MMRC
DISCUSSION PAPER SERIES

MMRC-J-168

ネットオークションにおける評価額分布の構造型実証分析による推定

東京大学経済学研究科
ものづくり経営研究センター

渡邊泰典

2007 年 5 月

東京大学21世紀COE〔センター・オブ・エクセレンス〕
ものづくり経営研究センター

ネットオークションにおける評価額分布の構造型実証分析による推定*

渡邊 泰典†

2007年11月

概 要

独立私的価値パラダイムに基づくオークションの実証分析においては潜在入札者数と落札価格を用いた分析手法が従来用いられていたが，本稿では Paarsch (1997) の構造型実証モデルを用いて，潜在入札者数のデータを入手できないネットオークションにおける評価額分布の推定を行う．このときにいくつかの仮説に基づくモデルを推定し，入札者の評価額に影響を与える要因について論じる．つぎに推定されたモデルに基づき出品者の利得を最大化する留保価格の推定を行い，実際の留保価格の設定が最適値を下回っていることを示す．さらに推定されたパラメータを用いたシミュレーションによって潜在入札者数の推定を行う．

*本論文をまとめるにあたり東洋大学の富田純一氏には多数の貴重な助言を頂いたことを特に記して感謝したい．また，瀧澤弘和，安達裕之，舘健太郎，松八重泰輔の各氏との日頃からの意見交換なしにはこの研究が行われることはなかったであろう．もちろん本稿に残る誤りは全て筆者に帰するものである．

†watanabe-y@mmrc.e.u-tokyo.ac.jp

1 はじめに

入札制度に関する経済理論分析は近年急速に発達している．ネットオークションが盛んになっている今日では応用上も非常に重要である．

オークションには様々な種類のものが存在するが，理論的に最も重要な分類は第一価格オークションと第二価格オークションの区別である．第一価格オークションとは，入札者のうち最も高い金額で入札した者が自分の入札金額で出品された財を購入するオークションである．一方，第二価格オークションは入札者のうち最も高い金額で入札した者が財を購入するという点では変わらないものの，その際の金額として自分の入札金額ではなく次点の入札金額を用いる点が異なる．理論的には，第一価格オークション競り下げ型 (オランダ式) オークション，第二価格オークションは競り上げ型 (イギリス式) オークションと同値であることが知られている．

第二価格オークションでは販売される財に対する自分の評価額を正直に入札することが各入札者にとって支配戦略であることが知られている．すなわち，ある入札者が入札額を決定するにあたっては他の入札者の戦略や評価額を考慮に入れる必要がなく，自分の評価額とオークションに設定されている留保価格[1]を比べるだけで入札を行うことになる．したがって第二価格オークションの分析から得られる知見は，理論的に簡便であるだけでなく，入札者同士の推定や戦略的相互依存関係などの仮定を必要としないため，実証上も比較的頑健な結果をもたらすことになる．

本稿で分析の対象とするネットオークションは競り上げ型オークションであるため，第二価格オークションとみなすことができる．さらにこの点を補足するものとして次の二点を指摘しておきたい．一つ目は多くのネットオークションにおいて提供される自動入札機能の存在である．これはある入札者が最高金額を入札している時点でその入札金額を超える入札が行われた場合，あらかじめ提出された最高額までオークションシステムがわずかずつ入札額を上げながら自動的に入札を代行してくれるものである．このシステムの存在により，各入札者はオークションを常に監視することなく自分の評価額まで入札を行うことができる．しかもアイテムを落札できた場合の落札価格は次点の入札者が提出した最高額をわずかに上回る価格であり，自分の提出した最高額よりは多くの場合低くなっているだろう．もう一点はスナイピングと呼ばれる手法に関するものである．これはオークションの終了時間直前に，その時点での最高入札額をわずかに上回る金額での入札を行うことで財を落札しようとする戦略である[2]．この場合も落札者は自分の評価額よりも低い価格で財を競り落とすことになる．

オークションの経済理論分析そのものについては本稿では扱わないため，理論的基礎についてはMilgrom (2004)，Paarsch, Hong and Haley (2006) などを参照されたい．

オークションの実証分析は理論分析とともに近年発達が著しい分野である．その中で特に実証研究への応用に用いられているのが独立私的価値パラダイム (Independent Private Value Paradigm:IPVP) に基づく構造モデルである．IPVP とはオークションで出品されている財に対する評価が各入札者毎に異なり，確率的に独立に決定されるとするものである．これに対して出品されている財に対する評価が入札者全員に共通であるようなモデルを共通価値パラダイム (Common Value Paradigm:CVP) という．IPVP に基づく評価額分布の推定は扱いやすいものではあるが，実用上いくつかの問題点がある．そのうち最も問題となるものが潜在的な入札者数のデータを必要とすることである．多くのオークションでは，実際に入札または落札した人以外のデータをとることが難しく，あらかじめ参加予定者が登録されている場合にはそれによって代用することができるが，個別のオークションに対してそのようなデータが得られることは稀である．ネットオー

[1]出品者が設定する落札価格の最低限．

[2]最近はオークションの終了時間直前に入札が行われた場合，自動的に終了時間を延長するシステムが実装されていることもあり，このような戦略の有効性は以前に比べて落ちてはいる．

クションにおいては，潜在的な入札者であっても入札を行う気がなければいかなる記録も残すことなくオークションを立ち去ることになるため，データの入手は一層困難となる．

Paarsch (1997) は IPVP に基づき落札額と潜在的な入札者数を用いる従来の推定モデルだけでなく，潜在的な入札者数が観察された全てのオークションで同一であるという仮定をおくことで，実際に行われた全入札額を用いて評価額分布の推定を行う方法を導出した．また実際にカナダにおける木材の公売オークションを分析するためにこの構造モデルを利用し，最適な留保価格の推定を行うことで実際に設定されている留保価格がこの推定価格よりも低いことを示した．

本稿では彼らが導いた構造型実証モデルに基づき，観測された入札データを用いて評価額分布のパラメトリック推定を行うとともに，理論から導かれる最適な留保価格の推定およびシミュレーションによる潜在的入札者数の推定を行う．

本論文の構成は以下の通りである．2 節では本研究で扱ったデータについて概観する．3 節では構造モデルを用いて実際にパラメータを推定し，モデル選択検定によりどのデータが出品者の評価に影響を与えているかを分析する．4 節では 3 節のパラメータ推定をもとにシミュレーションを行い，潜在的な入札者数の推定を行う．最後に 5 節では議論と今後の課題を述べる．補論では Paarsch (1997) の構造型モデルについて概説する．

2　データ

ここでは同質の財が繰り返し出品されておりデータのコントロールが容易であるということから，硬貨のオークションのうち比較的出品数が多い一円銀貨を対象とした．その上で 2006 年 11 月から 2007 年 5 月まで Yahoo!オークションにおいて落札された一円銀貨のデータを集め，その中から研究用・参考用とされているレプリカもの，欠貝円などのエラーもの，鑑定書つきのものを取り除き，銀貨一枚のみ出品しているものを抽出した．また送料込みで入札させるものも取り除いた．このようにして整理されたデータ 1184 件を鋳造年ごとに分類し，出品数が多い明治 28 年製のデータ 68 件を対象として分析を行った．

今回データとして集計した項目は売り手の評価 (レーティング)，全入札額，入札数，開始価格である．その標本統計量と全入札額の分布はそれぞれ表 1，図 1 の通りである．さらに出品データのうち未使用とされているものについてはダミー変数を導入してその値を 1 とし，それ以外ものダミー変数の値を 0 とすることで区別した．

	レーティング	落札額	入札数	開始価格
最小値	41	810	1	1
メディアン	644	2521	4	1200
平均値	1547.544	3101.617	3.926	1550.456
最大値	8276	11101	12	7000
標準偏差	2170.793	1587.91	2.139	1186.808

表 1: 標本統計量．標本数 $T = 68$

今回の分析では全入札額，入札数，および開始価格は構造モデルを通じて入札者の評価額分布を推定するために用いる．それ以外の出品者のレーティングおよび未使用ダミー変数についてはパラメータを通じた影響を分析することにする．

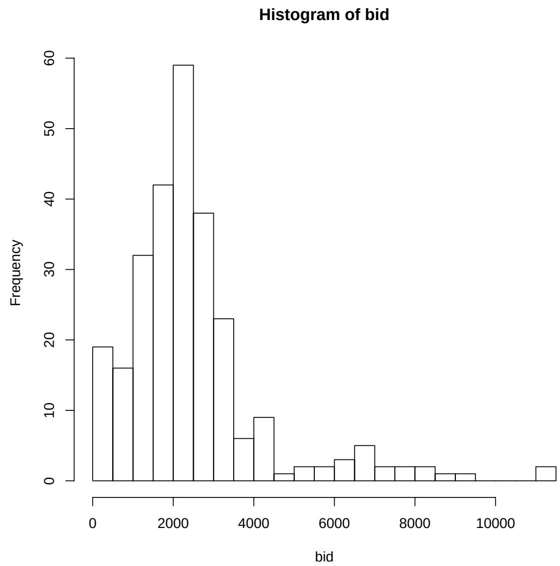

図 1: 全入札額の分布

まず構造モデルを作成する前に回帰分析によって落札額を出品者のレーティングと未使用ダミーによって説明できるかを分析する．推定結果は次のようになる．

$$\begin{aligned} \text{落札額} &= \underset{(12.866)}{2964.619} - \underset{(-0.232)}{0.01795} \times \text{レーティング} + \underset{(4.907)}{5602.441} \times \text{未使用ダミー} \qquad (2.1) \\ \text{調整済み決定係数} &= 0.2508 \\ p\ \text{値} &= 3.203 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

係数の下の括弧内の数値は t 値である．この回帰式からは出品者のレーティングに対する係数が 0 であるという帰無仮説を棄却できないことが読み取れる．それに対して未使用ダミーに対しては係数が 0 であるという帰無仮説を有意水準 0.1%で棄却することができ，落札価格に対して有意に影響を与えていることがわかる．同様に出品者のレーティングの対数値を用いて推定した結果を下に示す．

$$\begin{aligned} \text{落札額} &= \underset{(3.425)}{3219.56} - \underset{(-0.308)}{44.34} \times \text{レーティングの対数値} + \underset{(4.936)}{5622.71} \times \text{未使用ダミー} \qquad (2.2) \\ \text{調整済み決定係数} &= 0.2508 \\ p\ \text{値} &= 3.138 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

この回帰式においても，前述の結果と同様に 0.1〜10%のいずれの有意水準でも係数が 0 であるという帰無仮説を出品者のレーティングについては棄却することができない一方，未使用ダミーについては棄却することができることがわかる．したがって，出品物が未使用であるかどうかは落札価格に対して有意に影響を与えていると考えることができるが，次節ではこれが実際に入札者の選好の変化によるものかどうかを構造モデルを用いて分析する．

なお落札価格と出品者のレーティングの関係については 5 節で補足する．

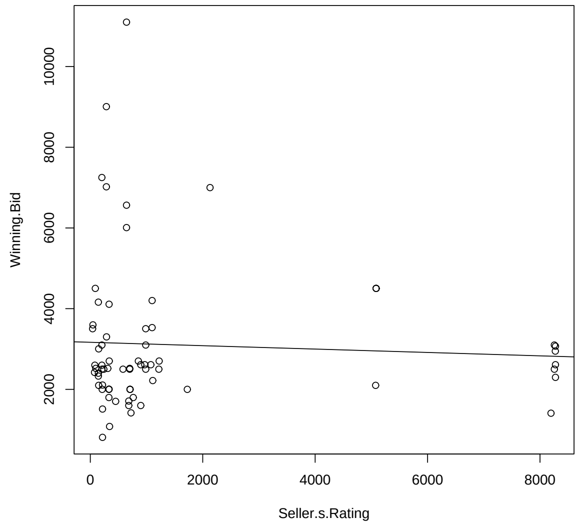

図 2: 落札額とレーティングの散布図

3　構造モデルを用いた推定

3.1　パラメータ推定およびモデル検定

構造モデルによる推定方法の詳細は補論に委ねる．

ここでは入札者の財に対する評価が，ある分布関数に依存すると仮定し，この分布に対してパラメトリック推定を行う．分布関数としては全入札額の分布形状から対数正規分布[3]を仮定する．推定にあたっては以下の 3 つの仮説を立て，これに対応するモデルを用いて推定する．

モデル 0　分布形状が観測されたデータに影響を受けない場合．評価額 V の密度関数はパラメータ $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ に対して

$$f_0(v, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_2 v} \exp\left(-\frac{(\log v - \theta_1)^2}{2\theta_2^2}\right), \tag{3.1}$$

で与えられる．

モデル 1　分布形状が出品者のレーティングに影響を受ける場合．評価額 V の密度関数は出品者のレーティングの対数値 RA，パラメータ $\boldsymbol{\theta} = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_2)$ に対して

$$f_1(v, \boldsymbol{\theta}; RA) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_2 v} \exp\left(-\frac{(\log v - (\theta_{11} + \theta_{12} RA))^2}{2\theta_2^2}\right), \tag{3.2}$$

で与えられる．

[3]対数正規分布とは確率変数の対数値が正規分布に従っている分布のことであり，その密度関数は

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma v} \exp\left(-\frac{(\log v - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0$$

で与えられ，期待値は $\exp(\mu + \sigma^2/2)$，分散は $\exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1)$ となる．

モデル 2 分布形状が出品物が未使用かどうかに影響を受ける場合．評価額 V の密度関数は未使用ダミー D，パラメータ $\boldsymbol{\theta} = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_2)$ に対して

$$f_2(v, \boldsymbol{\theta}; D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_2 v} \exp\left(-\frac{(\log v - (\theta_{11} + \theta_{12} D))^2}{2\theta_2^2}\right), \tag{3.3}$$

で与えられる．

以上のモデルを最尤推定量を用いて推定する．利用可能なデータはオークションのデータ $T = 68$ 回分である．各オークションのインデックスを上付きの t で表す．実際の入札者を n^t，入札金額を高い順に並べ替えたものを $\boldsymbol{b}^t = (b^t_{(1)}, \ldots, b^t_{(n^t)})$，留保価格を r^t とする．各オークションにおける評価額の分布は独立であると考えると $(n^t)_{t=1}^T$ に条件付けたときの尤度は次の式で与えられる．

$$\prod_{t=1}^{T} n^t! \prod_{i=2}^{n^t} \frac{f(b^t_{(i)}, \boldsymbol{\theta})}{1 - F(r^t, \boldsymbol{\theta})} \cdot \frac{1 - F(b^t_{(1)}, \boldsymbol{\theta})}{1 - F(r^t, \boldsymbol{\theta})}. \tag{3.4}$$

この対数をとった対数尤度関数

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T} \Bigg(\log(n^t!) + \sum_{i=2}^{n^t} \Big(\log(f(b^t_{(i)}, \boldsymbol{\theta})) - \log(1 - F(r^t, \boldsymbol{\theta})) \Big) \\ + \log(1 - F(b^t_{(1)}, \boldsymbol{\theta})) - \log(1 - F(r^t, \boldsymbol{\theta})) \Bigg)\end{aligned} \tag{3.5}$$

をパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ について最大化する．推定結果は表 2 の通りである．LLF は推定されたパラメータの値における対数尤度の値を示す．また，モデル 0 の推定結果に基づく分布形状を図 3 に図示する．この図からは全入札額の分布に比べ頂点が左に寄っていることが読み取れるが，これはオークションの留保価格 (開始価格) よりも低い評価しか持たない入札者は実際には入札を行わないことによって説明できる．

	モデル 0	モデル 1	モデル 2
θ_1	7.06087	—	—
θ_{11}	—	8.534048	6.91421
θ_{12}	—	−0.253041	1.26177
θ_2	1.21016	1.247616	1.17343
LLF	−1488.086	−1486.157	−1478.660

表 2: 推定結果

推定結果からわかるように，説明変数を導入しないモデル 0 に比べ，説明変数を導入したモデル 1 および 2 では対数尤度の値が改善 (増加) している．しかしこの改善がモデルの構造的な要因によるものか，確率的な撹乱にすぎないのかはこれだけではわからない．これを確認するために，ここでは Vuong (1989) によるモデル選択検定を行い，モデル 1 および 2 がモデル 0 に対して「良い」モデルであるかどうかを調べる．

モデル 0 とモデル $i(= 1, 2)$ の比較のための検定を検定 i とする．この検定 i の帰無仮説 H_0^i と対立仮説 H_A^i をそれぞれ

$$H_0^i : \text{モデル } 0 \text{ とモデル } i \text{ は同等}$$
$$H_A^i : \text{モデル } i \text{ はモデル } 0 \text{ より良い}$$

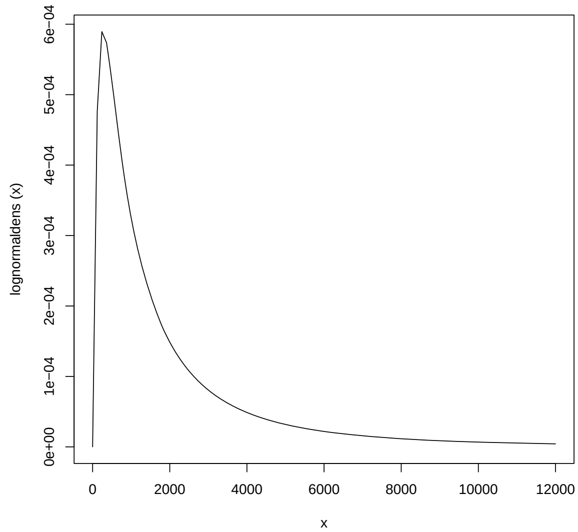

図 3: モデル 0 の推定

とする．Vuong (1989) によると，

$$LR^i \equiv \text{モデル}\, i\, \text{の対数尤度} - \text{モデル}\, 0\, \text{の対数尤度}, \tag{3.6}$$

としたとき，

1. H_0^i のもとで $2LR^i$ は自由度 1 のカイ二乗分布に分布収束する
2. H_A^i のもとで $2LR^i$ はほとんど確実に (almost surely)$+\infty$ に発散する

という性質が成立する．したがって，$2LR^i$ を統計量としてカイ二乗分布のパーセント点より大きいかどうかを比較することで検定を行うことができる．統計量 $2LR^i$ を実際に計算すると，

$$2LR^1 = 2 \times (-1486.157 - (-1488.086)) = 3.858, \tag{3.7}$$

$$2LR^2 = 2 \times (-1478.660 - (-1488.086)) = 18.852, \tag{3.8}$$

となり，パーセント点との比較から

- 帰無仮説 H_0^1 は有意水準 5%までは棄却できるが，有意水準 1%では棄却できない
- 帰無仮説 H_0^2 は 10%，5%，1%，いずれの有意水準でも棄却できる

ことがわかる．

有意水準	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
χ^2_α	2.705543	3.841459	6.634897

表 3: カイ二乗分布のパーセント点

以上の推定および検定結果をまとめると次のようになる．第一に，出品者のレーティングが入札者の評価に与える影響は小さい有意水準のもとでは確認できない．有意水準を大きくした場合

でもレーティングの係数は負になっており，少なくとも出品者のレーティングが入札者の評価額を高める方向に働くとは確認できない．それに対して，出品物が未使用かどうかは10%から1%までのいずれの有意水準のもとでも，入札者の評価額に対して有意に働くことが確認できる．

以後ではモデル2を用いていくつかの考察を行う．

3.2 最適留保価格の推定

入札者の評価額がモデル2にしたがう場合に評価額の期待値，分散と標準偏差を求めると，未使用品以外に対しては,

$$\begin{aligned} E[V] &= \exp(6.91421 + 1.17343^2/2) = 2003.556 \\ \mathrm{Var}[V] &= \exp(2 \times 6.91421 + 1.17343^2) \cdot (\exp(1.17343^2) - 1) = 11893178 \\ \sqrt{\mathrm{Var}[V]} &= 3448.649 \end{aligned}$$

未使用品に対しては

$$\begin{aligned} E[V] &= \exp(6.91421 + 1.26177 + 1.17343^2/2) = 7075.893 \\ \mathrm{Var}[V] &= \exp(2 \times (6.91421 + 1.26177) + 1.17343^2) \cdot (\exp(1.17343^2) - 1) = 148339705 \\ \sqrt{\mathrm{Var}[V]} &= 12179.48 \end{aligned}$$

となる．

モデル2を用いて推定した分布に対して出品者の期待利得を最大化する最適留保価格を求める．出品者の財に対する評価を v_0，入札者の評価の分布関数を F とすると，最適な留保価格 ρ^* は出品者が危険中立的であるとき

$$\rho = v_0 + \frac{1 - F(\rho)}{F(\rho)}, \tag{3.9}$$

で与えられる．この式を用いて v_0 が0の場合と入札者の評価の平均 $\exp(\theta_{11} + \theta_{12} D + \theta_2^2/2)$ と等しい場合について，使用済み，未使用のものそれぞれについて最適留保価格の推定を行った．この結果を次の表4に結果を標本平均とともに示す．なお，ここで未使用品の出品はすべて同一の出品者によって行われていた．逆に，$D = 0$ の場合について標本平均と等しくなるように出品者

	$v_0 = 0$	$v_0 = \exp(\theta_{11} + \theta_{12} D + \theta_2^2/2)$	標本平均
$D = 0$	74.4813	2003.946	1594.41
$D = 1$	180.1539	7076.291	100

表 4: 最適留保価格の推定

の評価額 v_0 を推定した結果，すなわち

$$v_0 = 1594.41 - \frac{1 - F(1594.41)}{F(1594.41)} \tag{3.10}$$

を解いた結果は $v_0 = 1593.877$ であり，推定された出品者の評価額の平均よりも低かった．

以上の結果から，出品者の財に対する評価 v_0 が入札者の平均評価と等しいと考えた場合，実際の留保価格の平均は理論から予想される値よりも低くなっている．これに対しては二つの説明が

考えられる．一つ目は出品者が最適に留保価格を設定しているとして，その評価額が入札者に比べて低いことである．これは出品者と入札者の母集団がそもそも異なるものである可能性を示唆する．もう一点は最適留保価格の決定に関わる問題である．先述した最適留保価格は出品者が危険中立的であることを仮定しているが，財が落札されないことが出品者にとって特に避けたい危険である場合には，安値で落札される可能性を許容して留保価格を引き下げることが最適になり得る．つまり出品者が危険回避的であるということが示唆される．このいずれが正しいかについては今後の研究課題である．

4　シミュレーションによる潜在入札者数の推定

この節では，推定したパラメータ値を利用して，実際に行われた入札額の分布を再現できるかをシミュレーションによって確認し，潜在的な入札者数を推定する．

ここでは未使用でない場合，すなわち $D = 0$ の場合のみを考える．前節の結果より，出品者は危険中立的で最適な留保価格を決定するものとし，その評価額 v_0 は 1593.877 とする．潜在的な入札者数 N の値を変えながら各オークションを 100 回ずつ行い，実際に入札した人数 n の平均値を計算した．さらにこれを 1000 回繰り返すことで実際に入札した人数の平均値 $\bar{n}_N$ の分布を得た．

	$N=5$	$N=6$	$N=7$	$N=8$	$N=9$	$N=10$	$N=15$
平均値	2.488	2.981	3.486	4.007	4.481	4.984	7.448
標準偏差	0.1754	0.2034	0.2212	0.2598	0.2842	0.3057	0.4523

表 5: 潜在入札者の推定

入札数の標本平均が 3.926 であることから，このモデルにおける潜在入札者が $N = 8$ であることが推定される．しかし今回のデータでは実際に行われた入札数の最大値は 12 となっており，これは観測したすべてのオークションで潜在入札者数が等しいという仮定を再検討する必要性を示唆している．

5　終わりに

本稿では Paarsch (1997) による構造型実証分析の手法をインターネットオークションのデータに適用して分析を行った．その結果に基づき今後の課題を述べておく．

5.1　レーティングと落札価格

本稿では出品者のレーティングと落札価格の間には明確な関係が認められず，構造型モデルを用いた分析によってもレーティングが入札者の評価額に正の影響を与えることは確認できなかった．これは Melnik and Alm (2002) などいくつかの先行研究によっても指摘されている通りである．しかしその一方で，本稿で分析の対象としたデータには含めなかった鑑定保証書つきの出品では，落札価格が 1 万円から 20 万円程度といった，他と異なる価格帯での取引きが行われていたことから，入札者の側に贋作に対する懸念の存在が伺えるため，なんらかの形で出品者の評判が入札者の財に対する評価に影響する可能性は排除できない．また，最近では Gürtler and Grund (2006) が，悪いレーティングの比率が落札価格に対して有意な影響を与えることを示しており，出品者の評判に対する指標を変えた分析も今後の研究では必要となるだろう．

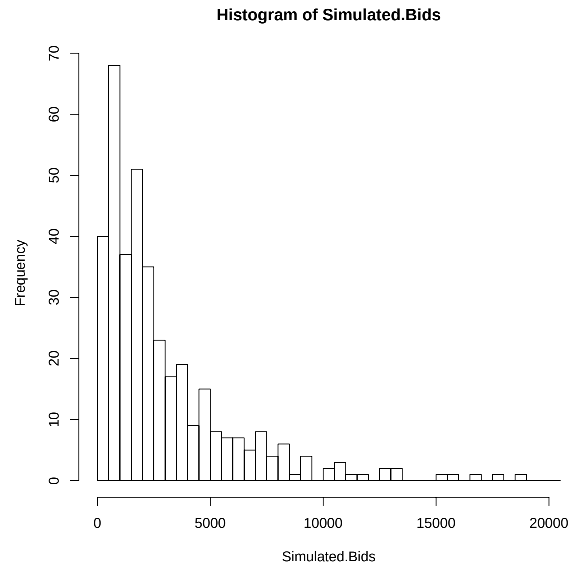

図 4: シミュレーションによる入札額分布．$N = 8$

5.2 出品者のリスクに対する態度

3 節で議論したように，入札者と出品者の財に対する評価を同一と仮定した場合には，実際の留保価格の平均は理論から推定される留保価格よりも低くなっていることが示された．その原因として出品者がリスク回避的である可能性を指摘したが，この仮説を検討するためには落札可能性に影響を与えそうな他のパラメータ，例えばオークションの持続時間なども含めたモデル化が必要となる．

5.3 潜在入札者数

本稿では最後に，推定したパラメータを用いたシミュレーションによる潜在的な入札者数の推定を行った．今回のデータにその推定数を超える入札数が含まれていることから，本稿において仮定したように潜在入札者数を一定とするのではなく，潜在入札者数そのものが確率変数であるようなモデルを構築する必要がある．また，シミュレーションにおける誤差の評価も重要な課題である．Laffont, Ossard and Vuong (1995) に示されているように，シミュレーションによる推定ではシミュレーションで用いた乱数の性質が推定量に影響を与えることになる．したがってここで用いた推定量 $\bar{n}_N$ についてもその性質の研究は重要である．

A 補論

この補論では Paarsch (1997) および Paarsch et al. (2006) を参考に，構造型モデルによる第二価格オークションのパラメータ推定の概説を行う．

N を潜在的な入札者の人数とする．各入札者 i の財に対する評価額 V_i は確率変数であるとし，独立で同一な分布 $F : \mathbb{R}_+ \times \boldsymbol{\theta} \mapsto \mathbb{R}_+$ にしたがうものとする．ここで $\boldsymbol{\theta}$ は確率分布に影響を与えるパラメータであり，推定されるべき変数である．出品者が設定する留保価格ないしは開始価格を r とする．本論でも述べたように，第二価格オークションにおいては自分の評価額を入札額とする

ことが支配戦略となっているため，留保価格を考慮に入れたときの各入札者の均衡戦略 b は以下で与えられる．

$$b(v) = \begin{cases} v & \text{評価額が留保価格以上の場合} \\ 0 & \text{評価額が留保価格より小さい場合} \end{cases}$$

上記の均衡戦略からわかるように，自分の評価額が r よりも小さい場合には入札を行わないため，潜在的な入札者が N 人に対して，実際に入札を行う人数 n はより少なくなる．このとき実際に行われた入札を $(b_{(1)}, \ldots, b_{(n)})$ とする．ここで，$b_{(1)}, \ldots, b_{(n)}$ は入札金額の高いものから順に並び替えて番号をつけ直したものである．観測された入札金額 $(b_{(1)}, \ldots, b_{(n)})$ に対して，その入札金額に対応する入札者の評価額を $(v_{(1)}, \ldots, v_{(n)})$ とすると，その同時密度は入札しなかった潜在的な入札者が $N-n$ 人いたことを考慮して

$$\binom{N}{n} F(r, \boldsymbol{\theta})^{N-n} \cdot n! \prod_{i=1}^{n} f(v_{(i)}, \boldsymbol{\theta}), \tag{A.1}$$

で与えられる．

(A.1) 式を推定するためには潜在的な入札者の人数 N を知らなければならないが，これは通常観測が困難である．ネットオークションのデータにおいてもそれを知ることは容易ではない．そこで，潜在的な入札者数に依存しない推定モデルを考える．

(A.1) 式を N 人中 n 人が実際に入札を行い，しかもそのときの評価額の順位統計量が $(v_{(1)}, v_{(2)}, \ldots, v_{(n)})$ であるときの同時密度 $g_{\boldsymbol{v},N}(v_{(1)}, v_2, \ldots, v_n, n, \boldsymbol{\theta})$ と考える．この密度関数を N 人中 n 人が実際に入札する確率 $g_N(n)$ と n 人が実際に入札したという条件の下での $(v_{(1)}, v_{(2)}, \ldots, v_{(n)})$ の密度関数 $g(v_{(1)}, v_{(2)}, \ldots, v_{(n)} \mid n)$ の積に分解する．すなわち，

$$\begin{aligned} &g(v_{(1)}, v_{(2)}, \ldots, v_{(n)}, \boldsymbol{\theta} \mid n) \cdot g_N(n, \boldsymbol{\theta}) = \\ &\qquad n! \prod_{i=1}^{n} \frac{f(v_{(i)}, \boldsymbol{\theta})}{1 - F(r, \boldsymbol{\theta})} \binom{N}{n} F(r, \boldsymbol{\theta})^{N-n} (1 - F(r, \boldsymbol{\theta}))^{n} \end{aligned} \tag{A.2}$$

ここで

$$g(v_{(1)}, v_{(2)}, \ldots, v_{(n)}, \boldsymbol{\theta} \mid n) = n! \prod_{i=1}^{n} \frac{f(v_{(i)}, \boldsymbol{\theta})}{1 - F(r, \boldsymbol{\theta})}, \tag{A.3}$$

である．(A.3) を用いることで潜在的入札者数 N によらず分布の推定を行うことができる．そのために必要となる情報は各入札者の評価額 $v_{(i)}$ であるが，これは私的情報であり直接観測できない．しかし，先述したように均衡では各入札者は自分の評価額を入札していることから，$(b_{(2)}, \ldots, b_{(n)})$ は実は $(v_{(2)}, \ldots, v_{(n)})$ に等しいことを利用して推定を行う．例外として最も高い金額 $b_{(1)}$ を入札した入札者については，落札金額よりも高い金額を入札していた，あるいは入札しようとしていた可能性があるため，$b_{(1)}$ を $v_{(1)}$ として扱うわけにはいかない．この点に注意すると，観測された入札額 $(b_{(1)}, b_{(2)}, \ldots, b_{(n)})$ に対する条件付密度は

$$n! \left(\prod_{i=2}^{n} \frac{f(b_{(i)}, \boldsymbol{\theta})}{1 - F(r, \boldsymbol{\theta})} \right) \cdot \frac{1 - F(b_{(1)}, \boldsymbol{\theta})}{1 - F(r, \boldsymbol{\theta})} \tag{A.4}$$

となる．

(A.4) 式を推定するためにパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定を行うとすると，(A.4) の対数をとった対数尤度関数

$$\log(n!) + \sum_{i=2}^{n} \left(\log f(b_{(i)}, \boldsymbol{\theta}) - \log(1 - F(r, \boldsymbol{\theta}))\right) + \log(1 - F(b_{(1)}, \boldsymbol{\theta})) - \log(1 - F(r, \boldsymbol{\theta})), \quad \text{(A.5)}$$

を $\boldsymbol{\theta}$ について最大化することで，実際に入札した人数 n とその入札額 $(b_{(1)}, \ldots, b_{(n)})$ のデータから分布関数のパラメトリック推定が可能となる．

参考文献

Gürtler, O. and C. Grund (2006) "The Effect of Reputation on Selling Prices in Auctions," *GESY Discussion Paper* No. 114, Governance and the Efficiency of Economic Systems, May.

Laffont, J.J., H. Ossard, and Q. Vuong (1995) "Econometrics of First-Price Auctions," *Econometrica*, Vol. 63, No. 4, pp. 953–980.

Melnik, M.I. and J. Alm (2002) "Does a Sellers eCommerce Reputation Matter? Evidence from eBay Auctions," *Journal of Industrial Economics*, Vol. 50, No. 3, pp. 337–349.

Milgrom, P.R. (2004) *Putting Auction Theory to Work*: Cambridge University Press.

Paarsch, H.J. (1997) "Deriving an estimate of the optimal reserve price: An application to British Columbian timber sales," *Journal of Econometrics*, Vol. 78, No. 2, pp. 333–357.

Paarsch, H.J., H. Hong, and M.R. Haley (2006) *An introduction to the structural econometrics of auction data*: MIT Press.

Vuong, Q.H. (1989) "Likelihood Ratio Tests for Model Selection and Non-Nested Hypotheses," *Econometrica*, Vol. 57, No. 2, pp. 307–333.