# Erwartete Konfliktänderung für die Berechnung der ebenen konvexen Hülle – Mulmuleys Θ-Reihe

*Wolfgang Mulzer*

Sei $P$ eine ebene Punktmenge mit $n$ Punkten. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Gesamtkosten für die Aktualisierung der Konfliktinformationen während der inkrementellen Konstruktion von $\mathrm{CH}(P)$ asymptotisch gegeben sind durch

$$\Theta := \sum_{(p,q) \in P^2} |P \cap h^+_{\overrightarrow{pq}}| \cdot [\text{Die Kante } (p,q) \text{ wird im Laufe der inkrementellen Konstruktion erzeugt}].$$

Hierbei bezeichnet $h^+_{\overrightarrow{pq}}$ die offene Halbebene links von der gerichteten Geraden $\overrightarrow{pq}$, und $[X]$ ist die Iverson-Notation: $[X] = 1$, falls die Aussage $X$ erfüllt ist, und $[X] = 0$ sonst.

Die randomisiert inkrementelle Konstruktion von $\mathrm{CH}(P)$ wählt zunächst eine zufällige Permutation $\sigma$ von $P$ und fügt dann die Punkte gemäß der von $\sigma$ vorgegebenen Reihenfolge in die konvexe Hülle ein. Wir wollen nun die erwarteten Konfliktänderungskosten ausrechnen. Aufgrund der Linearität des Erwartungswerts gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\sigma[\Theta] &= \sum_{(p,q) \in P^2} |P \cap h^+_{\overrightarrow{pq}}| \cdot \Pr[\text{Die Kante } (p,q) \text{ wird im Laufe der inkrementellen Konstruktion erzeugt}] \\ &= \sum_{k=1}^{n-3} \sum_{(p,q) \in L_k} k \cdot \Pr[\text{Die Kante } (p,q) \text{ wird im Laufe der inkrementellen Konstruktion erzeugt}],\end{aligned}$$

wobei $L_k$ die Menge der $k$-Kanten für $P$ ist (siehe die Definition im Beweis für den Satz von Clarkson). Diese Summe heißt Mulmuleys Θ-Reihe. Da eine $k$-Kante $(p,q)$ genau dann erzeugt wird, wenn in der zufälligen Permutation die beiden Punkte $p$ und $q$ vor den $k$ Punkten in $P \cap h^+_{\overrightarrow{pq}}$ erscheinen, gilt

$$\Pr[\text{Die Kante } (p,q) \text{ wird im Laufe der inkrementellen Konstruktion erzeugt}] = \frac{2!k!}{(k+2)!} = \frac{2}{(k+1)(k+2)}.$$

Folglich

$$\mathbf{E}_\sigma[\Theta] = \sum_{k=1}^{n-3} \sum_{(p,q) \in L_k} \frac{2k}{(k+1)(k+2)} \leq \sum_{k=1}^{n-3} \frac{2|L_k|}{k}.$$

Nun haben wir das Problem, dass wir $|L_k|$ nicht abschätzen können. Hier kommen uns nun der Satz von Clarkson und ein hübscher Trick zur Hilfe. Es gilt nämlich $|L_k| = |L_{\leq k}| - |L_{\leq (k-1)}|$, wobei $L_{\leq k}$ die Menge aller $\ell$-Kanten von $P$ für $0 \leq \ell \leq k$ bezeichnet. Mit Abelscher partieller Summation folgt nun:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\sigma[\Theta] &\leq \sum_{k=1}^{n-3} \frac{2}{k}\Big(|L_{\leq k}| - |L_{\leq (k-1)}|\Big) \\ &= \frac{2}{n-2}|L_{\leq (n-3)}| - 2|L_{\leq 0}| + \sum_{k=1}^{n-3} |L_{\leq k}|\Big(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}\Big) \leq O(n) + \sum_{k=1}^{n-3} \frac{2|L_{\leq k}|}{k^2},\end{aligned}$$

denn $|L_{\leq(n-3)}| = O(n^2)$, $|L_{\leq 0}| = O(n)$ und

$$\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} = \frac{2}{k(k+1)} \leq \frac{2}{k^2}.$$

Der Satz von Clarkson besagt, dass $|L_{\leq k}| = O(nk)$, also

$$\mathbf{E}_\sigma[\Theta] = O\Big(\sum_{k=1}^{n-3} \frac{nk}{k^2}\Big) = O\Big(n \cdot \sum_{k=1}^{n-3} \frac{1}{k}\Big) = O(n \log n).$$

Der erwartete Aufwand für die Konfliktänderung, und folglich die erwartete Gesamtlaufzeit für die randomisiert inkrementelle Konstruktion der ebenen konvexen Hülle, ist $O(n \log n)$.