APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES DE L'INTERPOLATION LAGRANGIENNE

par

Tanguy Rivoal

1. Introduction

Le but principal de cet article est d'appliquer et de généraliser certaines idées contenues dans le remarquable « Mémoire sur les séries d'interpolation » de René Lagrange [**27**] afin d'obtenir de nouvelles preuves de l'irrationalité de $\log(2)$, $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. D'autres nombres pourraient également être abordés. Ces preuves sont très différentes de celles déjà présentes dans la littérature (voir [**14**]). Elles apportent, nous semble-t-il, un nouvel éclairage sur l'omniprésence des suites combinatoires d'Apéry [**3**] dans ce domaine de l'approximation diophantienne. En effet, de façon très naturelle, nous relions ces suites aux propriétés analytiques et arithmétiques de la fonction zêta d'Hurwitz $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n+z)^s$ ou de son analogue alternée $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/(n+z)^s$, i.e. aux lieux de leurs pôles et de certaines de leurs valeurs qui appartiennent à un même $\mathbb{Q}$–espace vectoriel de dimension finie. Par exemple, on montrera au paragraphe 3.3 que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$, on a la formule d'interpolation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z+n} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{z(z-1)\cdots(z-n+2)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}, \tag{1}$$

où la suite

$$\frac{A_{n+1}}{2n+1} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j}\binom{n+j}{j} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+j} \in \mathbb{Q}\log(2) + \mathbb{Q} \tag{2}$$

tend géométriquement vers 0 suffisamment vite pour impliquer l'irrationalité de $\log(2)$. On obtient au paragraphe 3.2 un développement adapté aux pôles et valeurs de la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n+z)^2$, ce qui nous permet de traiter le cas de $\zeta(3)$. Enfin, au paragraphe 4.1, une généralisation des séries étudiées par Lagrange nous permettra de développer la fonction $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z})$ sur une nouvelle base *ad hoc* de fractions rationnelles, puis de prouver l'irrationalité de $\zeta(2)$ (paragraphe 4.2).

L'interpolation par des fractions rationnelles (voir le paragraphe 3.1 pour les définitions), dont (1) est un exemple, tient compte de façon cruciale des pôles. Ceci la distingue nettement de l'interpolation polynomiale de Newton, qui donne par exemple l'identité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z+n} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \, \frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n!} \tag{3}$$

pour $\Re(z) > -1$, avec

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+j} \in \mathbb{Q}\log(2) + \mathbb{Q}.$$

Dans ce cas, la suite B_n tend vers 0 comme $1/n$ et cela ne suffit pas à montrer que $\log(2) \notin \mathbb{Q}$. En un certain sens, cette différence avec la suite A_n est due au fait que la série à droite de (3) « bute » sur le premier pôle $z = -1$ de la fonction à gauche, tout comme le rayon de convergence d'une série de Taylor en z_0 d'une fonction analytique F est donné par la distance entre z_0 et la singularité de F la plus proche de z_0.

Il n'est cependant pas inutile de rappeler ici que l'interpolation de Newton a eu de nombreuses et importantes applications en théorie des nombres. Par exemple, Pólya [**34**] a montré que les fonctions 2^z et $\varphi^z + \varphi^{-z}$ avec $\varphi = (\sqrt{5}+3)/2$ sont les plus petites fonctions entières transcendantes prenant des valeurs entières aux entiers positifs, respectivement aux entiers. La preuve utilise des développements en série de Newton aux entiers de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{Z}$. Des généralisations dans diverses directions du théorème de Pólya ont été obtenues par Baker [**6**], Gel'fond [**16**], Hardy [**22**], Selberg [**38**], Yoshino [**43**] et, beaucoup plus récemment, par Bundschuh et Zudilin [**13**], Welter seul [**42**] ou avec l'auteur [**36**], articles auxquels nous renvoyons pour plus de références.

Dans un registre différent et plus proche du thème de cet article, Gel'fond [**18**] est parvenu à montrer la transcendance de e^{π} au moyen d'une représentation de la fonction $e^{\pi z}$ en série d'interpolation de Newton aux entiers de Gauß ; à titre pédagogique, nous en esquissons la preuve au paragraphe 2. Rapidement, Kuzmin [**26**] et Siegel [**39**] ont adapté sa méthode pour obtenir, l'un, la transcendance de $2^{\sqrt{2}}$ et, l'autre, celles de l'une des deux périodes de certaines fonctions elliptiques. Toujours par des méthodes d'interpolation, Boehle [**11**] a démontré que pour tous algébriques α, β tels que $\alpha \neq 0, 1$ et β de degré $d \geq 2$, au moins un des nombres $\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}$ est transcendant, ce qui constituait un pas vers la solution du 7ème problème de Hilbert consistant à « *prouver la transcendance de α^{β} pour tous nombres algébriques α, β tels que $\alpha \neq 0, 1$ et $\beta \notin \mathbb{Q}$* ». Néanmoins, il est apparu clairement que la méthode des séries d'interpolation n'était pas assez puissante pour résoudre le problème de Hilbert, bien qu'elle le soit suffisamment pour permettre de (re)démontrer la transcendance de e^{α} pour tout α algébrique non nul (Siegel [**39**, p. 63]). La solution complète a été obtenue par Gel'fond [**19**] et Schneider [**37**] indépendamment, au moyen de fonctions auxiliaires inexplicites construites à l'aide du lemme de Siegel.

De ce fait, ultérieurement moins de résultats en théorie de l'irrationalité ou de la transcendance ont été démontrés par des méthodes explicitement basées sur les séries d'interpolation de type Newton ou autres. (Citons cependant le travail de Bundschuh [**12**] sur les

q-analogues de l'exponentielle.) Il apparaît ainsi que les séries d'interpolation de Lagrange n'ont jamais eu d'applications arithmétiques [(1)] jusqu'à présent. Nous espérons donc montrer que l'interpolation (au sens de ce texte) a encore un rôle important à jouer en théorie de l'irrationalité et qu'il peut être fructueux de continuer à chercher dans cette direction.

2. L'interpolation de Newton et le théorème de Gel'fond

Dans ce paragraphe, dont la lecture n'est pas indispensable, nous rappelons les grandes lignes de la preuve de Gel'fond de la transcendance de e^π, qui est un modèle du genre. On démontre facilement par récurrence sur $n \geq 0$ la formule d'Hermite (voir le paragraphe 4.1) :

$$\frac{1}{x-z} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_j)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{j+1})} + \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)}\frac{1}{x-z}, \quad (4)$$

qui a lieu pour tous nombres complexes $x, z, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $x \neq z$ et $x \neq \alpha_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ (un produit, respectivement une somme, vide vaut 1, respectivement 0, par convention). Donnons nous maintenant une fonction F holomorphe dans un ouvert simplement connexe Ω contenant les $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$. En multipliant (4) par $F(x)/(2i\pi)$ et en intégrant les deux membres le long d'une courbe $\mathscr{C}$ incluse dans Ω et contenant en son intérieur z et $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, la formule de Cauchy montre que, pour tout $z \in \Omega$, on a l'identité

$$F(z) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j \,(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_j) + R_n(z)$$

avec

$$A_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} \frac{F(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{j+1})}\,\mathrm{d}x \quad (5)$$

pour tout $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ et

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}} \frac{F(x)}{x-z}\,\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)}\,\mathrm{d}x.$$

On dit que F est développable en série de Newton aux points d'interpolation $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ dans un ouvert $U \subset \Omega$ si $R_n(z) \to 0$ quand $n \to +\infty$ pour tout $z \in U$. Certains des α_j peuvent être égaux, auquel cas il s'agit d'interpolation avec multiplicité (bornée ou non).

Nous allons maintenant mettre en pratique ces notions.

Théorème 1 (Gel'fond). — *Le nombre e^π est transcendant.*

Démonstration. — Gel'fond développe la fonction $\exp(\pi z)$ en série de Newton aux points d'interpolation $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ avec $\alpha_0 = 0$ donnés par les entiers de Gauß $\mathbb{Z}[i]$ ordonnés par module et argument croissants, sans multiplicité. En comptant le nombre de points du

(1) contrairement aux célèbres polynômes d'interpolation de Joseph-Louis Lagrange, qui ne sont en fait rien d'autre qu'une forme déguisée des polynômes d'interpolation de Newton (voir [**32**, p. 4])

plan à coordonnées entières dans un cercle de rayon donné, on obtient l'estimation $|\alpha_n| = \sqrt{n/\pi} + o(\sqrt{n})$, qui assure que l'on a l'identité

$$e^{\pi z} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \, z(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{n-1}) \tag{6}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. En évaluant (5) par la formule des résidus, on a

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{\pi\alpha_k}}{\prod_{\substack{0\le j\le n \\ j\neq k}}(\alpha_k - \alpha_j)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{\pi\alpha_k}}{\omega_{n,k}} = P_n(e^{\pi}),$$

où $P_n(X) \in \mathbb{Q}(i)[X, 1/X]$ est de degré $\sqrt{n/\pi} + o(\sqrt{n})$ en X et $1/X$. La transcendance de e^{π} s'obtient en quatre étapes :

1) Montrer que $P_n(e^{\pi})$ n'est pas nul pour une infinité d'entiers n. Quitte à extraire une sous-suite, on peut dès lors supposer qu'aucun n'est nul.

2) Trouver une bonne majoration du dénominateur commun $\Omega_n \in \mathbb{Z}[i]$ aux $\omega_{n,k}$ pour $k = 0, \ldots, n$.

3) Borner la hauteur H_n du polynôme de Laurent $\Omega_n P_n(X) \in \mathbb{Z}[i][X, 1/X]$.

4) Montrer que la suite $\Omega_n P_n(e^{\pi}) \in \mathbb{Z}[i][e^{\pi}, e^{-\pi}]$ tend suffisamment vite vers 0 pour que l'on puisse appliquer le critère de transcendance suivant : « Soit ϑ un nombre complexe ; on suppose qu'il existe une suite de polynômes $Q_n(X) \in \mathbb{Z}[i][X, 1/X]$ et une suite de réels $\lambda_n \to +\infty$ tels que l'on ait $0 < |Q_n(\vartheta)| \le \exp(-\lambda_n)$ et $\deg(Q_n) + \log H(Q_n) = o(\lambda_n)$. Alors ϑ est transcendant sur $\mathbb{Q}$ ».

L'étape 1 découle de (6) : si $A_n = 0$ pour tout n suffisamment grand, la fonction $\exp(\pi z)$ serait un polynôme, ce qui n'est évidemment pas le cas. L'étape 2 résulte d'un autre théorème important de Gel'fond [**17**] : on a $\Omega_n \le \exp\left(\frac{1}{2}\, n\log(n) + 163n + o(n)\right)$. Par ailleurs,

$$\Omega_n P_n(e^{\pi}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Omega_n}{\omega_{n,k}}\, e^{\pi\alpha_k} = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}\, e^{\pi\alpha_k} = \sum_{k=0}^{n} \pm B_{n,k}\, e^{\pi\Re(\alpha_k)}$$

et l'étape 3 consiste à majorer les entiers de Gauß $B_{n,k}$. C'est une conséquence d'une estimation due à Fukasawa [**15**] : on a $\omega_{n,k} = \exp\left(\frac{1}{2}n\log(n) + \beta_k n + o(n)\right)$ avec $\beta_k \ge -3\pi$, de telle sorte que $B_{n,k} \le \exp((163+3\pi)n + o(n))$ et donc $H(\Omega_n P_n) \le \exp(173n + o(n))$. Finalement, il ne reste qu'à franchir l'étape 4, ce que l'on fait ainsi. En majorant l'intégrale complexe pour A_n en prenant comme contour le cercle de centre 0 et de rayon n, on obtient $|A_n| \le \exp\left(-n\log(n) + \pi n + \mathcal{O}(\sqrt{n})\right)$ et donc $|\Omega_n P_n(e^{\pi})| \le \exp\left(-\frac{1}{2}\, n\log(n) + \mathcal{O}(n)\right)$. Puisque $P_n(e^{\pi}) \neq 0$, on peut appliquer le critère de transcendance avec $Q_n = \Omega_n P_n$ et $\lambda_n = \frac{1}{2}n\log(n) + \mathcal{O}(n)$, puisque $\deg(Q_n) + \log H(Q_n) \ll n$. □

Outre son élégance, un des intérêts de cette démonstration réside dans la facilité avec laquelle on peut montrer le *lemme de zéros* (qui est une des étapes inhérentes à toute preuve de transcendance, souvent la plus difficile), c'est-à-dire ici le fait que $P_n(e^{\pi}) \neq 0$ pour une infinité de n (étape 1). Le développement en série permet d'éviter le recours à la méthode du col (toujours délicate à mettre en œuvre) pour estimer A_n sous forme intégrale : on peut en effet bien souvent démontrer la convergence de la série de Newton par simple majoration de l'intégrale pour $R_n(z)$.

3. L'interpolation de Lagrange et le théorème d'Apéry

Dans ce paragraphe, on définit l'interpolation de Lagrange et on montre ensuite en détail comment elle permet de montrer l'irrationalité de $\zeta(3)$ et $\log(2)$ dans l'esprit du théorème de Gel'fond. Apéry a donné dans [**4**] une preuve plus détaillée de l'irrationalité de $\zeta(3)$ que celle à peine esquissée dans [**3**] : il définit et utilise une notion d'interpolation de fractions continues qui n'a aucun rapport avec celle de Lagrange (à part donner les mêmes formules à la fin). Voir aussi [**8**] pour d'autres applications de la méthode d'Apéry.

3.1. Les séries d'interpolation de Lagrange. — R. Lagrange a introduit dans [**27**] des séries d'interpolation de la forme

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_j)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_j)}, \tag{7}$$

où les α_j, β_j et A_j sont des nombres complexes. Un produit vide vaut 1 par convention. Ces séries semblent bien adaptées pour représenter des fonctions ayant des pôles en les β_j et prenant des « valeurs spéciales » en les α_j.

Son étude a été facilitée par l'identité (8) ci-dessous, qui lui est due et qui joue dans sa théorie un rôle similaire à celle d'Hermite (4). Voir le paragraphe 4.1 pour la démonstration de (4) et (8).

Théorème 2 (Lagrange). — *Pour tout $n \geq 1$, posons $\gamma_n = \alpha_{n+1} - \beta_n$ et convenons que $\gamma_n(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_{n-1}) = 1$ pour $n = 0$ et $(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_{n-1}) = 1$ pour $n = 1$. On a alors pour tout $n \geq 0$:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-z} = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \frac{(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_{j-1})}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{j+1})} \frac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_j)}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_j)} \\ + \frac{(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_n)}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{n+1})} \frac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{n+1})}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_n)} \frac{1}{x-z},\end{aligned} \tag{8}$$

valable pour tous complexes x, z, α_j, β_j tels que $x \neq z$, $x \neq \alpha_j$ et $z \neq \beta_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, n+1\}$.

Par la formule de Cauchy, il en découle que pour toute fonction F holomorphe dans un ouvert Ω simplement connexe contenant $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$, on a

$$F(z) = \sum_{j=0}^{n} A_j \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_j)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_j)} + R_n(z) \tag{9}$$

pour tout z différent de β_j, où, en désignant par $\mathscr{C}$ une courbe incluse dans Ω et contenant en son intérieur z et $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$, on a

$$A_j = \frac{\gamma_j}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}} F(x) \frac{(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_{j-1})}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{j+1})} \,\mathrm{d}x \tag{10}$$

pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$ et

$$R_n(z) = \frac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{n+1})}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_n)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}} \frac{F(x)}{x-z} \frac{(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_n)}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{n+1})} \,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Un certain nombre de questions se posent ensuite naturellement :

– À quelle(s) condition(s) sur les α_j et β_j une somme de la forme (7) converge-t-elle (absolument) ?

– Quelles propriétés analytiques possèdent la série alors obtenue ?

– À quelle(s) condition(s) une fonction holomorphe ou méromorphe dans un certain domaine de $\mathbb{C}$ est-elle représentable par une série de Lagrange, c'est-à-dire quand est-ce que $R_n(z) \to 0$ dans (9) ?

– En fixant les α_j et β_j, un tel développement est-il unique ?

Lagrange répond de façon plus ou moins complète à ces questions (la réponse à la dernière est non : il existe des *développements de zéro* non triviaux). Relativement peu d'auteurs ont repris par la suite ces questions, la plupart se contentant de donner des conditions fines de convergence (voir [**28, 29, 30, 33, 41**]). Citons un des résultats importants de Lagrange [**27**, p. 76, Théorème III], qui concerne le cas où $\alpha_j = \alpha + j$ et $\beta_j = -\alpha - j$ sont des suites arithmétiques.

Théorème 3 **(**Lagrange). — *Une fonction $F(z)$, holomorphe dans le demi-plan $\Re(z) > h$ et vérifiant, dans ce demi-plan, une inégalité*

$$\left|F(h + re^{i\vartheta})\right| < (1+r)^{k+\varepsilon(r)}$$

où $\varepsilon(r) \ll 1/r$, admet un développement

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{(z-\alpha-1)(z-\alpha-2)\cdots(z-\alpha-n)}{(z+\alpha+1)(z+\alpha+2)\cdots(z+\alpha+n)}$$

qui converge (au moins) dans un demi-plan $\Re(z) > u$ où $u \le \max(h, k/2, k-1/2)$. Les A_n sont donnés par (10).

Bateman [**7**] note que, lorsqu'il s'applique, ce théorème donne, après quelques transformations simples, le développement

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) L_n[f] \, \frac{z(z-1)\cdots(z-n+2)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} \tag{12}$$

où $L_{n+1}[f] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{n+j}{n} f(j)$. La même identité est donnée par Hille dans [**23**, p. 101, (4.8)]. Dans [**24**], ce dernier établit une réciproque au théorème de Lagrange et fait également le lien avec la seconde solution donnée par Hausdorff au problème des moments sur $[0, 1]$.

3.2. Le théorème d'Apéry. — À une exception près (i.e. la preuve donnée par Beukers dans [**10**]), les différentes preuves connues du théorème d'Apéry et de ses généralisations (voir [**14**]) utilisent toutes certaines formes linéaires polynomiales en les fonctions polylogarithmes (ou fonctions associées) $\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^s$ (où $|z| \leq 1$, $s \geq 1$ et $(s,z) \neq (1,1)$) que l'on spécialise en $z = \pm 1$. Les polylogarithmes admettent un prolongement analytique à $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$ et on pourrait imaginer les développer en série de Newton dans $\Re(z) < 1$ par exemple. La principale difficulté est de trouver des points d'interpolation « intéressants », c'est-à-dire tels que les coefficients de la série fassent intervenir peu de nombres transcendants (ou supposés tels), comme dans le cas de la série de Gel'fond dont les coefficients sont des polynômes en e^π à coefficients algébriques.

Une autre fonction permet d'attraper les valeurs de la fonction zêta de Riemann et semble plus appropriée pour être développée en série d'interpolation : il s'agit de la fonction zêta d'Hurwitz

$$\zeta(s,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+z)^s}$$

où $s \geq 2$ est entier et $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\ldots\}$. Pour tout entier $a \geq 0$, on a $\frac{\partial^a \zeta}{\partial z^a}(s,z) = (-1)^a (s)_a \zeta(s+a,z)$ et en particulier lorsque $z = n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\partial^a \zeta}{\partial z^a}(s,n) = (-1)^a (s)_a \Big(\zeta(s+a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{s+a}} \Big) \in \mathbb{Q}\zeta(s+a) + \mathbb{Q}.$$

(Par définition, $(x)_k = x(x+1)\cdots(x+k-1)$.) La fonction zêta d'Hurwitz *alternée* $\widetilde{\zeta}(s,z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+z)^{-s}$ avec $s \geq 1$ entier et $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\ldots\}$ vérifie une propriété similaire. La fonction $\zeta(s,z)$ n'est pas définie pour $s = 1$ car la série d'Hurwitz diverge. Cependant la fonction

$$\gamma + \frac{1}{z} + \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+z} \right)$$

est analytique dans $\mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\ldots\}$ et sa dérivée est $\zeta(2,z)$: on la note (abusivement) $\zeta(1,z)$. Elle vérifie $\zeta(1,n) = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ pour tout entier $n \geq 0$, ce qui nous servira dans la suite.

Les propriétés arithmétiques de $\zeta(s,z)$ et $\widetilde{\zeta}(s,z)$ suggèrent de les développer (à s fixé) en série de Newton aux points d'interpolation $0, 1, 2$, etc, avec une multiplicité bornée par un entier M donné à l'avance : la formule (5) montre alors que les coefficients de la série sont des formes linéaires à coefficients rationnels en $\zeta(s+1), \zeta(s+2), \ldots, \zeta(s+M)$. Aucun choix de polynômes ne se détache naturellement pour obtenir un résultat diophantien intéressant. En un certain sens, les coefficients contiennent trop de valeurs de zêta et ne tendent pas assez vite vers 0 pour impliquer l'irrationalité d'un seul de ces nombres.

La remarque cruciale est alors la suivante : les fonctions $\zeta(s,z)$ et $\widetilde{\zeta}(s,z)$ ayant des pôles d'ordre s à tous les entiers négatifs, il peut être bénéfique de les développer en séries de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{z(z-1)\cdots(z-n+2)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} \right)^s, \tag{13}$$

en espérant que la présence des pôles fasse converger (13) rapidement vers $\zeta(s,z)$, c'est-à-dire que les coefficients A_n tendent vite vers 0.

Remarquons que (13) n'est pas exactement une série de Lagrange lorsque $s \geq 2$ et nous allons maintenant en étudier une variation réellement lagrangienne dans le cas $s = 2$. Le cas $s = 1$ sera étudié au paragraphe 3.3.

Théorème 4. — *Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\ldots\}$, on a*

$$\zeta(2,z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \frac{(z-n+1)_n^2}{(z+1)_n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \frac{(z-n+1)_n^2}{(z+1)_n^2} \frac{z-n}{z+n+1}, \tag{14}$$

où $A_0 = \zeta(2)$, pour tout entier $n \geq 0$,

$$A_{2n+1} = \frac{2n+1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{(x+1)_n^2}{(x-n)_{n+1}^2} \zeta(2,x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}$$

et

$$A_{2n+2} = \frac{2n+2}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{(x+1)_n^2}{(x-n)_{n+1}^2} \frac{x+n+1}{x-n-1} \zeta(2,x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}.$$

La courbe $\mathscr{C}_n$ entoure les points $0, 1, \ldots, n$ mais aucun des pôles de $\zeta(2,z)$.

Démonstration. — On applique les formules de Lagrange aux deux suites $(\alpha_j)_{j\geq 1}$ et $(\beta_j)_{j\geq 1}$ définies par $\alpha_{2n+1} = \alpha_{2n+2} = n$ et $\beta_{2n+1} = \beta_{2n+2} = -(n+1)$ pour tout $n \geq 0$.

– *Expression des coefficients A_n.*

Tout d'abord, on a

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{\zeta(2,x)}{x}\,\mathrm{d}x = \zeta(2,0) = \zeta(2).$$

Nous allons maintenant démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a $A_n \in \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}$. Il nous faut distinguer deux cas et nous débutons par le cas où n est impair. Posons pour simplifier

$$Q(x) = \frac{(x+1)_n^2}{(x-n)_{n+1}^2}.$$

On a alors la décomposition en éléments simples

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_{j,n}}{(x-j)^2} + \sum_{j=0}^{n} \frac{b_{j,n}}{x-j}$$

avec

$$a_{j,n} = \big(Q(x)(x-j)^2\big)_{|x=j} = \binom{n}{j}^2 \binom{n+j}{j}^2,$$

$$b_{j,n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(Q(x)(x-j)^2\big)_{|x=j} = a_{j,n}\Bigg(\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+j} + \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{2}{k-j}\Bigg),$$

formules que l'on obtient par un calcul direct.

Par ailleurs,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_n}\frac{\zeta(2,x)}{x-j}\,\mathrm{d}x=\zeta(2,j)=\zeta(2)-\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k^2},$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_n}\frac{\zeta(2,x)}{(x-j)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\partial\zeta}{\partial z}(2,j)=-2\zeta(3)+2\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k^3}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{A_{2n+1}}{2n+1}&=-2\zeta(3)\sum_{j=0}^{n}a_{j,n}+\zeta(2)\sum_{j=0}^{n}b_{j,n}+\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{2a_{j,n}}{k^3}-\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{b_{j,n}}{k^2}\\&=u_n\zeta(3)-v_n\in\mathbb{Q}\zeta(3)+\mathbb{Q},\end{aligned}$$

car $\sum_{j=0}^{n}b_{j,n}=0$, le degré de la fraction rationnelle $Q(x)$ étant ≤ -2.

Lorsque $n\geq 2$ est pair, on procède de la même manière : on a

$$\frac{(z+1)_{n-1}^2}{(z-n+1)_n^2}\frac{z+n}{z-n}=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{c_{j,n}}{(z-j)^2}+\sum_{j=0}^{n}\frac{d_{j,n}}{z-j}$$

avec, pour $j\leq n-1$,

$$\begin{aligned}c_{j,n}&=\binom{n}{j}^2\binom{n+j}{j}^2\frac{j-n}{j+n}=-\binom{n-1}{j}\binom{n}{j}\binom{n+j-1}{j}\binom{n+j}{j},\\d_{j,n}&=c_{j,n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{k+j}+\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1}\frac{2}{k-j}+\frac{1}{n+j}+\frac{1}{n-j}\right)\end{aligned}$$

et $d_{n,n}=\binom{2n}{n}^2/(2n)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{A_{2n}}{2n}&=-2\zeta(3)\sum_{j=0}^{n-1}c_{j,n}+\zeta(2)\sum_{j=0}^{n}d_{j,n}+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{j}\frac{c_{j,n}}{k^3}-\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{d_{j,n}}{k^2}\\&=\widetilde{u}_n\zeta(3)-\widetilde{v}_n\in\mathbb{Q}\zeta(3)+\mathbb{Q},\end{aligned}$$

puisque, pour la même raison que précédemment, on a $\sum_{j=0}^{n}d_{j,n}=0$.

– *Représentation intégrale de $R_n(z)$*

On suppose pour le moment que z est tel que $\Re(z)>0$. Nous allons montrer plus bas que le reste $R_n(z)$ tend vers 0 sous cette hypothèse et, pour cela, on en cherche une expression intégrale plus adaptée que (11). De nouveau, il faudrait distinguer les cas n pair et n impair : on se contente de le faire dans le cas pair, la démonstration étant similaire dans le cas impair. En vertu de (11), on a

$$R_{2n}(z)=\frac{(z-n+1)_n^2(z-n)}{(z+1)_n^2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}}\frac{\zeta(2,x)}{x-z}\frac{(x+1)_n^2}{(x-n+1)_n^2(x-n)}\,\mathrm{d}x$$

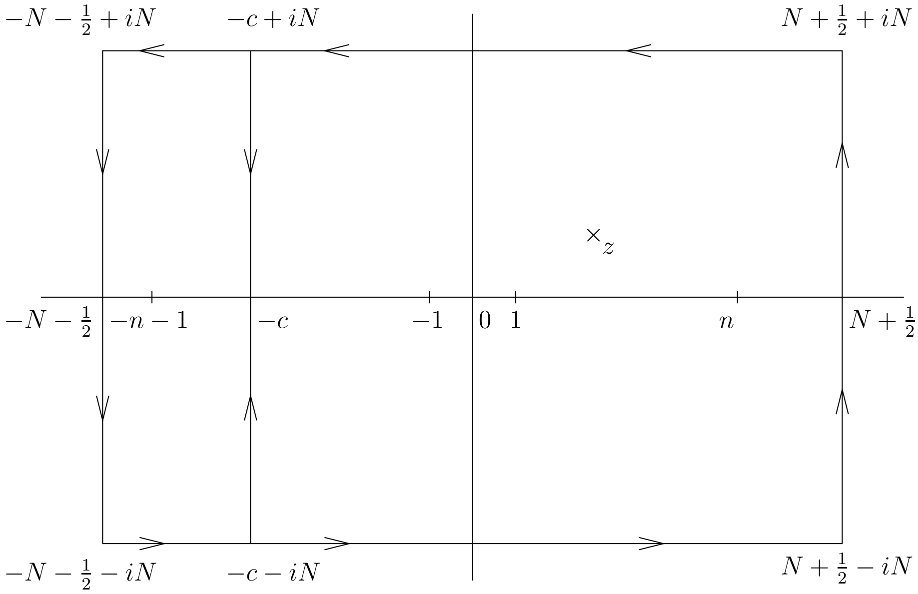

FIG. 1. Les contours d'intégration $\mathscr{R}_N$, $\widetilde{\mathscr{R}}_N$ et $\widehat{\mathscr{R}}_N$.

où la courbe directe $\mathscr{C}$ entoure z et les entiers $0, 1, \ldots, n$ mais *a priori* pas d'entiers négatifs. Or la fonction $\zeta(2,x)(x+1)_n^2$ n'a pas de pôle aux entiers $-1, -2, \ldots, -n$. En notant N un entier $\geq n+1$ et c un réel dans $]0, n+1[$, on peut donc choisir pour $\mathscr{C}$ le rectangle direct $\mathscr{R}_N$ de sommets $-c-iN, N+1/2-iN, N+1/2+iN, -c+iN$, qui englobe certains des points $-1, -2, \ldots, -n$. Nous allons maintenant obtenir une expression intégrale plus utile de $R_{2n}(z)$. Notons

$$\psi_n(x,z) = \frac{(z-n+1)_n^2(z-n)}{(z+1)_n^2} \frac{\zeta(2,x)}{x-z} \frac{(x+1)_n^2}{(x-n+1)_n^2(x-n)}$$

l'intégrande : ses pôles sont en $z, 0, 1, \ldots, n$ et $-(n+1), -(n+2), -(n+3)$, etc. Soient $\widehat{\mathscr{R}}_N$ le rectangle direct de sommets $-N-1/2-iN, N+1/2-iN, N+1/2+iN, -N-1/2+iN$ et $\widetilde{\mathscr{R}}_N$ le rectangle direct de sommets $-c-iN, -c+iN, -N-1/2+iN, -N-1/2-iN$. Sur les côtés de $\widehat{\mathscr{R}}_N$, on a $\psi_n(x,z) = \mathcal{O}(1/|x|^2)$ et [(2)] donc

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{\mathscr{R}}_N} \psi_n(x,z)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{15}$$

Or, pour tout N,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{R}_N} \psi_n(x,z)\,\mathrm{d}x = R_{2n}(z)$$

[(2)]Sur le côté $[-N-1/2+iN, -N-1/2-iN]$, la fonction $\zeta(2,x) = \mathcal{O}(1)$ car on a pris soin de choisir $N+1/2$ demi-entier afin de passer entre les pôles entiers de $\zeta(2,x)$. Sur les autres côtés, on a $\zeta(2,x) = \mathcal{O}(1/|x|)$.

et, comme la somme de $\widetilde{\mathscr{R}}_N$ et $\mathscr{R}_N$ est $\widehat{\mathscr{R}}_N$, on peut donc réécrire (15) comme

$$R_{2n}(z) = -\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{\mathscr{R}}_N} \psi_n(x,z)\,\mathrm{d}x.$$

Souvenons-nous maintenant de l'identité classique [**2**, p. 11, (1.2.9)]

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \zeta(2,x) + \zeta(2,-1-x),$$

valable pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Comme $\dfrac{\zeta(2,-1-x)(x+1)_n^2}{(x-z)(x-n+1)_n^2(x-n)}$ n'a aucun pôle dans $\widetilde{\mathscr{R}}_N$, on a donc aussi

$$R_{2n}(z) = -\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\widehat{\mathscr{R}}_N} \widetilde{\psi}_n(x,z)\,\mathrm{d}x. \tag{16}$$

où

$$\begin{aligned}\frac{(z+1)_n^2}{(z-n+1)_n^2(z-n)}\,\widetilde{\psi}_n(x,z) &= \frac{1}{x-z}\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}\frac{(x+1)_n^2}{(x-n+1)_n^2(x-n)}\\ &= \frac{x-n}{x-z}\frac{\Gamma(n+x+1)^2\Gamma(-x)^4}{\Gamma(n-x+1)^2}.\end{aligned}$$

(On a utilisé l'identité $(\alpha)_k = \Gamma(\alpha+k)/\Gamma(\alpha)$ et la formule de compléments $\Gamma(1+x)\Gamma(-x) = -\pi/\sin(\pi x)$.) Comme $\widetilde{\psi}_n(x,z) = \mathcal{O}(1/|x|^2)$ sur les côtés $[-c+iN, -N-\frac{1}{2}+iN]$, $[-N-\frac{1}{2}+iN, -N-\frac{1}{2}-iN]$, $[-N-\frac{1}{2}-iN, -c-iN]$, l'équation (16) nous donne finalement que

$$R_{2n}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} \widetilde{\psi}_n(x,z)\,\mathrm{d}x. \tag{17}$$

Cette dernière expression de $R_{2n}(z)$ va nous permettre d'en déduire le comportement asymptotique.

– *Convergence de $R_n(z)$ vers* 0.

On choisit $c = \kappa n$ avec κ n'importe quel réel dans l'intervalle $]0,1[$. Par le changement de variable $x = -tn$ dans (17), on obtient que, pour tout z tel que $\Re(z) > 0$, on a

$$R_{2n}(z) = \frac{(z-n+1)_n^2(z-n)}{(z+1)_n^2}\frac{n^2}{2\pi i}\int_{\kappa+i\infty}^{\kappa-i\infty} \frac{t+1}{tn+z}\frac{\Gamma(nt)^4\Gamma(n-nt+1)^2}{\Gamma(n+nt+1)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{18}$$

Pour obtenir une bonne majoration de l'intégrale dans (18), on utilise la formule de Stirling

$$\Gamma(z) = z^z e^{-z}\sqrt{2\pi/z}\big(1+\mathcal{O}(1/|z|)\big)$$

(valable dans tout secteur $|\arg(z)| \leq \alpha$ avec $\alpha < \pi$). et on obtient alors que

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\kappa+i\infty}^{\kappa-i\infty} \frac{t+1}{tn+z}\frac{\Gamma(nt)^4\Gamma(n-nt+1)^2}{\Gamma(n+nt+1)^2}\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\leq c_z(n) \min_{\kappa\in]0,1[} \max_{y\in\mathbb{R}} \left|\frac{t^{2t}(1-t)^{1-t}}{(1+t)^{1+t}}\right|^{2n} \\
&\leq c_z(n) \min_{\kappa\in]0,1[} \left(\frac{\kappa^{2\kappa}(1-\kappa)^{1-\kappa}}{(1+\kappa)^{1+\kappa}}\right)^{2n} = c_z(n)\big(\sqrt{2}-1\big)^{4n} \qquad (19)
\end{aligned}$$

avec $c_z(n)^{1/n} \to 1$. (Ici, $t = \kappa + iy$ et, à κ fixé, le maximum en y est atteint pour $y = 0$, valeur pour laquelle le minimum en κ est atteint en $1/\sqrt{2}$.) Par ailleurs, quand $n \to +\infty$, on a

$$\frac{n^2(z-n+1)_n^2(z-n)}{(z+1)_n^2} = \frac{n^2\Gamma(n-z+1)^2}{(z-n)\Gamma(n+z+1)^2} \sim \frac{1}{n^{4\Re(z)-1}}. \qquad (20)$$

On déduit donc de (19) et (20) que $R_{2n}(z) \to 0$ quand $n \to +\infty$. On procède de même pour montrer que $R_{2n+1}(z) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

– *Preuve de l'identité* (14).

Cette expression découle de la convergence des deux séries en jeu, dont les termes sont ceux d'indice pair et impair, respectivement, de la série

$$\zeta(2,z) - R_n(z) = \sum_{j=0}^{n} A_j \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_j)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_j)}$$

On se contente de le faire dans le cas impair. Exactement la même méthode que ci-dessus donne

$$A_{2n+1} = \frac{n(2n+1)}{2\pi i}\int_{\kappa+i\infty}^{\kappa-i\infty} \frac{\Gamma(nt)^4\Gamma(n-nt+1)^2}{\Gamma(n+nt+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

avec κ quelconque dans $]0,1[$. On a donc

$$\left|A_{2n+1}\frac{(z-n+1)_n^2}{(z+1)_n^2}\frac{z-n}{z+n+1}\right| \ll_z \frac{(\sqrt{2}-1)^{4n(1+o(1))}}{n^{4\Re(z)-2}} \ll_z (\sqrt{2}-1)^{4n(1+o(1))} \qquad (21)$$

pour tout z tel $\Re(z) > 0$. Le même type de majoration a lieu dans le cas pair.

Enfin, les estimations de convergence géométrique des termes des séries (i.e. l'équation (21) dans le cas impair) montrent que les deux séries à droite de (14) convergent en fait normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$ à distance strictement positive des entiers $-1, -2$, etc : elles définissent donc des fonctions analytiques dans $\mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\ldots\}$. Par prolongement analytique, l'identité (14) est donc valable sur $\mathbb{C}\setminus\{-1,-2,\ldots\}$. Ceci conclut la démonstration du théorème. □

Corollaire 1 (Apéry). — *Le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel.*

Démonstration. — Le théorème 4 nous fournit le développement de $\zeta(2,z)$ comme somme de deux séries de fractions rationnelles dont les pôles sont parmi les entiers $-1, -2$, etc. Si ce développement était fini, c'est-à-dire $A_n = 0$ pour $n \gg 0$, on en déduirait que $\zeta(2,z)$ est une fraction rationnelle, ce qui n'est évidemment pas le cas car cette fonction possède des pôles à tous les entiers négatifs. On en déduit donc que $A_n \neq 0$ pour une infinité d'entiers $n \geq 0$.

Posons $\mathrm{d}_n = \mathrm{ppcm}\{1, 2, \ldots, n\}$. De nouveau, il faut distinguer les cas n pair et n impair. Dans le cas impair, en vertu de la démonstration du théorème 4, on a

$$\frac{A_{2n+1}}{2n+1} = u_n\zeta(3) - v_n = \frac{n}{2\pi i}\int_{\kappa+i\infty}^{\kappa-i\infty} \frac{\Gamma(nt)^4\Gamma(n-nt+1)^2}{\Gamma(n+nt+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

avec $u_n = -2\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2\binom{n+j}{n}^2 \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{d}_n^3 v_n \in \mathbb{Z}$; la preuve de ce dernier point est basée sur le fait que, pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, on a

$$\mathrm{d}_n\binom{n+j}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+j} \in \mathbb{Z}. \tag{22}$$

Dans le cas pair, on a

$$\frac{A_{2n+2}}{2n+2} = \widetilde{u}_n\zeta(3) - \widetilde{v}_n = \frac{n}{2\pi i}\int_{\kappa+i\infty}^{\kappa-i\infty} \frac{\Gamma(nt)^4\Gamma(n-nt+1)^2}{\Gamma(n+nt+1)^2}\frac{tn-n-1}{tn+n+1}\,\mathrm{d}t$$

avec $\widetilde{u}_n = 2\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\binom{n}{j}\binom{n+j-1}{j}\binom{n+j}{j} \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{d}_n^3\widetilde{v}_n \in \mathbb{Z}$ (on utilise de nouveau (22)).

Il existe donc des entiers U_n et V_n tels que $\mathrm{d}_n^3 A_n = U_n\zeta(3) - V_n$: comme les $\mathrm{d}_n^3 A_n$ ne sont pas tous nuls, il nous suffit maintenant de montrer que cette suite tend vers 0. Au cours de la preuve du théorème 4, nous avons obtenu une majoration de l'expression intégrale pour A_{2n+1} : elle est du même type que pour A_{2n+2} et il en découle que

$$\limsup_{n\to+\infty} |\mathrm{d}_n^3 A_n|^{1/n} \leq e^3(\sqrt{2}-1)^4 < 1.$$

Le théorème d'Apéry est démontré. □

Remarques. — On a $u_n \neq 0$ et $\widetilde{u}_n \neq 0$ pour tout entier $n \geq 0$; l'irrationalité de $\zeta(3)$ implique donc que $A_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$.

La démonstration précédente du théorème d'Apéry est très proche de celles de Beukers [**9**] et Gutnik [**21**], reprises avec plus de détails par Nesterenko [**31**], car on retombe exactement sur les mêmes expressions combinatoires des suites originelles d'Apéry u_n et v_n que les leurs. Ce n'est pas toujours trivialement le cas, en particulier pour la suite v_n.

Cependant, cette preuve possède un intérêt propre. En effet, pour obtenir la non-nullité d'une infinité des A_n et une majoration de leur croissance, Nesterenko fait d'une pierre deux coups en appliquant la méthode du col pour obtenir le comportement asymptotique exact des A_n, ce qui est difficile et, en un sens, plus que strictement nécessaire. Nous obtenons ici ces deux propriétés des A_n séparément 1°) en majorant l'intégrale complexe pour $R_n(z)$ et en invoquant le nombre infini de pôles de $\zeta(2,z)$ (non-nullité d'une infinité des A_n) et 2°) en majorant l'intégrale complexe pour les A_n (borne pour leur décroissance). Cette remarque s'applique aux démonstrations de l'irrationalité de $\log(2)$ et $\zeta(2)$ obtenues ci-dessous.

3.3. L'irrationalité de $\log(2)$**.** — On peut adapter les calculs faits aux paragraphes précédents pour obtenir une nouvelle preuve de l'irrationalité de $\log(2)$. On utilise pour cela la fonction

$$\widetilde{\zeta}(1,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}.$$

Théorème 5. — *Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\ldots\}$, on a*

$$\widetilde{\zeta}(1,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(z-n+2)_{n-1}}{(z+1)_n} \tag{23}$$

où, pour tout entier $n \geq 0$,

$$A_{n+1} = \frac{2n+1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{(x+1)_n}{(x-n)_{n+1}} \widetilde{\zeta}(1,x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{Q}\log(2) + \mathbb{Q}. \tag{24}$$

La courbe $\mathscr{C}_n$ entoure les points $0, 1, \ldots, n$ mais aucun des pôles de $\widetilde{\zeta}(1,z)$.

Remarque. — Pour démontrer ce théorème, on pourrait utiliser le théorème 3 puisque l'on a $\widetilde{\zeta}(1,z) = \mathcal{O}(1/|z|)$ dans tout demi-plan $\Re(z) \geq \alpha > -1$. Pour obtenir l'égalité (23) pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\ldots\}$, on a néanmoins besoin d'estimations plus fines.

Esquisse de la démonstration. — La preuve est essentiellement la même que celle du théorème 4. On applique l'identité de Lagrange à la fonction $F(z) = z\widetilde{\zeta}(1,z)$ avec $\alpha_1 = 0$, $\alpha_j = j-2$ pour $j \geq 2$ et $\beta_j = -j$ pour $j \geq 1$. On vérifie que $A_0 = 0$ et comme $\gamma_{j+1} = 2j+1$ pour tout $j \geq 0$, la formule pour A_{j+1} découle de (10) ; le reste (11) est donné par

$$R_n(z) = \frac{z(z-n+1)_n}{(z+1)_n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{\widetilde{\zeta}(1,x)}{x-z} \frac{(x+1)_n}{(x-n+1)_n}\,\mathrm{d}x$$

et il s'agit de montrer qu'il tend vers 0 (ce que l'on prouve pour $\Re(z) > 0$).

– *Convergence de $R_n(z)$ vers* 0.

On utilise l'identité

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \widetilde{\zeta}(1,x) + \widetilde{\zeta}(1,-1-x), \tag{25}$$

valable pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ (voir [**2**, p. 11, (1.2.6)]) pour obtenir une expression plus « maniable » de $R_n(z)$, ainsi que de A_n au passage. Pour $\Re(z) > 0$, on obtient que

$$R_n(z) = \frac{z(-z)_n}{(z+1)_n} \frac{n}{2\pi i} \int_{\kappa+i\infty}^{\kappa-i\infty} \frac{\Gamma(n-nt+1)\Gamma(nt)}{(nt+z)\Gamma(n+nt)}\,\mathrm{d}t$$

et

$$A_{n+1} = (-1)^n \frac{n(2n+1)}{2\pi i} \int_{\kappa+i\infty}^{\kappa-i\infty} \frac{\Gamma(n-nt+1)\Gamma(nt)^2}{\Gamma(n+nt+1)}\,\mathrm{d}t, \tag{26}$$

valables pour tout κ de $]0,1[$. Tous calculs faits, on trouve que

$$|R_n(z)| \ll_z \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n(1+o(1))}}{n^{2\Re(z)}} \ll_z (\sqrt{2}-1)^{2n(1+o(1))},$$

ce qui prouve le convergence de la série d'interpolation de Lagrange vers $\widetilde{\zeta}(1,z)$ pour tout z tel que $\Re(z) > 0$.

– *Expression des coefficients A_n.*

Il reste à montrer que les coefficients A_n sont bien dans $\mathbb{Q}\log(2) + \mathbb{Q}$. On décompose tout d'abord la fraction rationnelle

$$\frac{(x+1)_n}{(x-n)_{n+1}} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{n+j}{j} \frac{1}{x-j}.$$

en éléments simples. En reportant dans (24), on obtient que, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1}}{2n+1} &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j}\binom{n+j}{j} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{\widetilde{\zeta}(1,x)}{x-j}\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j}\binom{n+j}{j} \widetilde{\zeta}(1,j) \\ &= (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n+j}{j} \log(2) + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n+j}{j} \sum_{k=1}^{j} \frac{(-1)^{n-k+1}}{k} \in \mathbb{Q}\log(2) + \mathbb{Q}, \end{aligned} \tag{27}$$

où l'on a utilisé le fait que $(-1)^j \widetilde{\zeta}(1,j) = -\log(2) - \sum_{k=1}^{j} (-1)^k/k$. □

Remarque. — La somme après la deuxième égalité de (27) est évidemment celle que l'on obtient en appliquant directement (12) lorsque $f(z) = \widetilde{\zeta}(1,z)$. On peut considérer que l'on a en fait donné la preuve de (12) puisqu'il suffit de remplacer $\widetilde{\zeta}(1,z)$ par $f(z)$ dans (27).

Corollaire 2. — *Le nombre* $\log(2)$ *est irrationnel.*

Démonstration. — On a construit ci-dessus une suite d'approximations rationnelles

$$\frac{A_{n+1}}{2n+1} = a_n \log(2) - b_n,$$

avec $a_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n+j}{j} \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{d}_n b_n \in \mathbb{Z}$. Comme $\widetilde{\zeta}(1,z)$ n'est pas une fraction rationnelle, l'identité (23) nous assure que $A_{n+1} \neq 0$ pour une infinité d'entier n et il ne nous reste donc plus quà vérifier que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}_n A_n = 0$. Or comme pour $\zeta(3)$, grâce à l'expression intégrale (26), on obtient que

$$|A_{n+1}| \ll \min_{\kappa\in]0,1[} \left(\frac{\kappa^{2\kappa}(1-\kappa)^{1-\kappa}}{(1+\kappa)^{1+\kappa}} \right)^{n(1+o(1))} = \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n(1+o(1))}.$$

Donc
$$\limsup_{n\to+\infty} |\mathrm{d}_n A_n|^{1/n} \le e\big(\sqrt{2}-1\big)^2 < 1$$
et log(2) est bien irrationnel. □

4. Quelle série d'interpolation pour $\zeta(2)$?

Il ne semble pas facile d'obtenir des approximations rationnelles permettant de prouver que $\zeta(2) \notin \mathbb{Q}$ au moyen des séries d'interpolation de Newton ou de Lagrange, c'est-à-dire des polynômes de degré strictement croissant ou bien des fractions rationnelles de degré nul. Dans ce paragraphe, nous montrons comment en mélangeant ces deux interpolations (polynomiale et rationnelle) on peut tout de même retrouver les formules d'Apéry pour $\zeta(2)$ au moyen de séries d'interpolation par des fractions rationnelles dont le degré est également strictement croissant.

4.1. Généralisations des identités d'Hermite et de Lagrange. — L'identité d'Hermite (4) est basée sur la relation triviale
$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{z-\alpha}{x-\alpha}\frac{1}{x-z}, \tag{28}$$
que nous appellerons $H(\alpha)$. Partant de $H(\alpha_1)$, on reporte le second membre de $H(\alpha_2)$ à la place du $\frac{1}{x-z}$ à droite de $H(\alpha_1)$, puis dans la nouvelle identité obtenue, c'est-à-dire
$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{z-\alpha_1}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} + \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}\frac{1}{x-z}, \tag{29}$$
on reporte le second membre de $H(\alpha_3)$ à la place du $\frac{1}{x-z}$ à droite de (29), puis $H(\alpha_4)$, etc.

L'identité de Lagrange (8) est, quant à elle, basée sur une autre relation triviale
$$\frac{1}{x-z} = \frac{\alpha-\beta}{(x-\alpha)(z-\beta)} + \frac{x-\beta}{x-\alpha}\frac{z-\alpha}{z-\beta}\frac{1}{x-z}, \tag{30}$$
que nous appellerons $L(\alpha,\beta)$. Partant de $H(\alpha_1)$ (c'est la seule utilisation de $H(\alpha)$ pour montrer (8)), on reporte le second membre de $L(\alpha_2,\beta_1)$ à la place du $\frac{1}{x-z}$ à droite de $H(\alpha_1)$: en notant $\gamma_n = \alpha_{n+1} - \beta_n$, on obtient
$$\begin{aligned}\frac{1}{x-z} &= \frac{1}{x-\alpha_1}\\ &\quad + \frac{\gamma_1}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}\frac{z-\alpha_1}{z-\beta_1} + \frac{x-\beta_1}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}{z-\beta_1}\frac{1}{x-z}.\end{aligned} \tag{31}$$
Puis on reporte le second membre de $L(\alpha_3,\beta_2)$ à la place du $\frac{1}{x-z}$ à droite de (31), puis $L(\alpha_4,\beta_3)$, etc.

L'identité d'Hermite est donc basée sur l'itération de $H(\alpha)$ tandis que celle de Lagrange est basée sur l'itération de $L(\alpha,\beta)$. On peut donc obtenir de nombreuses autres identités en itérant et combinant les identités $H(\alpha)$ et $L(\delta,\beta)$ pour diverses valeurs de α,β,δ. Les possibilités sont évidemment infinies (et même non dénombrables) et nous démontrons une identité qui semble nouvelle et qui va nous servir dans la suite : informellement, elle découle de la suite d'opérations $H(\alpha_1), L(\alpha_2,\beta_1), H(\alpha_3), L(\alpha_4,\beta_2), H(\alpha_5),\ L(\alpha_6,\beta_3)$, etc.

Théorème 6. — *Soient deux suites de nombres complexes $(\alpha_n)_{n\geq 1}$, $(\beta_n)_{n\geq 1}$, deux complexes x, z tels que $x\neq z$, $x\neq \alpha_j$ et $z\neq \beta_j$ pour tout $j\geq 1$. Alors, pour tout entier $n\geq 0$, en notant n' un entier qui peut valoir $n-1$ ou n, on a*

$$\frac{1}{x-z}=\sum_{j=0}^{n}\frac{(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_j)}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{2j+1})}\frac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{2j})}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_j)}$$
$$+\sum_{j=0}^{n'}\omega_j\frac{(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_j)}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{2j+2})}\frac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{2j+1})}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_{j+1})}+S(n,n'),\quad (32)$$

où $\omega_j=\alpha_{2j+2}-\beta_{j+1}$ et

$$S(n,n-1)=\frac{(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_n)}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{2n+1})}\frac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{2n+1})}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_n)}\frac{1}{x-z},$$
$$S(n,n)=\frac{(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_{n+1})}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{2n+2})}\frac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{2n+2})}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_{n+1})}\frac{1}{x-z}.$$

Remarque. — Pour que cette identité soit correctement définie pour $j=0$ dans les deux sommes et/ou lorsque $n'=-1$, on doit adopter la convention habituelle que les produits vides valent 1 et les sommes vides valent 0.

Démonstration. — On procède par récurrence sur $n\geq 0$. Lorsque $n=0$ et $n'=-1$, l'identité (32) se réduit à l'identité $H(\alpha_1)$ (équation (28)) tandis que si $n=0$ et $n'=0$, elle coïncide exactement avec l'identité (31).

Supposons maintenant (32) vraie au rang n avec $n'=n-1$. On remplace le facteur $\frac{1}{x-z}$ dans $S(n,n-1)$ par le membre de droite $L(\alpha_{2n+2},\beta_{n+1})$ (équation (30)) pour obtenir (32) au rang n avec $n'=n$. Puis on remplace le facteur $\frac{1}{x-z}$ dans $S(n,n)$ par le membre de droite de $H(\alpha_{2n+3})$ (équation (28)) pour obtenir (32) au rang $n+1$ avec $n'=(n+1)-1$. □

4.2. Le théorème de Legendre. — Par la formule de Cauchy, il découle de (32) que pour tout fonction F holomorphe dans un ouvert Ω simplement connexe contenant $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n+2}$, on a

$$F(z)=\sum_{j=0}^{n}A_j\frac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{2j})}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_j)}+\sum_{j=0}^{n'}B_j\frac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{2j+1})}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_{j+1})}+R_{n,n'}(z)\qquad (33)$$

pour tout z différent des β_j, où, en désignant par $\mathscr{C}$ une courbe incluse dans Ω et contenant en son intérieur z et $\alpha_1, \dots \alpha_{2n+2}$, on a :

$$A_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}} F(x) \, \frac{(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_j)}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{2j+1})} \, \mathrm{d}x, \tag{34}$$

$$B_j = \frac{\omega_j}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}} F(x) \, \frac{(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_j)}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{2j+2})} \, \mathrm{d}x \tag{35}$$

et

$$R_{n,n-1}(z) = \frac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{2n+1})}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_n)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}} \frac{F(x)}{x-z} \frac{(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_n)}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{2n+1})} \, \mathrm{d}x,$$

$$R_{n,n}(z) = \frac{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_{2n+2})}{(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_{n+1})} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}} \frac{F(x)}{x-z} \frac{(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_{n+1})}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{2n+2})} \, \mathrm{d}x.$$

Nous allons maintenant appliquer l'identité (33) précédente à la fonction $\zeta(1,z)$, définie rappelons-le par

$$\zeta(1,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z} \right).$$

Théorème 7. — *Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\dots\}$, on a*

$$\zeta(1,z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \, \frac{(z-n+1)_n^2}{(z+1)_n} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \, \frac{(z-n+1)_n^2}{(z+1)_n} \frac{z-n}{z+n+1}$$

où $A_0 = B_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{(x+1)_n (x-n)}{(x-n)_{n+1}^2} \, \zeta(1,x) \, \mathrm{d}x \in \mathbb{Q}\zeta(2) + \mathbb{Q}$$

et

$$B_n = \frac{2n}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{(x+1)_n}{(x-n)_{n+1}^2} \, \zeta(1,x) \, \mathrm{d}x \in \mathbb{Q}\zeta(2) + \mathbb{Q}.$$

La courbe $\mathscr{C}_n$ entoure les points $0, 1, \dots, n$ mais aucun des pôles de $\zeta(1,z)$.

Esquisse de la démonstration. — Définissons deux suites $(\alpha_j)_{j\geq 1}$ et $(\beta_j)_{j\geq 1}$ par $\alpha_{2n-1} = \alpha_{2n} = n-1$ et $\beta_n = -n$ pour tout $n \geq 1$. Alors, l'identité (33) nous fournit un développement de $\zeta(1,z)$ à l'aide de deux sommes finies correspondant aux séries de l'énoncé du théorème 7. Les expressions intégrales des coefficients A_n et B_n sont celles que l'on obtient en calculant (34) et (35). Nous n'allons détailler que la façon d'obtenir $B_n \in \mathbb{Q}\zeta(2) + \mathbb{Q}$ ainsi qu'une expression alternative de B_n ; on admet que le reste $R_{n,n}(z)$ tend vers 0 pour $\Re(z) > 0$ et que les deux séries convergent, les techniques étant similaires à celles employées pour montrer le théorème 4.

On commence par décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{(x+1)_n}{(x-n)_{n+1}^2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{e_{j,n}}{(x-j)^2} + \sum_{j=0}^{n} \frac{f_{j,n}}{x-j}$$

avec

$$e_{j,n} = \frac{1}{n!}\binom{n}{j}^2\binom{n+j}{j},$$
$$f_{j,n} = e_{j,n}\Bigg(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+j} + \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{2}{k-j}\Bigg).$$

De plus,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_n}\frac{\zeta(1,x)}{x-j}\,\mathrm{d}x = \zeta(1,j) = \sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k},$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_n}\frac{\zeta(1,x)}{(x-j)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\partial\zeta}{\partial z}(1,j) = \zeta(2,j) = \zeta(2) - \sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k^2}.$$

En reportant dans l'expression intégrale de B_n, on obtient donc que

$$\frac{n!B_n}{2n} = n!\Bigg(\zeta(2)\sum_{j=0}^{n}e_{j,n} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{e_{j,n}}{k^2} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{f_{j,n}}{k}\Bigg)$$
$$= p_n\zeta(2) - q_n \in \mathbb{Q}\zeta(2) + \mathbb{Q}.$$

On a $p_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2\binom{n+j}{j} \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{d}_n^2 q_n \in \mathbb{Z}$. On procède de la même façon en ce qui concerne A_n pour obtenir

$$n!A_n = \sum_{j=0}^{n-1}(j-n)\binom{n}{j}^2\binom{n+j}{j}\zeta(2,j) + \binom{2n}{n}\zeta(1,n)$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-1}(j-n)\binom{n}{j}^2\binom{n+j}{j}\Bigg(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+j} + \frac{1}{n-j} + \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1}\frac{2}{k-j}\Bigg)\zeta(1,j).$$

Il vient alors que $n!A_n = \widetilde{p}_n\zeta(2) - \widetilde{q}_n$, avec $\widetilde{p}_n = \sum_{j=0}^{n}(j-n)\binom{n}{j}^2\binom{n+j}{j} \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{d}_n^2\widetilde{q}_n \in \mathbb{Z}$.

L'irrationalité de $\zeta(2)$, que nous avons en vue, nécessite d'estimer la décroissance de B_n et, pour cela, il en faut une expression alternative. On remarque que l'on a

$$\pi\cot(\pi x) = \zeta(1,x) - \zeta(1,-1-x)$$

pour tout $x \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ (voir [**2**, p. 11, (1.2.5)]) et, comme lors de la démonstration du théorème 4, on en déduit que

$$B_n = \frac{2n^2}{2\pi i}\int_{\kappa+i\infty}^{\kappa-i\infty}\frac{\Gamma(n-nt+1)\Gamma(nt)^3}{\Gamma(n+nt+1)^2}\cos(\pi nt)\,\mathrm{d}t$$

avec κ quelconque dans $]0,1[$. Le facteur $\cos(n\pi t)$ rend les choses plus compliquées que pour $\log(2)$ et $\zeta(3)$ car les extrema de la fonction $y \mapsto \left|\frac{\Gamma(n-nt+1)\Gamma(nt)^3}{\Gamma(n+nt+1)^2}\cos(\pi nt)\right|$ (où $t=\kappa+iy$) sont plus difficiles à déterminer. Néanmoins, on peut estimer leurs valeurs et montrer que

$$|n!B_n| \ll \Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^{5n(1+o(1))}.$$

On obtient des expressions et majorations similaires pour A_n et $R_{n,n}(z)$. $\square$

On en déduit le résultat suivant, dont on omet la démonstration qui est similaire à celle des corollaires 1 et 2.

Corollaire 3 (Legendre). — *Le nombre $\zeta(2)$ est irrationnel.*

Remarques. — On a une nouvelle fois obtenu les approximations classiques d'Alladi et Robinson [**1**] pour $\log(2)$ et d'Apéry [**3**] pour $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. Il existe maintenant de nombreuses manière d'engendrer ces approximations, en particulier au moyen de séries de nature hypergéométrique (voir par exemple [**14, 25**]). Ainsi, les nombres $A_{n+1}/(2n+1)$ définis par (2) dans l'introduction s'obtiennent également comme

$$\frac{A_{n+1}}{2n+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+k}\frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n)}{k(k+1)\cdots(k+n)}.$$

Les formes en quelque sorte « duales » de cette série et de celle à droite de (1) sont tout à fait frappantes.

On peut aussi donner une nouvelle preuve du théorème de Gutnik [**21**] affirmant que pour tout rationnel q, au moins un des deux nombres $\zeta(2)+2q\log(2)$ et $3\zeta(3)+q\zeta(2)$ est irrationnel. La preuve est basée sur la construction de deux formes linéaires adéquates $\alpha_n\zeta(2)+2\beta_n\log(2)+\delta_n$ et $3\alpha_n\zeta(3)+\beta_n\zeta(2)+\gamma_n$ et à coefficients rationnels. La première forme est obtenue comme coefficient du développement de $\widetilde{\zeta}(1,x)$ sur la « base » de fractions rationnelles utilisée pour développer $\zeta(2,x)$ au théorème 4 et son étude asymptotique utilise l'identité (25). La deuxième forme est obtenue comme coefficient du développement de $\widetilde{\zeta}(2,x)$ sur cette même base et son étude asymptotique utilise l'identité

$$\pi^2\frac{\cos(\pi x)}{\sin^2(\pi x)} = \widetilde{\zeta}(2,x) - \widetilde{\zeta}(2,-1-x),$$

que l'on obtient en dérivant (25).

5. Quelques problèmes

Dans ce paragraphe, nous proposons trois pistes de recherche liées à l'interpolation rationnelle qu'il semble intéressant d'explorer.

Il n'est pas difficile de produire des suites d'approximations rationnelles convergeant vers π : il suffit de développer la fonction $z\widetilde{\zeta}(1,z+1/2)$ (dont les pôles sont aux demi-entiers négatifs) sur la « base » des fractions rationnelles

$$\frac{z(z-1)\cdots(z-n+2)}{(z+\frac{3}{2})(z+\frac{5}{2})\cdots(z+n+\frac{1}{2})},$$

ce que l'on peut faire en appliquant l'identité de Lagrange avec les paramètres $\alpha_1 = 0$, $\alpha_{j+1} = j-1$ et $\beta_j = -j-1/2$ pour $j \geq 1$. On obtient alors

$$\widetilde{\zeta}\Big(1, z+\frac{1}{2}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(z-n+2)_{n-1}}{(z+\frac{3}{2})_n}$$

avec

$$\frac{A_{n+1}}{2n+1/2} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{n+j+1/2}{n} \widetilde{\zeta}\Big(1, j+\frac{1}{2}\Big) \in \mathbb{Q}\pi + \mathbb{Q},$$

puisque

$$(-1)^j \widetilde{\zeta}\Big(1, j+\frac{1}{2}\Big) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{j} \frac{(-1)^k}{k+\frac{1}{2}}.$$

Malheureusement, ces approximations, qui sont également classiques, ne sont pas assez bonnes pour impliquer l'irrationalité de π. La situation est encore moins satisfaisante pour la constante de Catalan $G = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(2k+1)^2$ dont la nature arithmétique est toujours inconnue et pour laquelle nous n'avons même pas trouvé d'approximations rationnelles raisonnables par les méthodes du présent article. Il serait donc très intéressant d'essayer d'obtenir de bonnes approximations rationnelles de G par interpolation.

Il existe d'autres manières d'obtenir les approximations d'Apéry pour $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, en particulier au moyen de séries hypergéométriques *very-well-poised* (voir par exemple [**5, 25, 35**]). Par exemple, pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$n! \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Big(k+\frac{n}{2}\Big) \frac{(k-1)\cdots(k-n)(k+n+1)\cdots(k+n)}{\big(k(k+1)\cdots(k+n)\big)^3} = \widehat{p}_n \zeta(2) - \widehat{q}_n$$

pour certaines suites de rationnels $\widehat{p}_n$ et $\widehat{q}_n$ qui coïncident de façon non-triviale avec les suites p_n et q_n d'Apéry. Peut-on obtenir les formes linéaires « brutes » $\widehat{p}_n \zeta(2) - \widehat{q}_n$ comme coefficients d'une série d'interpolation naturellement associée à une fonction aussi simple que possible ?

Waldschmidt [**40**] a obtenu un énoncé dans la direction du théorème « 2^z » de Pólya en employant la méthode de Schneider (c'est-à-dire, pour un problème diophantien donné, construire par le lemme de Siegel une fonction auxiliaire entière s'annulant en beaucoup de points sans multiplicité) : cette approche a été à la base de la solution par Gramain [**20**] du problème de Fukasawa-Gel'fond, qui consistait à déterminer la croissance minimale d'une fonction transcendante envoyant $\mathbb{Z}[i]$ dans $\mathbb{Z}[i]$. Or dans l'étude de la nature arithmétique des valeurs de zêta, un des problèmes auquel on se heurte est que les seules fonctions auxiliaires que l'on sait construire sont obtenues par des approximants de Padé des polylogarithmes, qui ne sont pas de fonctions entières. (3) À la lumière du présent article et de celui de Waldschmidt, on pourrait imaginer changer d'approche en utilisant non plus les polylogarithmes mais les fonctions $\zeta(k,z)/\Gamma(z+1)^k$ ou encore $\sin^k(\pi z)\zeta(k,z)$ qui sont entières et prennent avec leurs dérivées des valeurs intéressantes aux entiers.

Remerciements. Je tiens à remercier très chaleureusement Bernard de Mathan et Michel Waldschmidt pour leurs remarques qui ont permis d'améliorer le texte, ainsi que l'arbitre pour sa lecture très minutieuse.

Bibliographie

[1] K. Alladi et M. Robinson, *Legendre polynomials and irrationality*, J. reine angew. Math. **318** (1980), 137–155.

[2] G. E. Andrews, R. A. Askey et R. Roy, *Special Functions*, The Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. **71**, (G.-C. Rota, ed.), Cambridge University Press, Cambridge (1999).

[3] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astérisque **61** (1979), 11–13.

[4] R. Apéry, *Interpolation de fractions continues et irrationalité de certaines constantes*, 37–53, CTHS : Bull. Sec. Sci. III, Bib. Nat. Paris, 1981.

[5] K. Ball et T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. **146**.1 (2001), 193–207.

[6] A. Baker, *A note on integral integer-valued functions of several variables*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **63** (1967), 715–720.

[7] H. Bateman, *The transformation of a Lagrangian series into a Newtonian series*, Proc. nat. Acad. Sci. USA **25** (1939), 262–265.

[8] C. Batut et M. Olivier, *Sur l'accélération de la convergence de certaines fractions continues*, Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux, 1979–1980, Exp. n° 23, 25 pp., Univ. Bordeaux I, Talence, 1980.

[9] F. Beukers, *Padé-approximations in number theory*, in : Padé approximation and its applications (Amsterdam, 1980), Lecture Notes in Math. **888**, Springer (1981), 90–99.

[10] F. Beukers, *Irrationality proofs using modular forms*, Journées arithmétiques de Besançon (1985). Astérisque **147-148**, (1987), 271–283, 345.

[11] K. Boehle, *Über die Transzendenz von Potenzen mit algebraischen Exponenten (Verallgemeinerung eines Satzes von A. Gelfond)*, Math. Ann. **108** (1933), 56–74.

[12] P. Bunschuh, *Ein Satz über ganze Funktionen und Irrationalitätsaussagen*, Invent. math. **9** (1970), 175–184.

[13] P. Bundschuh et W. Zudilin, *On theorems of Gel'fond and Selberg concerning integral-valued entire functions*, J. Approx. Theory **130** (2004), no. 2, 164–178.

(3) C'est en fait un problème plus général qui a pour conséquence que la théorie arithmétique des G-fonctions est beaucoup moins satisfaisante que celle des E-fonctions.

[14] S. Fischler, *Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal, ...)*, Séminaire Bourbaki 2002–2003, exposé no. 910 (novembre 2002), Astérisque 294 (2004), 27–62.

[15] S. Fukasawa, *Über ganzwertige ganze Funktionen*, Tôhoku Math. Journ. **29** (1928), 131–144.

[16] A. O. Gel'fond, *Sur un théorème de M. G. Pólya*, Atti Reale Accad. Naz. Lincei **X** (1929), 569–574.

[17] A. O. Gel'fond, *Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières*, Tôhoku Math. Journ. **30** (1929), 280–285.

[18] A. O. Gel'fond, *Sur les nombres transcendants*, C. R. Acad. Sci. de Paris **189** (1929), 1224–1226.

[19] A. O. Gel'fond, *Sur le septième problème de D. Hilbert*, en russe et français, C. R. Acad. Sc. URSS (2) 2 (1934), 1–6.

[20] F. Gramain, *Sur le théorème de Fukasawa-Gel'fond*, Invent. Math. **63** (1981), no. 3, 495–506.

[21] L. A. Gutnik, *Irrationality of some quantities that contain* $\zeta(3)$, en russe, Acta Arith. **42** (1983), no. 3, 255–264.

[22] G. H. Hardy, *On a theorem of Mr G. Pólya*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **19** (1920), 60–63.

[23] E. Hille, *Bilinear formulas in the theory of the transformation of Laplace*, Compositio Math. **6** (1938), 96–102.

[24] E. Hille, *On a class of interpolation series*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **84** (1979), no. 3-4, 283–307.

[25] C. Krattenthaler et T. Rivoal, *Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann*, Mem. Amer. Math. Soc. **186** (2007), 93 pages.

[26] R. O. Kuzmin, *On a new class of transcendental numbers*, en russe, Izv. Akad. Nauk SSSR 3 (1930), 583–597.

[27] R. Lagrange, *Mémoire sur les séries d'interpolation*, Acta Math. **64** (1935), 1–80.

[28] V. V. Maev, *Expansion of meromorphic functions with multiple poles in Newton type interpolation series of rational functions*, en russe, Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika **84** (1969), no. 5, 58–60.

[29] V. T. Mironov, *On a class of rational interpolation series*, en russe, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **102** (1955), 215–218.

[30] V. T. Mironov, *Interpolation series of fractional rational functions as a general apparatus for representation of meromorphic and entire functions*, en russe, Volž. Mat. Sb. Vyp. **2** (1964) 102–104.

[31] Yu. V. Nesterenko, *Some remarks on* $\zeta(3)$, en russe, Mat. Zametki **59** (1996), no. 6, 865–880, 960 ; traduction en anglais dans Math. Notes **59** (1996), no. 5-6, 625–636.

[32] N.-E. Nörlund, *Leçons sur les séries d'interpolation*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, 1926.

[33] G. A. Orudžev, *On convergence of an interpolation series of rational fractions*, en russe, Izv. Akad. Nauk Azerbaĭdžan. SSR. Ser. Fiz.-Teh. Him. Nauk **4** (1958), 3–22.

[34] G. Pólya, *Über ganzwertige ganze Funktionen*, Palermo Rend. **40** (1916), 1–16 (1916).

[35] T. Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I Math. **331**.4 (2000), 267–270.

[36] T. Rivoal et M. Welter, *Sur les fonctions arithmétiques non entières*, 19 pages (2006), à paraître à Israel J. Math.

[37] T. Schneider, *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I, II*, J. für Math. **172** (1934), 65–69 et 70–74.

[38] A. Selberg, *Über einen Satz von A. Gelfond*, Arch. Math. Naturvid. **44** (1941), 159–170.

[39] C. Siegel, *Über die Perioden elliptischer Funktionen*, J. reine angew. Math. **167** (1932), 62–69.

[40] M. Waldschmidt, *Pólya's theorem by Schneider's method*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **31** (1978), no. 1-2, 21–25.

[41] J. L. Walsh, *An interpolation series expansion for a meromorphic function*, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 1–9.

[42] M. Welter, *A new class of integer-valued entire functions*, J. reine angew. Math. **583** (2005), 175–192.

[43] K. Yoshino, *Pólya's theorem for non entire functions*, Proceedings of the 11th winter school on abstract analysis (Železná Ruda, 1983). Rend. Circ. Mat. Palermo (2) (1984), Suppl. No. 3, 385–395.

T. Rivoal, Institut Fourier, CNRS UMR 5582, Université Grenoble 1, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France.

---

12 février 2008