S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 554–560 (2012) УДК 517.977, 517.958
MSC 76A05, 49J20

О РАЗРЕШИМОСТИ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕЧЕНИЕМ ЖИДКОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е.С. БАРАНОВСКИЙ

Abstract. We investigate the optimal Dirichlet boundary control problem for stationary motion equations of second grade fluids. We consider boundary control of the flow on a bounded domain in $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. We show the existence of a weak solution minimizing a given cost functional.

Keywords: hydrodynamics, non-Newtonian fluids, second grade fluids, optimal control, Dirichlet boundary control.

Введение

Хорошо известно, что многие встречающиеся на практике жидкости не подчиняются ньютоновскому определяющему соотношению (закону трения Ньютона). К таким жидкостям относятся растворы полимеров, битумы, смазки, эмульсии одной ньютоновской жидкости в другой, сильно разбавленные суспензии твердых частиц в ньютоновской жидкости и многие другие среды. Существует большое число моделей, в которых учитываются различные «неньютоновские» свойства течения жидкости. Математическая модель, предполагающая, что в девиаторе тензора напряжений учитываются члены, квадратичные по градиентам скорости, получила название модели движения жидкостей второго порядка [1]. Имеется большое число математических работ, посвященных изучению краевых и начально-краевых задач для уравнений этой модели (см, например, [2]–[4]). В предлагаемой заметке рассматривается задача оптимального граничного управления для стационарных уравнений движения

Baranovskii, E.S., Solvability of the Stationary Optimal Control Problem for Motion Equations of Second Grade Fluids.

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-00328-а).

Поступила 7 ноября 2012 г., опубликована 30 ноября 2012 г.

жидкостей второго порядка в ограниченной области $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. В работе доказана теорема о разрешимости данной задачи в слабой постановке для достаточно широкого класса функционалов качества.

1. Уравнения движения жидкостей второго порядка и используемые функциональные пространства

Прежде чем сформулировать задачу оптимизации, приведем небходимые сведения о модели движения жидкостей второго порядка и функциональных пространствах, используемых в работе.

Как известно, движение любой сплошной несжимаемой среды определяется системой дифференциальных уравнений в форме Коши (см., например, [5]):

$$\rho\Big(\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial v}{\partial x_k}\Big) - \operatorname{Div} T = \rho g, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} v = 0. \tag{1.2}$$

Здесь $n = 2, 3$ – размерность пространства, $x_1, ..., x_n$ – координаты в пространстве, t – время, v - вектор скорости, g – известная плотность внешних сил, ρ – плотность среды (в дальнейшем для простоты будем считать $\rho = 1$), $T = (T_{ij})$ – тензор напряжений. Символ $\operatorname{Div} T$ обозначает вектор с координатами:

$$(\operatorname{Div} T)_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}.$$

Модель движения жидкостей второго порядка предполагает следующее реологическое соотношение [1]:

$$T = -pI + \nu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2. \tag{1.3}$$

Здесь p – давление, I – единичная матрица, ν - вязкость среды, α_1,α_2 – нормальные модули напряжений, A_1, A_2 – первый и второй тензоры Ривлина—Эриксена:

$$A_1 = A_1(v) = \nabla v + (\nabla v)^{\mathrm{T}},$$

$$A_2 = A_2(v) = \frac{dA_1}{dt} + A_1(\nabla v) + (\nabla v)^{\mathrm{T}} A_1,$$

где $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ – полная производная, символ $(\nabla v)^{\mathrm{T}}$ обозначает матрицу, полученную транспонированием матрицы ∇v.

Согласно результатам работы [6], коэффициенты из (1.3) удовлетворяют соотношениям:

$$\nu \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 \geq 0.$$

Обозначим

$$\alpha = \alpha_1 = -\alpha_2, \quad W(v) = \frac{1}{2}\big(\nabla v - (\nabla v)^{\mathrm{T}}\big).$$

Подставляя тензор напряжений (1.3) в (1.1), получим уравнения движения жидкости второго порядка:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \nu \Delta v - \alpha \frac{\partial(\Delta v)}{\partial t} - \alpha \operatorname{Div}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial A_1(v)}{\partial x_k}\right) \\ - \alpha \operatorname{Div}\big(A_1(v)W(v) - W(v)A_1(v)\big) + \nabla p = g. \tag{1.4}$$

Отметим, что при $\alpha = 0$ данная система переходит в хорошо известные уравнения Навье-Стокса, описывающие движение ньютоновской жидкости.

Мы будем рассматривать стационарный вариант системы (1.4):

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \nu \Delta v - \alpha \operatorname{Div} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial A_1(v)}{\partial x_k} \right)$$

$$-\alpha \operatorname{Div}\big(A_1(v)W(v) - W(v)A_1(v)\big) + \nabla p = g,$$

Введем необходимые в дальнейшем функциональные пространства и обозначения.

Пусть E – банахово пространство, E^* – его сопряженное. Обозначим сильную и слабую сходимости соответственно через $\to$ и $\rightharpoonup$. Для элементов $w \in E$ и $L \in E^*$ через $\langle L, w \rangle$ обозначим действие функционала L на элементе w.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей Γ. Обозначим:

$C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных функций $v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$.

$C(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных функций $w : \Gamma \to \mathbb{R}^n$.

$C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ – пространство C^∞-гладких функций $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ с носителем в Ω.

$\mathcal{V} = \{v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \operatorname{div} v = 0\}$.

Мы будем использовать стандартные обозначения $L_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ и $H^m(\Omega, \mathbb{R}^n) = W_2^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$ для пространств Лебега и Соболева функций со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Скалярное произведение в $L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ будем обозначать $(\cdot, \cdot)$.

Мы будем использовать также пространство

$F(\Omega, \mathbb{R}^n) = \{v \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \operatorname{div} v = 0\}$.

Зададим оператор следа $\gamma_\Gamma : H^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \to C(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ формулой

$$[\gamma_\Gamma(v)](x) = v(x), \;\; v \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^n), \, x \in \Gamma.$$

Поскольку имеет место вложение $H^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \subset C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ (см. [7]), оператор γ_Γ задан корректно.

2. Постановка задачи оптимального граничного управления и основной результат работы

Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \nu \Delta v - \alpha \operatorname{Div} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial A_1(v)}{\partial x_k} \right)$$

$$-\alpha \operatorname{Div}\big(A_1(v)W(v) - W(v)A_1(v)\big) + \nabla p = g, \, x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \; x \in \Omega, \tag{2.2}$$

$$v(x) = u(x), \, x \in \Gamma_c, \tag{2.3}$$

$$v(x) = 0, \, x \in \Gamma \backslash \Gamma_c, \tag{2.4}$$

$$u(x) \in U(x), \; x \in \Gamma_c, \tag{2.5}$$

$$\mathcal{J}(v, u) \to \inf. \tag{2.6}$$

Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей Γ. Множество $U(x) \subset \mathbb{R}^n$ задает ограничения на управление в точке x. Замкнутое множество $\Gamma_c \subset \Gamma$ – часть границы, с которой осуществляется управление.

Не ограничивая общности, мы будем считать, что поле внешних сил потенциально и включено в градиент давления.

Обозначим

$$\dot{C}(\Gamma_c, \mathbb{R}^n) = \{w \in C(\Gamma_c, \mathbb{R}^n) \mid \int\limits_{\Gamma_c} w \cdot \mathrm{n} = 0\},$$

где $\mathrm{n} = \mathrm{n}(x)$ – единичный вектор внешней нормали к Γ в точке x.

Мы будем рассматривать задачу (2.1)–(2.6) в слабой постановке.

Определение 1. *Допустимой парой задачи* (2.1)–(2.6) *назовем пару функций* $(v, u) \in F(\Omega, \mathbb{R}^n) \times \dot{C}(\Gamma_c, \mathbb{R}^n)$ *такую, что*

i) для любого $\varphi \in \mathcal{V}$ *выполнено равенство*

$$-\sum_{k=1}^{n}\left(v_k v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) + \nu(\nabla v, \nabla \varphi) + \alpha \sum_{k=1}^{n}\left(v_k \frac{\partial A_1(v)}{\partial x_k}, \nabla \varphi\right) + \alpha\big(A_1(v)W(v) - W(v)A_1(v), \nabla \varphi\big) = 0, \tag{2.7}$$

ii) $\gamma_{\Gamma_c}(v) = u$, $\gamma_{\Gamma \setminus \Gamma_c}(v) = 0$,

iii) справедливо включение (2.5).

Такая постановка задачи соответствует стандартному подходу при определений слабых (в другой терминологии – обобщенных) решений краевых задач гидродинамики. В самом деле, пусть (v, p) – классическое решение задачи (2.1)–(2.4). Умножим скалярно в L_2 уравнение (2.1) на $\varphi \in \mathcal{V}$ и применим к полученным выражениям операцию интегрирования по частям. В результате получим равенство (2.7).

Множество допустимых пар обозначим символом $\mathcal{S}$. Пусть

$$\mathcal{J} : F(\Omega, \mathbb{R}^n) \times \dot{C}(\Gamma_c, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}.$$

Определение 2. *Решением задачи* (2.1)–(2.6) *назовем пару функций* $(v_*, u_*) \in \mathcal{S}$ *такую, что*

$$\mathcal{J}(v_*, u_*) = \inf_{(v,u) \in \mathcal{S}} \mathcal{J}(v, u).$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат работы.

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

i_1) *для любого ограниченного множества* $\mathcal{D} \subset \dot{C}(\Gamma_c, \mathbb{R}^n)$ *справедливо*

$$-\infty < \inf\{\mathcal{J}(v, \gamma_{\Gamma_c}(v)) : \ v \in F(\Omega, \mathbb{R}^n), \gamma_{\Gamma_c}(v) \in \mathcal{D}\},$$

i_2) *существует семейство непрерывных функций* $\lambda_r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $r \geq 0$, *такое, что для любой функции* $v \in F(\Omega, \mathbb{R}^n)$, *удовлетворяющей условию*

$$|\mathcal{J}(v, \gamma_{\Gamma_c}(v))| \leq r,$$

справедлива оценка

$$\|v\|_{H^2(\Omega, \mathbb{R}^n)} \leq \lambda_r(\|\gamma_{\Gamma_c}(v)\|_{C(\Gamma, \mathbb{R}^n)});$$

i_3) *для любой последовательности* $\{v^m\} \subset F(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *такой, что* $v^m \rightharpoonup v$ *в* $H^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, *выполнено*

$$\mathcal{J}(v, \gamma_{\Gamma_c}(v)) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathcal{J}(v^m, \gamma_{\Gamma_c}(v^m)),$$

i_4) *для любого* $x \in \Gamma_c$ *множество* $U(x)$ *замкнуто в пространстве* $\mathbb{R}^n$,

i_5) *для любого* $x \in \Gamma_c$ *справедливо включение* $0 \in U(x)$,

i_6) *функция* $q : \Gamma_c \to \mathbb{R}$, $q(x) = \sup\limits_{y\in U(x)} \|y\|_{\mathbb{R}^n}$ *ограничена.*

Тогда задача (2.1)–(2.6) *имеет по крайней мере одно решение.*

Подход, который используется нами при доказательстве этой теоремы, основан на идеях [8] и результатах о свойствах функций соболевских пространств. Доказательство приводится в следующем параграфе.

Отметим некоторые примеры функционалов стоимости, удовлетворяющих условиям i_1)–i_3):

$$\mathcal{J}_1(v, u) = \|v - v_+\|^2_{H^2(\Omega,\mathbb{R}^n)} + \theta\|u - u_+\|^2_{C(\Gamma_c,\mathbb{R}^n)},$$

$$\mathcal{J}_2(v, u) = \|v - v_+\|^2_{H^2(\Omega,\mathbb{R}^n)} - \omega\|u - u_-\|^2_{C(\Gamma_c,\mathbb{R}^n)},$$

$$\mathcal{J}_3(v, u) = \|v - v_+\|^2_{C(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n)} + \varepsilon\|v\|_{H^2(\Omega,\mathbb{R}^n)} + \varkappa\|u\|_{C(\Gamma_c,\mathbb{R}^n)},$$

где $\theta, \omega, \varkappa \geq 0$, $\varepsilon > 0$ – параметры, v_+, u_+, u_- – заданные функции, v_+ – оптимальное распределение скоростей в области Ω, функции u_+, u_- характеризуют соответственно наиболее благоприятный и неблагоприятный граничные режимы течения.

3. Доказательство теоремы

Сначала заметим, что пара $(0, 0) \in F(\Omega, \mathbb{R}^n) \times \dot{C}(\Gamma_c, \mathbb{R}^n)$ является допустимой парой задачи (2.1)–(2.6). Поэтому $\mathcal{S} \neq \varnothing$. Покажем, что

$$-\infty < \inf_{(v,u)\in\mathcal{S}} \mathcal{J}(v, u). \tag{3.1}$$

Из условия i_6) следует, что множество

$$\mathcal{G} = \{w \in \dot{C}(\Gamma_c, \mathbb{R}^n) :\ w(x) \in U(x)\}$$

ограничено в $C(\Gamma_c, \mathbb{R}^n)$. С учетом условия i_1) имеем:

$$-\infty < \inf\{\mathcal{J}(v, \gamma_{\Gamma_c}(v)) :\ v \in F(\Omega, \mathbb{R}^n), \gamma_{\Gamma_c}(v) \in \mathcal{G}\} \leq \inf_{(v,u)\in\mathcal{S}} \mathcal{J}(v, u),$$

откуда и получаем (3.1).

Рассмотрим последовательность $\{(v^m, u^m)\} \subset \mathcal{S}$ такую, что

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{J}(v^m, u^m) = \inf_{(v,u)\in\mathcal{S}} \mathcal{J}(v, u). \tag{3.2}$$

Из (3.1), (3.2) следует, что числовая последовательность $\{\mathcal{J}(v^m, u^m)\}$ ограничена. Обозначим

$$r_* = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\mathcal{J}(v_m, u_m)|.$$

Используя условие i_2), получим

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|v^m\|_{H^2(\Omega,\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \lambda_{r_*}(\|u^m\|_{C(\Gamma_c,\mathbb{R}^n)}) \leq \sup_{u\in\mathcal{G}} \lambda_{r_*}(\|u\|_{C(\Gamma_c,\mathbb{R}^n)}) < +\infty.$$

Таким образом, последовательность $\{v^m\}$ ограничена в пространстве $H^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Поэтому существует функция $v_* \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ такая, что $v^{m_j} \rightharpoonup v_*$ в $H^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$

для некоторой подпоследовательности $\{m_j\}$. Для простоты будем считать, что $v^m \rightharpoonup v_*$ в $H^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Покажем, что пара $(v_*, \gamma_{\Gamma_c}(v_*))$ является решением задачи (2.1)–(2.6).

Поскольку $(v^m, u^m) \in \mathcal{S}$, мы имеем

$$
\begin{aligned}
(3.3)\qquad -\sum_{k=1}^{n}\Big(v_k^m v^m, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\Big) + \nu(\nabla v^m, \nabla\varphi) + \alpha\sum_{k=1}^{n}\Big(v_k^m\frac{\partial A_1(v^m)}{\partial x_k}, \nabla\varphi\Big)\\
+ \alpha\big(A_1(v^m)W(v^m) - W(v^m)A_1(v^m), \nabla\varphi\big) = 0,\ \forall\varphi \in \mathcal{V}.
\end{aligned}
$$

Зафиксируем произвольную функцию $\varphi \in \mathcal{V}$. В силу компактности вложения $H^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \subset C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ (см. [7]), из сходимости $v^m \rightharpoonup v_*$ в $H^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ следует сходимость $v^m \to v_*$ по норме $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$
(3.4)\qquad \sum_{k=1}^{n}\left(v_k^m v^m, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right) \to \sum_{k=1}^{n}\left(v_{*k} v_*, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right),
$$

$$
(3.5)\qquad (\nabla v^m, \nabla\varphi) = -(v^m, \Delta\varphi) \to -(v_*, \Delta\varphi) = (\nabla v_*, \nabla\varphi).
$$

при $m \to \infty$.

Покажем, что

$$
(3.6)\qquad \sum_{k=1}^{n}\left(v_k^m\frac{\partial A_1(v^m)}{\partial x_k}, \nabla\varphi\right) \to \sum_{k=1}^{n}\left(v_{*k}\frac{\partial A_1(v_*)}{\partial x_k}, \nabla\varphi\right).
$$

при $m \to \infty$. С учетом ограниченности последовательности $\{v^m\}$ в пространстве $H^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, нетрудно установить, что

$$
(3.7)\qquad \sum_{k=1}^{n}\left((v_k^m - v_{*k})\frac{\partial A_1(v^m)}{\partial x_k}, \nabla\varphi\right) \to 0.
$$

Определим линейный непрерывный функционал $L : H^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ по формуле:

$$
\langle L, v\rangle = \sum_{k=1}^{n}\left(v_{*k}\frac{\partial A_1(v)}{\partial x_k}, \nabla\varphi\right),\ v \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^n),
$$

Так как $v^m \rightharpoonup v_*$ в $H^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, то $\langle L, v^m\rangle \to \langle L, v_*\rangle$, т.е.

$$
(3.8)\qquad \sum_{k=1}^{n}\left(v_{*k}\frac{\partial A_1(v^m)}{\partial x_k}, \nabla\varphi\right) \to \sum_{k=1}^{n}\left(v_{*k}\frac{\partial A_1(v_*)}{\partial x_k}, \nabla\varphi\right).
$$

Складывая (3.7), (3.8), получим (3.6).

Аналогичным способом можно установить, что

$$
\begin{aligned}
(3.9)\quad \big(A_1(v^m)W(v^m) - W(v^m)A_1(v^m), \nabla\varphi\big) \to\\
\to \big(A_1(v_*)W(v_*) - W(v_*)A_1(v_*), \nabla\varphi\big).
\end{aligned}
$$

при $m \to \infty$.

С учетом (3.4), (3.5), (3.6), (3.9) предельный переход при $m \to \infty$ в равенстве (3.3) дает:

$$
\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^{n}\left(v_{*k} v_*, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right) + \nu(\nabla v_*, \nabla\varphi) + \alpha\sum_{k=1}^{n}\left(v_{*k}\frac{\partial A_1(v_*)}{\partial x_k}, \nabla\varphi\right)\\
+\alpha\left(A_1(v_*)W(v_*) - W(v_*)A_1(v_*), \nabla\varphi\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Кроме того, поскольку $u^m = \gamma_{\Gamma_c}(v^m) \to \gamma_{\Gamma_c}(v_*)$ в $C(\Gamma_c, \mathbb{R}^n)$, $u^m(x) \in U(x)$ и множество $U(x)$ замкнуто, получаем, что $[\gamma_{\Gamma_c}(v_*)](x) \in U(x)$ при любом $x \in \Gamma_c$. Нетрудно также установить, что $\gamma_{\Gamma\setminus\Gamma_c}(v_*) = 0$. Таким образом, $(v_*, \gamma_\Gamma v_*) \in \mathcal{S}$.

Из условия i_3) следует, что

$$\mathcal{J}(v_*, \gamma_{\Gamma_c}(v_*)) \leq \varliminf_{m\to\infty} \mathcal{J}(v^m, u^m) = \inf_{(v,u)\in\mathcal{S}} \mathcal{J}(v, u).$$

Это и означает, что пара $(v_*, \gamma_{\Gamma_c} v_*) \in \mathcal{S}$ является решением задачи (2.1)–(2.6).

Теорема доказана.

Список литературы

[1] R.S. Rivlin, J.L. Ericksen, *Stress deformation relations for isotropic materials*, J. Rational Mech. Anal., **4** (1955), 322–425. MR0068413

[2] D. Cioranescu, E.H. Ouazar, *Existence and uniqueness for fluids of second grade*, Research Notes in Mathematics, **109** (1984), 308–340. MR0765424

[3] V. Coscia, G.P. Galdi, *Existence, uniqueness, and stability of regular steady motions of a second grade fluid*, Int. J. Non-Linear Mech., **29** (1994), 493–506. MR1287760

[4] C. le Roux, *Existence and uniqueness of the flow of second-grade fluids with slip boundary conditions*, Arch. Rational Mech. Anal., **148** (1999), 309–356. MR1716667

[5] Р.В. Гольдштейн, В.А. Городцов, *Механика сплошных сред. Часть I*, Наука. Физматлит, Москва, 2000.

[6] J.E. Dunn, R.L. Fosdick, *Thermodynamics, stability, and boundedness of fluids of complexity 2 and fluids of second grade*, Arch. Rational Mech. Anal., **56** (1974), 191–252. MR0351249

[7] R.A. Adams, J.J.F. Fournier, *Sobolev spaces*, 2 ed., Elsevier, 2003. MR2424078

[8] А.В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения*, Научная книга, Новосибирск, 1999.

Евгений Сергеевич Барановский
Воронежский государственный университет инженерных технологий,
пр. Революции, д.19,
394036, Воронеж, Россия
E-mail address: esbaranovskii@gmail.com