SUR QUELQUES THÉORÈMES DE G. SZEKERES ET S. MARCUS CONCERNANT LES FONCTIONS MONOTONES ET CONVEXES

PAR

TUDOR ZAMFIRESCU

Dans ce travail on apporte des améliorations et on donne des généralisations des résultats contenus dans les travaux [1], [2], concernant la représentation d'une fonction comme superposition de deux fonctions monotones, l'une convexe, l'autre concave.

1. INTRODUCTION

G. Szekeres a donné il y a huit ans un théorème relatif aux fonctions appelées par S. Marcus du type K. Il s'agit des fonctions f réelles, définies sur un intervalle (a, b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$, telles qu'on ait $f(x) = \psi(\varphi(x))$, où φ est une fonction réelle, définie, convexe et strictement croissante sur (a, b), ψ est une fonction réelle, définie, concave et strictement croissante sur $(\varphi(a), \varphi(b))$ et $x \in (a, b)$. Si nous remplaçons ci-dessus la convexité (concavité) par la convexité Jensen (concavité (J)), on ne change rien, car une fonction monotone admet des points de continuité, c.-à-d. qu'on a l'équivalence des convexités Jensen et proprement dite.

G. Szekeres [1] a obtenu le résultat suivant :

Si f est une fonction réelle, définie, strictement croissante et ayant la deuxième dérivée continue sur (a, b) $(-\infty \leqslant a < b < \infty)$, alors il existe une fonction réelle φ définie et strictement croissante sur (a, b) et une fonction réelle ψ, définie et strictement croissante sur $(\varphi(a), \varphi(b))$, telles que $\varphi''(x) \geqslant 0$ pour $a < x < b$, $\psi''(u) \leqslant 0$ pour $\varphi(a) < u < \varphi(b)$ et $f(x) = \psi(\varphi(x))$ pour $a < x < b$.

Plus récemment, S. Marcus [2] a apporté une correction *) et une amélioration au théorème donné par G. Szekeres et il a établi des condi-

*) On demande notamment que $f' > 0$ partout.

tions nécessaires afin qu'une fonction soit du type K. Nous présentons ici son théorème de suffisance :

Soit f une fonction réelle définie sur (a, b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$. Supposons que f est dérivable sur (a, b) et que $f'(x) > 0$ pour $a < x < b$. Supposons encore que $f''(x)$ existe, finie, en chaque point de (a, b) et que f'' est sommable sur chaque intervalle compact contenu dans (a, b). Alors, f est, sur (a, b), une fonction du type K.

Nous allons donner une nouvelle amélioration des théorèmes ci-dessus, amélioration qui concerne la dérivabilité. Les conditions du théorème de suffisance deviendront encore plus proches des conditions nécessaires. On obtiendra une méthode effective de construction et, plus encore, dans les conditions du théorème nous pourrons établir, tout entièrement, les classes des fonctions φ et ψ.

2. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Désignons par $f^+(x)$ et $f^-(x)$ les dérivées à droite et à gauche de la fonction f, quand elles existent et sont finies, dans le point x. Notons M' l'ensemble dérivé d'un ensemble M quelconque et $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des points de discontinuité et d'extrême relatif strict d'une fonction f. Appelons points de croissance (décroissance) les points de discontinuité de première espèce d'une fonction quelconque, où la limite à gauche est inférieure (supérieure) à celle à droite. Comprenons par points $(+, +)$ (ou $(+, -)$, $(-, +)$, $(-, -)$) les points x de discontinuité d'une fonction pour lesquels il y a un voisinage (y_x, z_x) tel que la fonction soit croissante sur (y_x, x) et sur (x, z_x) (ou croissante sur (y_x, x) et décroissante sur (x, z_x), etc.).

3. CONDITIONS SUFFISANTES

THÉORÈME 1. *Pour que la fonction* $f: (a, b) \to R$ *soit du type* K, *il suffit que les quatre conditions suivantes soient remplies* :

1° f *est continue sur* (a, b) :

2° f^+ (f^-) *est définie sur* (a, b) *et à variation bornée sur chaque* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$;

3° *la borne inférieure de* f^+ (f^-) *est strictement positive sur chaque* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$;

4° $\mathcal{D}''_{f^+} \subseteq \{a, b\}$ $(\mathcal{D}''_{f^-} \subseteq \{a, b\})$.

Remarque. Parmi ces conditions les trois premières sont aussi nécessaires, [2].

Démonstration. La fonction f est strictement croissante sur (a, b) car $f^+ > 0$. L'image d'un intervalle par f est aussi un intervalle. Notons $(c, d) = f((a, b))$ $(-\infty \leqslant c < d \leqslant \infty)$. Les points de discontinuité d_n de

f^+ sont de la première espèce, f^+ étant à variation bornée sur les $[\alpha_n, \beta_n]$ tels que $d_n \in [\alpha_n, \beta_n] \subset (a, b)$. La fonction f transforme les points de discontinuité et d'extrême pour f^+ en points de même espèce pour $(f^{-1})^+$, car on a $(f^{-1})^+(f(x)) = \dfrac{1}{f^+(x)}$, mais les points de maximum, de croissance ou de type $(+, +)$ et $(+, -)$ se transforment en points de minimum, de décroissance ou de type $(-, -)$ et $(-, +)$ et réciproquement. Laissons au lecteur la tâche de prouver que $\mathcal{D}''_{(f^{-1})^+} \subseteq \{c, d\}$.

Soit une partition de (c, d) :

$$c < \ldots < x_{-n} < \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots < d,$$

telle que chaque intervalle (x_i, x_{i+1}) contient un point unique y_i d'accumulation de points de discontinuité ou d'extrême relatif strict de $(f^{-1})^+$. Nous ferons attention à l'intervalle (x_i, y_i), où i est arbitraire, auquel nous attacherons une fonction g_i. Notons par $\{x_i^n\}$ la suite croissante des points de discontinuité ou d'extrême relatif strict pour $(f^{-1})^+$, situés dans (x_i, y_i). Prenons aussi $x_i^0 = x_i$. Nous avons $\lim\limits_{n\to\infty} x_i^n = y_i$.

Notons provisoirement $\mathcal{M}_M$ $(\mathcal{M}_m)$ l'ensemble des points de maximum (minimum) relatif strict et, en même temps, de continuité pour $(f^{-1})^+$ sur $[x_i, y_i)$, $\mathcal{M}_c^{++}$, $\mathcal{M}_c^{+-}$, etc. $(\mathcal{M}_d^{++}, \mathcal{M}_d^{+-}$, etc.) les ensembles des points de croissance (décroissance) et de type $(+, +)$, $(+, -)$, etc. Allons construire la fonction $g_i : [x_i, y_i) \to R$ ainsi

$$g_i(x) = \begin{cases} k_i^+ > 0 & \text{si} \quad x = x_i \\ g_i(x_i^m - 0) & \text{si} \quad x_i^m \in \mathcal{M}_M \cup \mathcal{M}_d^{+-} \cup \mathcal{M}_d^{--} \\ \dfrac{g_i(x_i^m - 0)\cdot (f^{-1})^+(x)}{(f^{-1})^+(x_i^m)} & \text{si} \quad x_i^m \in \mathcal{M}_m \cup \mathcal{M}_d^{++} \cup \mathcal{M}_d^{-+} \\ \dfrac{g_i(x_i^m - 0)\cdot (f^{-1})^+(x)}{(f^{-1})^+(x_i^m - 0)} & \text{si} \quad x_i^m \in \mathcal{M}_c^{++} \cup \mathcal{M}_c^{-+} \\ \dfrac{g_i(x_i^m - 0)\cdot (f^{-1})^+(x_i^m)}{(f^{-1})^+(x_i^m - 0)} & \text{si} \quad x_i^m \in \mathcal{M}_c^{+-} \cup \mathcal{M}_c^{--} \end{cases}$$

où $x_i^m = \max\limits_n \{x_i^n ;\ x_i^n \leqslant x\}$.

Nous construirons d'une manière analogue la fonction $h_i(x) : (y_{i-1}, x_i] \to R$. Pour ça, notons d'abord par $\{x_i^n\}$ la suite décroissante des points de discontinuité ou d'extrême relatif strict pour $(f^{-1})^+$ situés dans (y_{i-1}, x_i) et $x_i^0 = x_i$ (nous avons abandonné les notations utilisées pour définir $g_i(x)$; retenons pourtant les significations des ensembles $\mathcal{M}_M$, $\mathcal{M}_m$, $\mathcal{M}_c^{++}$, etc., en changeant seulement l'intervalle $[x_i, y_i)$ par $(y_{i-1}, x_i])$. Définissons :

$$h_i(x) = \begin{cases} k_i^- > 0 & \text{si } x = x_i \\ h_i(x_i^m) & \text{si } x_i^m \in \mathcal{M}_m \cup \mathcal{M}_d^{-+} \cup \mathcal{M}_d^{--} \\ \dfrac{h_i(x_i^m)\cdot(f^{-1})^+(x)}{(f^{-1})^+(x_i^m)} & \text{si } x_i^m \in \mathcal{M}_M \cup \mathcal{M}_c^{++} \cup \mathcal{M}_c^{+-} \\ \dfrac{h_i(x_i^m)\cdot(f^{-1})^+(x)}{(f^{-1})^+(x_i^m-0)} & \text{si } x_i^m \in \mathcal{M}_d^{++} \cup \mathcal{M}_d^{+-} \\ \dfrac{h_i(x_i^m)\cdot(f^{-1})^+(x_i^m-0)}{(f^{-1})^+(x_i^m)} & \text{si } x_i^m \in \mathcal{M}_c^{-+} \cup \mathcal{M}_c \end{cases}$$

où $x_i^m = \min\limits_n \{x_i^n;\ x_i^n > x\}$.

Nous avons tenu compte, aux deux constructions, que $(f^{-1})^+(x_i^m) = (f^{-1})^+(x_i^m + 0)$.

Ainsi construites, les fonctions g_i et h_i sont croissantes et tous leurs points de discontinuité sont de croissance et coïncident aux points de croissance de $(f^{-1})^+$. Nous avons maintenant l'intention de raccorder toutes les fonctions g_i et h_i. Il faut superposer ces deux familles de fonctions dans x_i et les prolonger par continuité dans y_i.

Démontrons que si $l_i^- = \lim\limits_{x\to y_i} g_i(x)$ (g_i étant définie sur $[x_i, y_i)$, le passage à la limite est fait par $x < y_i$), alors $0 < l_i^- < \infty$. L'existence de la limite (finie ou infinie) est assurée par la monotonie de g_i. L'inégalité $l_i^- > 0$ est évidente, car $l_i^- \geqslant k_i^+ > 0$. Pour montrer que $g_i(x_i^n)$ tend vers une limite finie quand $n\to\infty$, extrayons la suite partielle $\{g_i(x_{i}^{n_m})\}$ où $(x_i^{n_m}, x_i^{p_m})$ sont les intervalles de constance ou $x_i^{n_m} = x_i^{p_m}$ les points de discontinuité de g_i. L'étude de la construction de g_i nous procure la relation de récurrence

$$g_i(x_i^{n_m}) = \frac{g_i(x_i^{n_{m-1}})\cdot(f^{-1})^+(x_i^{n_m})}{(f^{-1})^+(x_i^{p_{m-1}} \pm 0)}$$

où

$$(f^{-1})^+(x_i^{p_{m-1}} \pm 0) = \min\{(f^{-1})^+(x_i^{p_{m-1}} - 0),\ (f^{-1})^+(x_i^{p_{m-1}} + 0)\},$$

donc

$$g_i(x_i^{n_m}) = \frac{g_i(x_i^{n_1})\cdot(f^{-1})^+(x_i^{n_2})\cdot\ldots\cdot(f^{-1})^+(x_i^{n_m})}{(f^{-1})^+(x_i^{p_1} \pm 0)\cdot(f^{-1})^+(x_i^{p_2} \pm 0)\cdot\ldots\cdot(f^{-1})^+(x_i^{p_{m-1}} \pm 0)}.$$

Notons

$$(f^{-1})^+(x_i^{n_{m+1}}) - (f^{-1})^+(x_i^{p_m} \pm 0) = a_m.$$

Alors

$$g_i(x_{i\,m}^n) = \frac{g_i(x_i^{n_1})\cdot[(f^{-1})^+(x_i^{p_1}\pm 0)+a_1]\cdot\ldots\cdot[(f^{-1})^+(x_{i\,m-1}^p\pm 0)+a_{m-1}]}{(f^{-1})^+(x_i^{p_1}\pm 0)\cdot\ldots\cdot(f^{-1})^+(x_{i\,m-1}^p\pm 0)}$$

ou

$$g_i(x_{i\,m}^n) = g_i(x_i^{n_1})\cdot\left[1+\frac{a_1}{(f^{-1})^+(x_i^{p_1}\pm 0)}\right]\cdot\ldots\cdot\left[1+\frac{a_{m-1}}{(f^{-1})^+(x_{i\,m-1}^p\pm 0)}\right].$$

Comme on le sait, le produit infini $g_i(x_i^{n_\infty})$ est convergent si la série $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{(f^{-1})^+(x_i^{p_j}\pm 0)}$, dont les termes sont tous positifs, est convergente. Choisissons l'intervalle $[\alpha, \beta]$ compact, tel que $(x_i, y_i)\subset[\alpha, \beta]\subset(a, b)$. Sur $[\alpha, \beta]$, $(f^{-1})^+$est à variation bornée, parce que f^+ a la borne inférieure strictement positive et est à variation bornée. f^+ est bornée, donc $(f^{-1})^+$ a la borne inférieure $b>0$. La série que nous avons trouvée est majorée par $\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ qui est convergente grâce à la variation bornée de $(f^{-1})^+$. Donc $\{g_i(x_i^n)\}$ est convergente vers $l_i^- < \infty$.

Démontrons maintenant que si $l_i^+ = \lim_{x\to y_i} h_{i+1}(x)$ (h_{i+1} étant definie sur $(y_i, x_{i+1}]$, on déduit $x > y_i$), alors $0 < l_i^+ < \infty$. Evidemment, $l_i^+ < \infty$ car $l_i^+ \leqslant k_{i+1}^-$. Il nous reste à montrer que la limite de la suite $\{h_i(x_i^n)\}$ est strictement positive (nous avons remplacé $i+1$ par i). Extrayons, de la même façon, la suite partielle $\{h_i(x_{i\,m}^n)\}$. Nous avons :

$$h_i(x_{i\,m}^n) = \frac{h_i(x_{i\,m-1}^n)\cdot(f^{-1})^+(x_{i\,m}^p)}{(f^{-1})^+(x_{i\,m-1}^n)\pm 0)},$$

donc

$$h_i(x_{i\,m}^n) = \frac{h_i(x_i^{n_1})\cdot(f^{-1})^+(x_i^{p_2})\cdot\ldots\cdot(f^{-1})^+(x_{i\,m}^p)}{(f^{-1})^+(x_i^{n_1}\pm 0)\cdot\ldots\cdot(f^{-1})^+(x_{i\,m-1}^n\pm 0)}.$$

Nous prouvons d'une manière analogue que $\left\{\frac{1}{h_i(x_{i\,m}^n)}\right\}$ tend vers une limite finie, donc $\{h_i(x_{i\,m}^n)\}$ est convergente vers $l_i^+ > 0$.

On voit facilement que l_i^- (l_i^+) est proportionnel à k_i^+ (k_{i+1}^-) parce que

$$g_i(x_i^{n_1}) = \left\{\begin{array}{c} k_i^+ \\ \text{ou} \\ \dfrac{k_i^+\cdot(f^{-1})^+(x_i^{n_1})}{(f^{-1})^+(x_i)} \end{array}\right.,$$

(de même pour $h_i(x_i^{n_1})$).

Choisissons $k_0^+ = k_0^-$ arbitraire. Après la construction de g_0 et h_0, nous obtenons l_0^- et l_{-1}^+. Si la construction déjà montrée pour g_{-1} et h_1 nous conduit, en choisissant respectivement $k_{-1}'^+$ et $k_1'^-$, à $l_{-1}'^-$ et $l_0'^+$, nous remplaçons $k_{-1}'^+$ par $k_{-1}^+ = \frac{k_{-1}'^+\cdot l_{-1}^+}{l_{-1}'^-}$ et $k_1'^-$ par $k_1^- = \frac{k_1'^-\cdot l_0^-}{l_0'^+}$, pour lesquels nous sommes conduits à $l_{-1}^{-}=l_{-1}^{\pm}$ et $l_0^{+}=l_0^{-}$. On peut prolonger ainsi le raccordage sur l'intervalle (c, d) entier. On a obtenu la fonction $F_k : (c, d) \to R$ croissante sur (c, d) et proportionnelle à k. Evidemment, l'intégrale Riemann $\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} F_k(t)dt$ $(x \in (c, d))$ existe et on a $\Phi' = F_k$ sur tout intervalle de continuité de F_k. La fonction Φ est strictement croissante et continue, donc inversable. Posons $\psi = \Phi^{-1}$. Si $a' = \lim\limits_{x\to c} \Phi(x)$ et $b' = \lim\limits_{x\to d} \Phi(x)$ $(-\infty \leqslant a' < b' \leqslant \infty)$, alors $\psi : (a', b') \to (c, d)$. La fonction ψ est strictement croissante et concave car ψ est continue et $\psi'(x) = \dfrac{1}{\Phi'(\psi(x))} = \dfrac{1}{F_k(\psi(x))}$ est définie et décroissante sur la réunion des intervalles de continuité de $F_k(\psi(x))$. Construisons la fonction $\varphi(x) = \Phi(f(x))$. Cette fonction, $\varphi : (a, b) \to (a', b')$, est continue (de même que f et Φ) et strictement croissante ; démontrons qu'elle est convexe. En effet, la construction de F_k a été faite ainsi que la fonction $\dfrac{F_k}{(f^{-1})'}$ soit croissante sur tout l'ensemble de définition — la réunion des intervalles de coutinuité de $(f^{-1})^{+}$. Donc

$$\varphi'(x) = \Phi'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{F_k(f(x))}{(f^{-1})'(f(x))}$$

est croissante sur l'image de la réunion précitée par f^{-1}. On déduit la convexité de φ sur (a, b).

Nous avons ainsi construit les fonctions φ convexe et strictement croissante, ψ concave et strictement croissante, telles que $\psi(\varphi(x)) = \Phi^{-1}(\Phi(f(x))) = f(x)$, donc f est du type K.

En faisant remarquer qu'on pourrait procéder d'une manière analogue si l'on utilisait f^{-} à la place de f^{+}, la démonstration du théorème est finie.

4. EXEMPLE

Nous croyons utile de donner un exemple, peut-être le plus simple possible, de fonction qui satisfait à nos conditions, donc qui est du type K, mais qui ne satisfait pas aux conditions imposées dans les théorèmes de G. Szekeres et S. Marcus.

Une telle fonction est $f : (a,b) \to R$, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} m_1(x-\xi) & \text{si } x \leqslant \xi \\ m_2(x-\xi) & \text{si } x > \xi, \end{cases}$$

où $a < \xi < b$ et $0 < m_1 < m_2 < \infty$. En effet, on voit facilement que f répond aux demandes du théorème 1, mais f' n'est pas définie dans ξ, donc f'' n'existe pas dans ce point.

5. LES CLASSES DES FONCTIONS φ ET ψ

Comme nous l'avons déja promis, nous allons préciser les ensembles des fonctions φ et ψ ; il n'y a pas seulement les classes restreintes, mises en évidence par la démonstration constructive du théorème précédent.

Notations. Dès maintenant, les significations des fonctions φ et ψ seront celles contenues dans la définition de l'appartenance au type K. Considérons la fonction F_k, dont on parle dans la démonstration précédente et la fonction croissante et strictement positive $h : (c, d) \to R$, autrement arbitraire. Notons $\Psi(x) = \int_{x_0}^{x} F_k(t)\cdot h(t)\,dt + C$ où $x_0, x \in (c,d)$ et C est une constante arbitraire. L'intégrale Riemann utilisée existe grâce à la monotonie de $F_k \cdot h$.

THÉORÈME 2. *Si les conditions du théorème 1 sont remplies pour la fonction $f : (a, b) \to (c, d)$, donc elle est du type K, alors*

$$\varphi(x) = \Psi(f(x)) \quad et \quad \psi(x) = \Psi^{-1}(x).$$

Remarque. Il faut noter avant de donner la démonstration, afin que le théorème ait du sens, le fait assez simple, mais indispensable, que le résultat de ce théorème ne dépend pas du choix de k, parce que la classe des fonctions $F_k \cdot h$ coïncide à la classe des fonctions $F_{k'} \cdot h$ car $F_k \cdot h = F_{k'} \cdot \frac{k}{k'} \cdot h$.

Démonstration. Prouvons d'abord que les deux fonctions φ et ψ, construites dans l'énoncé, sont vraiment, l'une convexe et l'autre concave. En répétant le raisonnement fait à l'occasion de la démonstration du théorème 1, nous remarquons qu'on a :

$$\varphi'(x) = \Psi'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{F_k(f(x)) \cdot h(f(x))}{(f^{-1})'(f(x))}$$

sur l'intervalle (a, b), sauf l'ensemble dénombrable des points dont les images par f sont les discontinuités de $(f^{-1})^{+}$ ou h, donc φ' est croissante sur cet ensemble et φ est convexe. D'autre part, on a

$$\psi'(x) = \frac{1}{\Psi'(\psi(x))} = \frac{1}{F_k(\psi(x)) \cdot h(\psi(x))}$$

sur la réunion des intervalles de continuité de $F_k(\psi(x))$, sauf les discontinuités de $h(\psi(x))$, donc ψ' est décroissante sur le même ensemble et ψ est concave partout sur (c,d). Le fait que φ et ψ sont strictement croissantes et que $f = \psi(\varphi(x))$ est évident.

Démontrons maintenant que les deux formes dont il s'agit épuisent toutes les fonctions φ et ψ possibles. Supposons que $\varphi(x) \neq \Psi(f(x))$. On peut alors écrire $\varphi(x) = \overline{\Psi}(f(x))$. Il suit immédiatement que $\overline{\Psi}$ est continue et convexe sur (c, d). Donc $\overline{\Psi}$ est presque partout dérivable et

$\overline{\Psi}^+$ existe partout. On peut écrire que $\overline{\Psi}(x) = \int_{x_0}^{x} \overline{\Psi}^+(t)\,\mathrm{d}t + C'$, où x_0, $x \in (c, d)$ pour une constante C' convenable, car sur l'ensemble $(c,d)-E$ (où E est un ensemble dénombrable) des points de continuité de $\overline{\Psi}^+$, on a $\left(\int_{x_0}^{x} \overline{\Psi}^+(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \overline{\Psi}^+(x) = \overline{\Psi}'(x)$, donc l'intégrale et $\overline{\Psi}(x)$ diffèrent par une constante sur (c, d).

De ce que nous avons supposé, il s'ensuit que $\overline{\Psi}^+(x) \neq F_k(x)\cdot h(x)$. Mais nous pouvons trouver la fonction $\overline{h}$ telle que $\overline{\Psi}^+(x) = F_k(x)\cdot\overline{h}(x)$, parce que $F_k > 0$. Il y a deux points x', $x'' \in (c, d)$, $x' < x''$, tels que $\overline{h}(x') > \overline{h}(x'')$.

Comme Ψ^+ n'a pas de points de décroissance, la fonction $\overline{h}$ est susceptible d'en posséder seulement dans le point $x_{i^m}^n$ de discontinuité de $(f^{-1})^+$, mais, si c'était vrai, alors on aurait

$$\frac{F_k(x_{i^m}^n - 0)\cdot h(x_{i^m}^n - 0)}{(f^{-1})^+(x_{i^m}^n - 0)} > \frac{F_k(x_{i^m}^n)\cdot h(x_{i^m}^n + 0)}{(f^{-1})^+(x_{i^m}^n)},$$

donc $\overline{\Psi}^+(x_{i^m}^n - 0)\cdot f^+(f^{-1}(x_{i^m}^n - 0)) > \overline{\Psi}^+(x_{i^m}^n + 0)\cdot f^+(f^{-1}(x_{i^m}^n))$, d'où $\varphi^+(f^{-1}(x))$ posséderait le point de décroissance $x_{i^m}^n$ et φ ne serait pas convexe sur (a, b).

On conclut que $\overline{h}$ n'a pas de points de décroissance (de même que $\overline{\Psi}^+$) ; donc, il y a dans un intervalle $(x_{i^m}^n, x_{i^m}^p)$ ou $(x_{i^m}^p, x_{i^{m+1}}^n)$ (ici nous avons utilisé des notations introduites au cours de la démonstration du théorème 1), les points y' et y'', $y' < y''$, tels que $\overline{h}(y') > \overline{h}(y'')$. Si y', $y'' \in (x_{i^m}^n, x_{i^m}^p)$, nous obtenons l'absurdité $\Psi^+(y') > \overline{\Psi}^+(y'')$. Si y', $y'' \in (x_{i^m}^p, x_{i^{m+1}}^n)$, alors

$$\frac{F_k(y')\cdot\overline{h}(y')}{(f^{-1})^+(y')} > \frac{F_k(y'')\cdot\overline{h}(y'')}{(f^{-1})^+(y'')}$$

ou

$$\overline{\Psi}^+(y')\cdot f^+(f^{-1}(y')) > \overline{\Psi}^+(y'')\cdot f^+(f^{-1}(y'')),$$

donc

$$\varphi''(f^{-1}(y')) > \varphi''(f^{-1}(y'')), \quad \text{où} \quad f^{-1}(y') < f^{-1}(y''),$$

ce qui est absurde.

Il résulte que $\varphi(x) = \Psi(f(x))$. D'une manière semblable, on prouve qu'on a $\psi(x) = \Psi^{-1}(x)$; le théorème est démontré.

6. UNE PROPRIÉTÉ DE LA FONCTION ψ

Notations. Posons $\overline{\varphi}$ et $\overline{\psi}$ les fonctions utilisées à la définition du type K et faisant partie de la classe restreinte, comme nous l'avons déjà qualifié, construite à la démonstration du théorème 1. Soit $E = \{\nu \in$

(c,d) ; il y a $x \in (a'_\psi, b'_\psi)$, $y \in (a'_{\bar\psi}, b'_{\bar\psi})$ tels que $\psi(x) = \bar\psi(y) = \nu$ et $\psi^+(x) = \bar\psi^+(y)\}$ où $(a'_\psi, b'_\psi) = \psi^{-1}((c, d))$ et $(a'_{\bar\psi}, b'_{\bar\psi}) = \bar\psi^{-1}((c, d))$.

THÉORÈME 3. *L'ensemble E est vide ou formé d'un intervalle fermé à gauche, réduit peut-être à un point.*

Remarque. On pourrait donner un théorème semblable si on changeait E par un ensemble analogue, défini à l'aide des ψ^- et $\bar\psi^-$, et le mot « gauche » par « droite ».

Démonstration. La fonction $h' = \dfrac{(\psi^{-1})^+}{(\bar\psi^{-1})^+}$ est croissante sur (c, d) car la fonction h, dont on parle avant le théorème 2, et h' coïncident sur (c, d) sauf l'ensemble des points δ de discontinuité, où $h(\delta) = \lim\limits_{\substack{x \to \delta \\ x > \delta}} h'(x)$. Alors $h^* \neq 1$ (c'est possible même quand il y a $\lambda, \mu \in (c, d)$ où $h'(\lambda) < 1 < h'(\mu)$, car h^* n'a pas la propriété de Darboux) ou $h^* = 1$ dans un point ou sur un (seul) intervalle (ξ, η). Mais $h'(\xi) = \lim\limits_{\substack{x \to \xi \\ x > \xi}} h'(x) = 1$, donc $h^* = 1$ sur $[\xi, \eta)$. Si h^* est continue (ou discontinue) dans η, alors l'ensemble E^*, où $h^* = 1$, est $[\xi, \eta]$ (ou $[\xi, \eta)$). C'est l'ensemble E parce qu'il y a pour tout $\nu \in E^*$, $x = \psi^{-1}(\nu)$ et $y = \bar\psi^{-1}(\nu)$ tels que $\psi(x) = \bar\psi(y)$ et $\dfrac{\psi^+(x)}{\bar\psi^+(y)} = \dfrac{(\bar\psi^{-1})^+(\nu)}{(\psi^{-1})^+(\nu)} = 1$; réciproquement, on voit que $\psi^+(\psi^{-1}(\nu)) \neq \bar\psi^+(\bar\psi^{-1}(\nu))$ pour $\nu \notin E$.

Laissons au lecteur l'établissement d'un théorème analogue au théorème 3, concernant les fonctions φ et $\bar\varphi$ à la place de ψ et $\bar\psi$.

7. NOUVELLE PRÉCISION DES FONCTIONS φ ET ψ

Etant donnée une fonction ψ, remarquons qu'il y a toujours une fonction $\bar\psi_\tau$ telle que $(\psi^{-1})^+ = (\bar\psi_\tau^{-1})^+$ dans un $\tau \in (c, d)$ arbitrairement choisi, parce que $(\bar\psi^{-1})^+ = F_k$ et on peut changer éventuellement l'indice k.

THÉORÈME 4. *Dans les conditions du théorème 1, la classe des fonctions ψ coïncide à celle des fonctions ψ^* telles que $(\psi^{*-1})^+$ existe et, pour chaque $\tau \in (c, d)$, si $(\psi^{*-1})^+(\tau) = (\bar\psi_\tau^{-1})^+(\tau)$, alors $(\psi^{*-1})^+(\nu) \leqslant (\bar\psi_\tau^{-1})^+(\nu)$ pour $\nu < \tau$ (et $(\psi^{*-1})^+(\nu) \geqslant (\bar\psi_\tau^{-1})^+(\nu)$ pour $\nu > \tau$).*

Remarque. De ce théorème on déduit immédiatement que la fonction $\operatorname{sign}[(\psi^{*-1})^+(x) - (\bar\psi_\tau^{-1})^+(x)]$ est croissante sur (c, d). Cette condition est aussi nécessaire et suffisante pour l'équivalence des classes des fonctions ψ et ψ^*.

Démonstration. Soit une fonction ψ. Rappelons que $h^* = \dfrac{(\psi^{-1})^+}{(\bar\psi^{-1})^+}$ est croissante ; alors $h^*_\tau = \dfrac{(\psi^{-1})^+}{(\bar\psi_\tau^{-1})^+}$ est aussi croissante et $h^*_\tau(\tau) = 1$. On déduit les relations de l'énoncé et que $\operatorname{sign}[(\psi^{-1})^+(x) - \bar\psi_\tau^{-1})^+(x)]$ est croissante sur (c, d).

Réciproquement, considérons une fonction $\psi^{\star}$ jouissant de la propriété énoncée. Démontrons qu'elle est une ψ. Supposons que $\overline{h}^{\star} = \frac{(\psi^{\star\,-1})^{+}}{(\overline{\psi}^{-1})^{+}}$ n'est pas croissante. Alors il y a $\xi, \zeta \in (c, d)$ tels que $\xi < \zeta$ et $\overline{h}^{\star}(\xi) > \overline{h}^{\star}(\zeta)$. En suivant l'observation qui précède le théorème 3, on peut décider qu'il existe $\overline{\psi}_{\zeta}$ telle que $(\overline{\psi}_{\zeta}^{-1})^{+}(\zeta) = (\psi^{\star\,-1})^{+}(\zeta)$. Il s'ensuit que, pour la fonction $\overline{h}_{\zeta}^{\star} = \frac{(\psi^{\star\,-1})^{+}}{(\overline{\psi}_{\zeta}^{-1})^{+}}$, nous avons $\overline{h}_{\zeta}^{\star}(\xi) > \overline{h}_{\zeta}^{\star}(\zeta) = 1$, donc $(\psi^{\star\,-1})^{+}(\xi) > (\overline{\psi}_{\zeta}^{-1})(\xi)$, ce qui contredit l'hypothèse.

On pourrait démontrer de la même manière le théorème suivant concernant la fonction φ :

THÉORÈME 4'. *Supposons que les conditions du théorème 1 sont remplies. Les fonctions* φ *coïncident aux fonctions dérivables à droite* $\varphi^{\star} : (a, b) \rightarrow R$, *telles que pour chaque* $\rho \in (a, b)$, *si* $\varphi^{\star\,+}(\rho) = \overline{\varphi}^{+}(\rho)$, *alors* $\varphi^{\star\,+}(\iota) \leqslant \overline{\varphi}^{+}(\iota)$ *pour* $\iota < \rho$ *(et* $\varphi^{\star\,+}(\iota) \geqslant \overline{\varphi}^{+}(\iota)$ *pour* $\iota > \rho$).

Mais laissons aussi au lecteur le soin de faire la démonstration détaillée.

Nous finissons en faisant remarquer que ce sujet-ci est très loin d'être épuisé et que l'établissement d'un théorème de nécessité et suffisance pour l'appartenance au type K constituerait, par exemple, un progrès réel.

Manuscrit reçu à la rédaction le 17 avril 1964.

Faculté de Mathématiques et Mécanique
de l'Université de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. G. SZEKERES, *On a property of monotone and convex functions.* Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, 351–3.
2. S. MARCUS, *Sur un théorème de G. Szekeres, concernant les fonctions monotones et convexes.* Can. J. Math., 1959, **11**, 521–6.