Autour des processus ARMA

1 Combinaisons

On considère deux filtres AR(1), de coefficients respectifs a_1 et a_2. Quel filtre obtient-on (avec quels coefficients) :

1. en cascadant ces deux filtres en série ?
2. en les mettant en parallèle ?

2 Équivalences

On considère un filtre AR(1), de coefficient a.

1. Rappeler l'expression de sa fonction de transfert en z $A(z)$ et en donner une représentation équivalente sous forme de filtre MA (quel ordre ? quels coefficients ?).
2. Exprimer de la même façon un filtre MA(1) sous une forme AR équivalente.

3 AR + bruit

On considère un bruit blanc à temps discret centré et normalisé, i.e., une suite de variables aléatoires $\{e[n], n \in \mathbb{Z}\}$ i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées) telles que $\mathbb{E}\{e[n]\} = 0$ et $\mathbb{E}\{e[n]e[m]\} = \delta[n-m]$, où $\delta[n]$ est le symbole de Kronecker (valant 1 si $n = 0$ et 0 sinon).

3.1 Situation nominale

On construit alors le processus AR(1) $\{x[n], n \in \mathbb{Z}\}$ défini par

$$x[n] = a\,x[n-1] + e[n].$$

1. Montrer que sa fonction de corrélation $r_x[k] = \mathbb{E}\{x[n]x[n \pm k]\}$ s'écrit :

$$r_x[k] = \frac{1}{1-a^2}\,a^{|k|}$$

2. En déduire la forme de sa densité spectrale de puissance.

3.2 Observation bruitée

On suppose alors qu'on ne connaît en fait le processus AR $x[n]$ qu'à travers une observation bruitée de la forme :

$$y[n] = x[n] + b[n],$$

avec $b[n]$ indépendant de $x[n]$ et tel que $\mathbb{E}\{b[n]\} = 0$ et $\mathbb{E}\{b[n]b[m]\} = \sigma^2\delta[n-m]$.

1. Calculer $r_y[k]$ et comparer à $r_x[k]$.
2. En déduire la densité spectrale de puissance de l'observation $y[n]$.
3. Peut-on estimer a en s'affranchissant du bruit d'observation $b[n]$? (si oui, comment ?)
4. Généraliser au cas où $x[n]$ serait AR(p) et $b[n]$ MA(q).