Die Myhill-Nerode Relation

Wolfgang Mulzer

Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Die *Myhill-Nerode Relation* $\sim_L$ für L ist eine Relation auf Σ^*. Seien $x, y \in \Sigma^*$. Dann ist

$$x \sim_L y \text{ definitionsgemäß genau dann, wenn für alle } z \in \Sigma^* \text{ gilt: } xz \in L \Leftrightarrow yz \in L.$$

Man sieht leicht, dass $\sim_L$ eine Äquivalenzrelation ist.

Sei nun $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir bestimmen die Äquivalenzklassen von $\sim_L$.

- $[\varepsilon]_L = \{\varepsilon\}$. Es gilt für $z \in \Sigma^*$: $\varepsilon z \in L \Leftrightarrow z \in L \Leftrightarrow z = 0^n 1^n$, für ein $n \in \mathbb{N}$. Wie man leicht nachprüft, ist das leere Wort ε das einzige Wort mit dieser Eigenschaft.
- $[01]_L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Es gilt für $z \in \Sigma^*$: $01z \in L \Leftrightarrow z = \varepsilon$. Alle Wörter mit dieser Eigenschaft müssen in L liegen, und alle Wörter in L besitzen diese Eigenschaft. Damit ist $[01]_L = L$.
- $[1]_L = (\Sigma^* \setminus L(0^*1^*)) \cup \{0^m 1^n \mid m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}, m < n\}$. Es gilt für alle $z \in \Sigma^*$: $1z \notin L$. Die Wörter x mit dieser Eigenschaft lassen sich wie folgt charakterisieren: Fall 1: $x \in \Sigma^* \setminus L(0^*1^*)$, also enthält x den Teilstring 10. Dann ist $xz \notin L$, für alle $z \in \Sigma^*$, somit $x \in [1]_L$. Fall 2: $x \in L(0^*1^*)$, also hat hat x die Form $0^a 1^b$, mit $a, b \in \mathbb{N}_0$. Wenn $a < b$ ist, dann ist $xz \notin L$, für alle $z \in \Sigma^*$. Also ist dann $x \in [1]_L$. Wenn aber $a \geq b$ ist, kann man ein Wort an x anhängen, mit dem man nach L kommt: 01 für $a = b = 0$, ε für $a = b > 0$, und 1^{a-b} für $a > b$.
- Für $n \in \mathbb{N}$: $[0^n]_L = \{0^n\}$. Es gilt für $z \in \Sigma^*$: $0^n z \in L \Leftrightarrow z \in \{0^a 1^{n+a} \mid a \in \mathbb{N}_0\}$. Wie man leicht sieht, ist 0^n das einzige Wort mit dieser Eigenschaft.
- Für $n \in \mathbb{N}$: $[0^{n+1}1]_L = \{0^{n+m} 1^m \mid m \in \mathbb{N}\}$. Es gilt für $z \in \Sigma^*$: $0^{n+1}1z \in L \Leftrightarrow z = 1^n$. Wie man leicht sieht, haben diese Eigenschaft genau die Wörter der Form $0^a 1^b$, $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a - b = n$.

Wir überprüfen noch einmal, dass es sich wirklich um eine Partition handelt. Sei $x \in \{0, 1\}^*$. Falls x *nicht* die Form $0^a 1^b$, $a, b \in \mathbb{N}_0$, hat dann ist $x \in \Sigma^* \setminus L(0^*1^*)$, also ist x genau in $[1]_L$. Nehmen wir nun an, x habe die Form $0^a 1^b$, $a, b \in \mathbb{N}_0$. Falls $a = b = 0$ ist, so ist $x = \varepsilon$, and x ist genau in $[\varepsilon]_L$. Falls $a = b > 0$ ist, so ist x genau in $[01]_L$. Falls $a < b$ ist, so ist x genau in $[1]_L$. Falls $a > b = 0$ ist, so ist x genau in $[0^a]_L$. Falls $a > b > 0$ ist, so ist x genau in $[0^{a-b+1}1]_L$.