に $\hat{t}(p,\theta)$ の交差微分を計算する．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\hat{t}(p,\theta)}{\partial\theta\partial p}&=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial F(\hat{t}(p,\theta),\theta)}{\partial t}\right)^{-1}\\
&=-\left(\frac{\partial F(\hat{t}(p,\theta),\theta)}{\partial t}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{\partial^2F(\hat{t}(p,\theta),\theta)}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial\hat{t}(p,\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial^2F(\hat{t}(p,\theta),\theta)}{\partial\theta\partial t}\right)\\
&=-\left(\frac{\partial F(\hat{t}(p,\theta),\theta)}{\partial t}\right)^{-2}\\
&\quad\times\left\{\frac{\partial^2F(\hat{t}(p,\theta),\theta)}{\partial t^2}\cdot\left(-\frac{\partial F(\hat{t}(p,\theta),\theta)}{\partial\theta}\right)\cdot\left(\frac{\partial F(\hat{t}(p,\theta),\theta)}{\partial t}\right)^{-1}+\frac{\partial^2F(\hat{t}(p,\theta),\theta)}{\partial\theta\partial t}\right\}.
\end{aligned}$$

ここでこの中括弧の内部が任意の (p,θ) について非正となるのは (3.11) が任意の (t,θ) について成立するとき，かつそのときのみであることから結論が従う． □

この補題により，費用関数 $C(p,\theta)=k\cdot\hat{t}(p,\theta)$ が (p,θ) について優モジュラであることも直ちに従う．

ここで条件 (3.8) について 2 点ほど補足しておく．第一はこの条件の直観的な意味に関するものである．$(-\partial F/\partial\theta)/(\partial F/\partial t)$ は F に関する限界代替率 $(dt/d\theta)$ として解釈できることから，θ が 1 単位増加したことによる F の減少を補うためにどれだけ t を増加させなければいけないか，を表していると考えられる．したがってこの条件は，この限界代替率を対数微分することで得られるその変化率が非負であるということ

を意味し，これはすなわち限界代替率が t の増加関数であることを意味している．つまり t が大きくなるにつれて同程度の不確実性の増大に対処するために必要な追加的な投資が大きくなっていくことになる．第二にこのような条件を満たす確率分布の例として指数分布 $F(t,\theta)=1-\exp(\theta t)$ を挙げておく．ただしここでパラメータ θ は負である．実際，計算することで，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial \theta} &= -t\exp(\theta t) \\
\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial t} &= -\theta\exp(\theta t) \\
\log\left(-\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial \theta}\bigg/\frac{\partial F(t,\theta)}{\partial t}\right) &= \log\left(-\frac{t}{\theta}\right) = \log t - \log(-\theta) \\
\frac{\partial}{\partial t}(\log t - \log(-\theta)) &= \frac{1}{t} > 0,
\end{aligned}$$

となり条件が満たされていることがわかる．

V の性質を確認する．

補題 3.4. $V(p,\theta)$ は $(-p,\theta)$ について $[0,1]\times\Theta$ 上で優モジュラ．

Proof. $V(p,\theta)$ を p，θ で偏微分する．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V(p,\theta)}{\partial p} &= (v(\hat{t},1)f(\hat{t},\theta) - v(\hat{t},0)f(\hat{t},\theta))\cdot\frac{\partial \hat{t}}{\partial p} \\
&= (v(\hat{t},1)f(\hat{t},\theta) - v(\hat{t},0)f(\hat{t},\theta))\cdot\left(\frac{\partial F(\hat{t},\theta)}{\partial t}\right)^{-1} \\
&= v(\hat{t},1) - v(\hat{t},0), \\
\frac{\partial^2 V(p,\theta)}{\partial\theta\partial p} &= \frac{\partial v(\hat{t},1)}{\partial t}\cdot\frac{\partial \hat{t}}{\partial \theta} - \frac{\partial v(\hat{t},0)}{\partial t}\cdot\frac{\partial \hat{t}}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial v(\hat{t},1)}{\partial t} - \frac{\partial v(\hat{t},0)}{\partial t}\right)\frac{\partial \hat{t}}{\partial \theta} \le 0.
\end{aligned}$$

最後の不等式は v が $(-t,\omega)$ について優モジュラであることから従う． □

以上をまとめると次の定理を証明することができる．

定理 3.5. 任意の (t,θ) について (3.8) が成立しているとする．このとき，任意の θ について

$$\arg\max_{p\in[0,1]} V(p,\theta) - C(p,\theta), \tag{3.12}$$

の最大元と最小元が存在し，それらは θ について単調減少である．

Proof. まず $\arg\max_{p\in[0,1]} V(p,\theta)-C(p,\theta)$ は非空であることに注意．補題 3.3，3.4 より $V(p,\theta)-C(p,\theta)$ は $(-p,\theta)$ について優モジュラになっている．したがって，定理 A.2 より $\arg\max_{p\in[0,1]} V(p,\theta)-C(p,\theta)$ に最大元と最小元が存在し θ について単調減少になっている． □

4 対数優モジュラモデル

前節では利得関数に優モジュラ性を仮定することで，それに対応する分布関数の性質を導き単調比較静学の手法による分析を行った．この節では前節で分析したモデルに修正を加えることで Athey (2002) で分析されている対数優モジュラモデルとして扱うことができることを示す．

基本的な設定は前節と同一とする．$T=[0,\bar{T}]$ とし，分布関数を $F: T\times\Theta\mapsto\mathbb{R}_+$ で表す．プレーヤーのポジション決定は簡単化のため $[0,\hat{t}]$ という形の区間に限定し，プレーヤーは $\hat{t}$ を選択するものとする．事後的な事象は $\Omega=[0,1]$ とし，事後状態を決定する関数 $h: T\times T\mapsto\Omega$ をプレーヤーの選択 $\hat{t}$ と実現した事象

t の関数として定義し直し，$\hat{t}$ と t について 2 階連続微分可能，$\hat{t}$ について増加関数，t について減少関数であるとする．事後のプレーヤーの意思決定はここでは考えないものとし，正の実数値関数 $u : T \times \Omega \mapsto \mathbb{R}_{++}$ はプレーヤーの最終的な利得関数であり，ω について増加関数であるとする．$\hat{t}$，t を所与として $h(\hat{t}, t)$ を u へ代入したものを v とする．すなわち，

$$v(\hat{t}, t) \equiv u(t, h(\hat{t}, t)).$$

これを t に関して期待利得を計算すると

$$V(\hat{t}, t) \equiv \int_T v(\hat{t}, t) f(t, \theta) dt,$$

となり，$\hat{t}$ の費用関数 $C(\hat{t})$ をあわせて考えると

$$\begin{aligned} V(\hat{t}, t) - C(\hat{t}) &= \int_T v(\hat{t}, t) f(t, \theta) dt - C(\hat{t}) \\ &= \int_T (v(\hat{t}, t) - C(\hat{t})) f(t, \theta) dt, \end{aligned} \tag{4.1}$$

と書き直すことができる．したがって定理 A.3 より $v(\hat{t}, t) - C(\hat{t})$ が対数優モジュラ，すなわち $v(\hat{t}, t)$ が $(\hat{t}, -t)$ について対数優モジュラであるとき，f が $(-t, \theta)$ について対数優モジュラであることと (4.1) の最大化解が θ について増加的であることが同値になる．

命題 4.1. $u : T \times \Omega \mapsto \mathbb{R}_{++}$ は $(-t, \omega)$ について対数優モジュラ，$h : T \times T \mapsto \Omega$ は $(\hat{t}, -t)$ について優モジュラ，そして

$$u(t, \omega) \cdot \frac{\partial^2 u(t, \omega)}{\partial \omega^2} - \left(\frac{\partial u(t, \omega)}{\partial \omega} \right)^2 \geq 0,$$

とする．このとき $v(\hat{t}, t)$ は $(\hat{t}, -t)$ について対数優モジュラである．

Proof. $v(\hat{t}, t)$ の対数をとり，これを $\hat{t}$ で偏微分する．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log v(\hat{t}, t)}{\partial \hat{t}} &= \frac{\partial \log u(t, h(\hat{t}, t))}{\partial \hat{t}} \\ &= \frac{1}{u(t, h(\hat{t}, t))} \left(\frac{\partial u(t, h(\hat{t}, t))}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial h(\hat{t}, t)}{\partial \hat{t}} \right) \end{aligned}$$

つぎに t で偏微分する．

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{u(t, h(\hat{t}, t))} \left(\frac{\partial u(t, h(\hat{t}, t))}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial h(\hat{t}, t)}{\partial \hat{t}} \right) \right\} \\ &\quad = \frac{1}{u(t, h(\hat{t}, t))^2} \times \\ &\qquad \left\{ u(t, h(\hat{t}, t)) \left(\frac{\partial u(t, h(\hat{t}, t))}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial^2 h(\hat{t}, t)}{\partial t \partial \hat{t}} + \frac{\partial h(\hat{t}, t)}{\partial \hat{t}} \left(\frac{\partial^2 u(t, h(\hat{t}, t))}{\partial t \partial \omega} + \frac{\partial^2 u(t, h(\hat{t}, t))}{\partial \omega^2} \cdot \frac{\partial h(\hat{t}, t)}{\partial t} \right) \right) \right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{\partial u(t, h(\hat{t}, t))}{\partial t} + \frac{\partial u(t, h(\hat{t}, t))}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial h(\hat{t}, t)}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial u(t, h(\hat{t}, t))}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial h(\hat{t}, t)}{\partial \hat{t}} \right\} \\ &\quad = \frac{1}{u(t, h(\hat{t}, t))^2} \times \\ &\qquad \left\{ \frac{\partial h(\hat{t}, t)}{\partial \hat{t}} \left(u(t, h(\hat{t}, t)) \cdot \frac{\partial^2 u(t, h(\hat{t}, t))}{\partial t \partial \omega} - \frac{\partial u(t, h(\hat{t}, t))}{\partial t} \cdot \frac{\partial u(t, h(\hat{t}, t))}{\partial \omega} \right) \right. \\ &\qquad + u(t, h(\hat{t}, t)) \cdot \frac{\partial u(t, h(\hat{t}, t))}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial^2 h(\hat{t}, t)}{\partial t \partial \hat{t}} \\ &\qquad \left. + \frac{\partial h(\hat{t}, t)}{\partial \hat{t}} \cdot \frac{\partial h(\hat{t}, t)}{\partial t} \left(u(t, h(\hat{t}, t)) \cdot \frac{\partial^2 u(t, h(\hat{t}, t))}{\partial \omega^2} - \left(\frac{\partial u(t, h(\hat{t}, t))}{\partial \omega} \right)^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

.

ここで h が $(\hat{t}, -t)$ について優モジュラであることから $\partial^2 h/\partial t\partial\hat{t} \leq 0$，$u$ が $(-t, \omega)$ について対数優モジュラであることから

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial \log u(t,\omega)}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{u(t,\omega)}\cdot\frac{\partial u(t,\omega)}{\partial t}\right)\\ &= \frac{1}{u(t,\omega)^2}\left(u(t,\omega)\cdot\frac{\partial^2 u(t,\omega)}{\partial\omega\partial t} - \frac{\partial u(t,\omega)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial u(t,\omega)}{\partial t}\right) \leq 0,\end{aligned}$$

となり

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{u(t,h(\hat{t},t))}\left(\frac{\partial u(t,h(\hat{t},t))}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial h(\hat{t},t)}{\partial\hat{t}}\right)\right\} \leq 0, \tag{4.2}$$

したがって $v(\hat{t}, t)$ が $(\hat{t}, -t)$ について対数優モジュラであることが導かれる．

□

5　終わりに

この論文では Bajari and Tadelis (2001) のモデルを出発点として，離散モデルから連続モデルへ拡張することで不確実性下のコミットメントの決定において単調比較静学による分析を可能とするための条件を導き，それに直観的な解釈を与えた．ここでの結論は最終的な利得関数に優モジュラ性を仮定する場合，分布関数に対してある種の限界代替率逓減 (逓増) 則を仮定することが必要十分条件となるということであった．

さらに対数優モジュラ性を満たす確率分布に対しては，利得関数に対して対数優モジュラ性を含めたいくつかの仮定をおくことが単調比較静学による分析を行うための十分条件になっていることを示した．これによって不確実性下のコミットメントの問題を優モジュラ性だけでなく，より幅広い状況のもとで分析する可能性を示した．ただし，ここでは本稿の主要定理で分析したモデルよりも強い制約条件が課されており，今後これらの条件を緩和したモデルの研究を行うことが必要である．

本論文におけるコミットメントの問題は事前にどれだけ費用をかけて将来の不確実性に備えるか，という観点から柔軟性に対する選好として考えることも可能である．不確実性に対し事後的な柔軟性をどのように確保するか，という観点から行われた研究はいくつか存在する．柔軟性に対する選好を扱った研究としては Kreps (1979)，Nehring (1999) などがあるが，これらの研究においては不確実な将来の選好に対して事前の投資でどれだけ広い選択肢の集合を確保するか，という形で問題が定義されている一方，我々のモデルでは将来の選好の不確実性を事前の投資によっていかに小さくするか，という形で問題を扱っていることに注意する必要がある．その意味で柔軟性を事後的に必要なスイッチングコストに依存して定義している Jones and Ostroy (1984) のアプローチに近いといえる．これらの研究も含めて柔軟性という観点からその関係を明確にすることが望まれるが，それは今後の研究課題としたい．

A　補遺

この補遺では単調比較静学の分析を行うために必要な数学的準備を記載する．この補遺における記述は主に Athey (2002) と Topkis (1998) による．

ある集合 X 上の二項関係 $\preceq$ が次の 3 つの性質を満たすとき，これを X 上の半順序という．

反射的　すべての $x \in X$ に対して，$x \preceq x$．

非対称的　すべての $x', x'' \in X$ に対して，もし $x' \preceq x''$ かつ $x'' \preceq x'$ ならば $x' = x''$．

推移的　すべての x', x'' と x''' に対して，もし $x' \preceq x''$ かつ $x'' \preceq x'''$ ならば $x' \preceq x'''$．

またこの X を半順序集合という．X' を X の部分集合，$x \in X$ とし，任意の $x' \in X'$ に対して $x' \preceq x (x \preceq x')$ が成立するとき x は X' の上界 (下界) という．もし集合 X' の要素 x' が X' の上界 (下界) になっているならば，x' は X' の最大元 (最小元) であるという．半順序集合 X の要素 x', x'' が最小上界 (最大下界) を持つとき，これを x' と x'' の結び (交わり) といい $x' \vee x'' (x' \wedge x'')$ で表す．すべての要素の組の結びと交わりを持つような半順序集合を束という．また X' を X の部分集合とし，その要素の組の X における結びと交わりをすべて含むとき，これを X の部分束という．例えば $x_i', x_i'' \in \mathbb{R}$ に対して $x_i' \vee x_i'' = \max\{x_i', x_i''\}$，$x_i' \wedge x_i'' = \min\{x_i', x_i''\}$ と定義し，$x', x'' \in \mathbb{R}^n$ に対し $x' \vee x'' = (x_1' \vee x_i'', \ldots, x_n' \vee x_n'')$，$x' \wedge x'' = (x_1' \wedge x_i'', \ldots, x_n' \wedge x_n'')$ と定義することで $\mathbb{R}^n$ は束となる．

f を束 X 上の実数値関数とする．もし

$$f(x') + f(x'') \leq f(x' \vee x'') + f(x' \wedge x''), \tag{A.1}$$

あるいは

$$f(x') - f(x' \wedge x'') \leq f(x' \vee x'') - f(x''), \tag{A.2}$$

が成立するとき f は X 上で優モジュラであるという．同様に X 上の正の実数値関数 f に対し $\log(f)$ が優モジュラであるとき，f は対数優モジュラであるという．f として $\mathbb{R}^n$ 上の連続微分可能な関数を考えるとき，f が優モジュラであることはその交差偏微分が非負であること，

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0, \quad \forall i \neq j \tag{A.3}$$

と同値である．

優モジュラ関数の最大化について最も基本となるのは次の定理である．

定理 A.1 (Topkis (1998))**.** もし X と T が束，S が $X \times T$ の部分束，$f : X \times T \mapsto \mathbb{R}$ が (x,t) について S 上で優モジュラ，S_t が T 内の点 t における S の切断，そして $g(t) = \sup_{x \in S_t} f(x,t)$ が S の T への射影 $\Pi_T S$ 上で有限であるとすると，$g(t)$ は $\Pi_T S$ 上で優モジュラ．

さらに次の定理により解の単調性が導かれる．

定理 A.2 (Topkis (1998))**.** もし X が束，T が半順序集合，$f : X \times T \mapsto \mathbb{R}$ が T の点 t それぞれについて X 上で x について優モジュラ，そして f が $X \times T$ 上 (x,t) について優モジュラであるとする．さらに，

(i). X が有限である

(ii). X が $\mathbb{R}^n$ のコンパクトな部分集合で f が任意の t に対して X 上で x について上方半連続である

のどちらかが成立するとき，それぞれの $\arg\max_{x \in X} f(x,t)$ は *(*有限か $\mathbb{R}^n$ のコンパクトな部分集合として*)* 最大元と最小元を持つ X の部分束であり，$\arg\max_{x \in X} f(x,t)$ の最大 *(*最小*)* 元は T 上 t について増加的である．

対数優モジュラモデルについては次の定理が成立する．

定理 A.3 (Athey (2002))**.** $X \subseteq \mathbb{R}$，$T \subseteq \mathbb{R}$，$\Theta \subseteq \mathbb{R}$ とし，$u : X \times T \mapsto \mathbb{R}_+$ と $f : T \times \Theta \mapsto \mathbb{R}_+$ を非負，有界な可測関数とする．このとき次の二つが同値である．

(i). μ に対してほとんどいたるところ対数優モジュラであるような $u : X \times T \mapsto \mathbb{R}_+$ に対して

$$x^*(\theta, B) \equiv \arg\max_{x \in B} \int u(x,t) f(t,\theta) d\mu(t),$$

が (θ, B) について増加的．

(ii). f **は** μ **に対してほとんどいたるところ** (t,θ) **について対数優モジュラ.**

ただし， x^* **が単元集合とは限らないため，ここで増加的というのは以下のように定義される集合強順序に対するものである.**

定義 A.1. ある集合 A**，**B **と任意の** $a \in A$**，**$b \in B$ **に対して** $a \vee b \in A$ **かつ** $a \wedge b \in B$ **が成立するとき，集合強順序に対して** A **が** B **よりも大きいといい，**$A \geq B$ **と書く. ある集合値関数** $A : \mathbb{R} \mapsto 2^{\mathbb{R}^n}$ **が集合強順序に対して増加的であるのは，任意の** $\tau_H > \tau_L$ **に対し** $A(\tau_H) \geq A(\tau_L)$ **が成立するときである.**

参考文献

Athey, S. (1998) "Characterizing Properties of Stochastic Objective Functions." MIT Working Paper No.96-1R.

——— (2002) "Monotone Comparative Statics Under Uncertainty.," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 117, pp. 187–223.

Bajari, P. and S. Tadelis (2001) "Incentives versus Transaction Costs: A Theory of Procurement Contracts," *RAND Journal of Economics*, Vol. 32, No. 3, pp. 387–407, Autumn.

Jones, R.A. and J.M. Ostroy (1984) "Flexibility and Uncertainty," *The Review of Economic Studies*, Vol. 51, No. 1, pp. 13–32.

Kreps, D. M. (1979) "A Representation Theorem for 'Preference for Flexibility'," *Econometrica*, Vol. 47, pp. 565–577, May.

Milgrom, P. and C. Shannon (1994) "Monotone Comparative Statics," *Econometrica*, Vol. 62, No. 1, pp. 157–180.

Nehring, K. (1999) "Preference for Flexibility in a Savage Framework," *Econometrica*, Vol. 67, pp. 101–120.

Topkis, D.M. (1998) *Supermodularity and Complementarity*: Princeton University Press.