BULL. MATH. de la Soc. Sci. Math. de la R.S.R.
Tome 8 (56), nr. 3–4. 1964

NOTE SUR LES HYPERPLANS ISOGONAUX D'UN SIMPLEXE

PAR

TUDOR ZAMFIRESCU (Bucarest)

1. Introduction

Cette note a été écrite pour mettre en évidence quelques propriétés relatives aux involutions d'hyperplans isogonaux dans un simplexe de l'espace euclidien à n dimensions E^n.

Soient $[p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n]$ l'enveloppe convexe de l'ensemble des points $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n \in E^n$ et $(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n)$ la variété linéaire déterminée par ces points.

D é f i n i t i o n 1. *On appelle simplexe dans* E^n *un ensemble* $[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}]$, *tel que* $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = E^n$.

D é f i n i t i o n 2. *Deux hyperplans sont appelés isogonaux dans le simplexe* $[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}]$ *s'ils sont symétriques par rapport à chacun des hyperplans bissecteurs de l'angle déterminé par deux faces à n sommets,* $[x_1, x_2, \ldots, x_{i-2}, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n, x_{n+1}]$ *et* $[x_1, x_2, \ldots, x_{j-2}, x_{j-1}, x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_n, x_{n+1}]$, *où* $0 < i < j < n+2$.

Nous allons noter par μM la mesure de LEBESGUE p-dimensionnelle de $M \subset E^n$, où p est la dimension de la variété linéaire déterminée par M.

2. Une propriété métrique

P r o p r i é t é 1. *Si une paire d'hyperplans isogonaux du simplexe* $[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}]$, *qui passent par* $[x_3, x_4, \ldots, x_n, x_{n+1}]$, *rencontrent* (x_1, x_2) *en* y_1, y_2 *respectivement, alors*

$$\frac{\mu[y_1, x_1]}{\mu[y_1, x_2]} \cdot \frac{\mu[y_2, x_1]}{\mu[y_2, x_2]} = \frac{\mu^2[x_1, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}]}{\mu^2[x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}]}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit z_1 la projection de x_1 sur $(x_3, x_4, \ldots x_n, x_{n+1})$. Le plan $P \ni x_1$ orthogonal à $(x_3, x_4, \ldots, x_n, x_{n+1})$ n'est pas parallèle à $(x_2,\ x_3,\dots,\ x_n,\ x_{n+1})$, parceque

$$z_1 \in P \cap (x_2,\ x_3,\dots,\ x_n,\ x_{n+1}).$$

Donc le plan P et l'hyperplan $(x_2,\ x_3,\dots,\ x_n,\ x_{n+1})$ ont une droite (z_1, v) commune. Le plan $(x_2,\ z_1,\ v)$ et la variété linéaire $(x_3,\ x_4,\dots,\ x_n,\ x_{n+1})$ ne sont pas parallèles, car

$$z_1 \in (x_2,\ z_1,\ v) \cap (x_3,\ x_4,\dots,\ x_n,\ x_{n+1}),$$

donc, en faisant partie du même hyperplan $(x_2,\ x_3,\dots,\ x_n,\ x_{n+1})$, ont une droite D commune. Considérons le point $w \in D$ tel que $w \neq z_1$ et $(x_2,\ w) \cap \cap (z_1,\ v) \neq \emptyset$. Alors, soit

$$u = (x_2,\ w) \cap (z_1,\ v).$$

Notons aussi

$$y_i' = (y_i,\ x_3,\ x_4,\dots,\ x_n,\ x_{n+1}) \cap (x_1,\ u), \qquad (i = 1,2).$$

Il est connu que dans le triangle $[x_1,\ u,\ z_1]$ on a

$$\frac{\mu[y_1',\ x_1]}{\mu[y_1',\ u]} \cdot \frac{\mu[y_2',\ x_1]}{\mu[y_2',\ u]} = \frac{\mu^2[x_1,\ z_1]}{\mu^2[u,\ z_1]}$$

et aussi, dans $[x_1,\ x_2,\ w]$,

$$\frac{\mu[y_i,\ x_1]}{\mu[y_i,\ x_2]} \cdot \frac{\mu[w,\ x_2]}{\mu[w,\ u]} \cdot \frac{\mu[y_i',\ u]}{\mu[y_i',\ x_1]} = 1, \qquad (i = 1,\ 2),$$

donc

$$\frac{\mu[y_1,\ x_1]}{\mu[y_1,\ x_2]} \cdot \frac{\mu[y_2,\ x_1]}{\mu[y_2,\ x_2]} \cdot \frac{\mu^2[w,\ x_2]}{\mu^2[w,\ u]} = \frac{\mu^2[x_1,\ z_1]}{\mu^2[u,\ z_1]}.$$

Soit z_2 la projection de x_2 sur $(x_3,\ x_4,\dots,\ x_n,\ x_{n+1})$. On peut écrire

$$\frac{\mu[w,\ x_2]}{\mu[w,\ u]} = \frac{\mu[x_2,\ z_2]}{\mu[u,\ z_1]},$$

donc

$$\frac{\mu[y_1,\ x_1]}{\mu[y_1,\ x_2]} \cdot \frac{\mu[y_2,\ x_1]}{\mu[y_2,\ x_2]} = \frac{\mu^2[x_1,\ z_1]}{\mu^2[x_2,\ z_2]}.$$

On a, pour $i = 1,\ 2$,

$$\mu[x_i,\ x_3,\ x_4,\dots,\ x_n,\ x_{n+1}] = \frac{1}{n}\,\mu[x_3,\ x_4,\dots,\ x_n,\ x_{n+1}] \cdot \mu[x_i,\ z_i].$$

Par conséquent,

$$\frac{\mu[y_1,\ x_1]}{\mu[y_1,\ y_2]} \cdot \frac{\mu[y_2,\ x_1]}{\mu[y_2,\ x_2]} = \frac{\mu^2[x_1,\ x_3,\ x_4,\dots,\ x_n,\ x_{n+1}]}{\mu^2[x_2,\ x_3,\dots,\ x_n,\ x_{n+1}]}.$$

Il résulte tout de suite le suivant

Corollaire. *Si $P_1, P_2 \supset [x_3, x_4, \ldots, x_n, x_{n+1}]$ sont des hyperplans bissecteurs dans le simplexe $[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}]$ et $P_i \cap (x_1, x_2) = y_i$, alors*

$$\frac{\mu[y_i, x_1]}{\mu[y_i, x_2]} = \frac{\mu[x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n, x_{n+1}]}{\mu[x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}]}, \qquad (i = 1, 2).$$

3. Une propriété de concurrence

Propriété 2. *Les hyperplans isogonaux à $\binom{n+1}{2}$ hyperplans concurrents qui passent par les faces à $n-1$ sommets d'un simplexe, sont, eux aussi, concurrents.*

Démonstration. Soient $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{\binom{n+1}{2}}$ les hyperplans concurrents considérés et $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots, \Pi'_{\binom{n+1}{2}}$ les hyperplans isogonaux, tels que

$$[x_1, x_4, x_5, \ldots, x_n, x_{n+1}] \subset \Pi_1 \cap \Pi'_1,$$

$$[x_2, x_4, x_5, \ldots, x_n, x_{n+1}] \subset \Pi_2 \cap \Pi'_2$$

et

$$[x_3, x_4, \ldots, x_n, x_{n+1}] \subset \Pi_3 \cap \Pi'_3.$$

Soient $p = \bigcap_{i=1}^{\binom{n+1}{2}} \Pi_i$ et $q = \bigcap_{i=2}^{n+1} \Pi'_i$.

Démontrons que $q \in \Pi'_1$.

Soient

$$p' = (x_4, x_5, \ldots, x_n, x_{n+1}, p) \cap (x_1, x_2, x_3),$$

$$q' = (x_4, x_5, \ldots, x_n, x_{n+1}, q) \cap (x_1, x_2, x_3),$$

$$y_1 = \Pi_1 \cap (x_2, x_3), \qquad y'_1 = \Pi'_1 \cap (x_2, x_3),$$

$$y_2 = \Pi_2 \cap (x_3, x_1), \qquad y'_2 = \Pi'_2 \cap (x_3, x_1),$$

$$y_3 = \Pi_3 \cap (x_1, x_2) \quad \text{et} \quad y'_3 = \Pi'_3 \cap (x_1, x_2).$$

Alors (x_1, p', y_1), (x_2, p', y_2), (x_2, q', y'_2), (x_3, p', y_3) et (x_3, q', y'_3) sont des droites.

Selon la propriété 1,

$$\frac{\mu[y_1, x_2]}{\mu[y_1, x_3]} \cdot \frac{\mu[y'_1, x_2]}{\mu[y'_1, x_3]} = \frac{\mu^2[x_1, x_2, x_4, x_5, \ldots, x_n, x_{n+1}]}{\mu^2[x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n, x_{n+1}]},$$

$$\frac{\mu[y_2, x_3]}{\mu[y_2, x_1]} \cdot \frac{\mu[y'_2, x_3]}{\mu[y'_2, x_1]} = \frac{\mu^2[x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}]}{\mu^2[x_1, x_2, x_4, x_5, \ldots, x_n, x_{n+1}]},$$

$$\frac{\mu[y_3, x_1]}{\mu[y_3, x_2]} \cdot \frac{\mu[y'_3, x_1]}{\mu[y'_3, x_2]} = \frac{\mu^2[x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n, x_{n+1}]}{\mu^2[x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}]},$$

d'où

$$\frac{\mu[y_1, x_2]}{\mu[y_1, x_3]} \cdot \frac{\mu[y'_1, x_2]}{\mu[y'_1, x_3]} \cdot \frac{\mu[y_2, x_3]}{\mu[y_2, x_1]} \cdot \frac{\mu[y'_2, x_3]}{\mu[y'_2, x_1]} \cdot \frac{\mu[y_3, x_1]}{\mu[y_3, x_2]} \cdot \frac{\mu[y'_3, x_1]}{\mu[y'_3, x_2]} = 1.$$

Mais

$$\frac{\mu[y_1, x_2]}{\mu[y_1, x_3]} \cdot \frac{\mu[y_2, x_3]}{\mu[y_2, x_1]} \cdot \frac{\mu[y_3, x_1]}{\mu[y_3, x_2]} = 1,$$

donc

$$\frac{\mu[y'_1, x_2]}{\mu[y'_1, x_3]} \cdot \frac{\mu[y'_2, x_3]}{\mu[y'_2, x_1]} \cdot \frac{\mu[y'_3, x_1]}{\mu[y'_3, x_2]} = 1.$$

Par conséquent, $q' \in (x_1, y'_1) \subset \Pi'_1$. Mais $(x_4, x_5, \ldots, x_n, x_{n+1}) \subset \subset \Pi'_1$, donc $q \in (x_4, x_5, \ldots, x_n, x_{n+1}, q') \subset \Pi'_1$.

On prouve d'une manière analogue l'appartenance de q aux hyperplans $\Pi'_j (j = n+2, n+3, \ldots, \binom{n+1}{2})$.

Donc, à tout point p de l'espace $E^n \setminus \{\bigcup (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_i}) ; j_h \leqslant n+1 (h \leqslant i), i \leqslant n\}$, il correspond un point q du même espace, y compris les points à l'infini. C'est une correspondance involutive qui a comme points fixes les centres des hypersphères inscrite et exinscrites au simplexe.

Reçu le 19.XI.1965