Das Master Theorem

Wolfgang Mulzer

Das Master Theorem bietet eine allgemeine Methode, um eine große Klasse von Rekursionsgleichungen zu lösen.

Satz 1 (Master Theorem)**.** *Seien $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion, und sei $T(n)$ durch die folgende Rekursion definiert:*

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

wobei wir n/b wahlweise als $\lfloor n/b \rfloor$ oder $\lceil n/b \rceil$ interpretieren können. Dann gilt:

1. *Wenn eine Konstante $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ ist, dann ist $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.*
2. *Wenn $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ ist, dann ist $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.*
3. *Wenn eine Konstante $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ ist,* und *wenn eine Konstante $c < 1$ existiert, so dass $af(n/b) \leq cf(n)$ ist, dann ist $T(n) = \Theta(f(n))$.*

Im folgenden betrachten wir einige Beispiele.

Karatsuba-Multiplikation. Die Karatsuba-Multiplikation hat die Rekursionsgleichung

$$T(n) = 3T(n/2) + \alpha n,$$

für eine Konstante $\alpha > 0$. Also ist $a = 3$, $b = 2$, $f(n) = \alpha n$. Es ist $\log_b a = \log_2 3 \approx 1.58496$, also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $f(n) = \alpha n = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ (z.B., $\varepsilon = 0.5$). Daher ist Fall 1 des Master Theorems anwendbar, und es ist $T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$.

Naive rekursive Multiplikation. Bei unserem ersten Versuch zur rekursiven Multiplikation erhielten wir die Gleichung

$$T(n) = 4T(n/2) + \alpha n,$$

für eine Konstante $\alpha > 0$. Somit ist $a = 4$, $b = 2$, $f(n) = \alpha n$. Es ist $\log_b a = \log_2 4 = 2$, also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $f(n) = \alpha n = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ (z.B., $\varepsilon = 0.5$). Wieder ist Fall 1 des Master Theorems anwendbar, und es ist $T(n) = \Theta(n^2)$.

Merge Sort. Bekanntlich gilt bei Merge Sort

$$T(n) = 2T(n/2) + \alpha n,$$

für eine Konstante $\alpha > 0$. Also, $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = \alpha n$. Es ist $\log_b a = \log_2 2 = 1$. Damit ist $f(n) = \alpha n = \Theta(n^{\log_b a})$. Es gilt also Fall 2 des Master Theorems, und $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Binäre Suche. Für binäre Suche haben wir die Rekursion

$$T(n) = T(n/2) + \alpha,$$

für eine Konstante $\alpha > 0$. Also, $a = 1$, $b = 2$, $f(n) = \alpha$. Es ist $\log_b a = \log_2 1 = 0$. Damit ist $f(n) = \alpha = \Theta(n^{\log_b a})$. Nach Fall 2 des Master Theorems ist $T(n) = \Theta(\log n)$.

Generisches Select. In der ersten Vorlesung hatten wir die folgende Rekursion für den generischen Select-Algorithmus analysiert:

$$T(n) = T(3n/4) + \alpha n,$$

für eine Konstante $\alpha > 0$. Also, $a = 1$, $b = 4/3$, $f(n) = \alpha n$. Es ist $\log_b a = \log_{\frac{4}{3}} 1 = 0$. Damit existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(n) = \alpha n = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ (z.B. $\varepsilon = 0.4$). Außerdem gilt $af(n/b) = 1 \cdot \alpha \cdot 3n/4 = (3/4)f(n)$. Also existiert ein $c > 0$ mit $af(n/b) \leq cf(n)$ (z.B. $c = 3/4$). Somit liefert Fall 3, dass $T(n) = \Theta(n)$.

Deterministisches Select. Die Rekursion für den BFRPT-Algorithmus war

$$T(n) = T(n/5) + T(3n/4) + \alpha n,$$

für eine Konstante $\alpha > 0$. Hier ist das Master Theorem nicht anwendbar, da die Rekursion nicht dem vorgegebenen Schema folgt. Man muss sich mit einer anderen Methode behelfen. (Es existiert aber eine allgemeinere Formulierung des Master Theorems, welche auch diese Gleichung abdeckt.)

Noch eine Ausnahme. Betrachte die folgende Gleichung:

$$T(n) = 4T(n/4) + n \log^2 n.$$

Diese Gleichung folgt dem Schema des Master Theorems, und es ist $a = 4$, $b = 4$ und $f(n) = n \log^2 n$. Also ist $\log_b a = \log_4 4 = 1$. Trotzdem ist das Master Theorem hier nicht anwendbar, denn es existiert keine Konstante $\varepsilon > 0$, so dass $f(n) = n \log^2 n = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ ist. Es existiert auch keine Konstante $\varepsilon > 0$ mit $f(n) = n \log^2 n = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, und es gilt auch nicht $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$. Wieder muss man sich mit anderen Methoden behelfen.