DESPRE PREDAREA ASEMĂNĂRII TRIUNGHIURILOR

T. ZAMFIRESCU și D. PAPADOPOL

Este știut că, după ce elevii și-au format o idee intuitivă, vagă, despre un anumit obiect matematic, stabilirea unei definiții pentru acesta ridică probleme delicate pentru profesori și autorii de manuale. Desigur că la nivelul unei mai înalte ținute matematice, aceste probleme dispar, întrucît a cunoaște obiectul nu va însemna altceva decît a fi în posesia unei definiții a lui; însă, în faza de început a dezvoltării gîndirii matematice a elevilor, întinsă pe o însemnată parte a anilor de școală, este indiscutabil util să se folosească ideile care există deja în mintea elevilor, cărora să li se dea apoi o formă matematică abstractă.

Dar formularea riguroasă a definiției, precedată de stăpînirea intuitivă, senzorială, trebuie făcută într-un adevărat spirit matematic, fără ambiguități și fără repetiții; ea trebuie să servească drept model în acest sens. Reamintim, căci nu este pentru prima oară cînd se dă acest exemplu, că oricine pricepe imediat ce înseamnă, de pildă, o linie frîntă, parcurgînd rapid faza intuirii obiectului*). Dacă definiția care urmează a i se da nu este pe deplin riguroasă, ea devine cu totul de prisos.

Se știe că, prin intermediul unor teoreme de necesitate și suficiență, pot fi obținute definiții echivalente cu o definiție dată, iar prin intermediul unor teoreme de necesitate se obțin însușiri ale obiectului definit. Dacă, sub titlul de definiție, sînt înglobate, pe lîngă o definiție a unui obiect matematic, și alte definiții echivalente, precum și diverse însușiri ale obiectului respectiv, se obține, desigur, tot o definiție echivalentă cu prima. Dar este nelogic, cel puțin din motive economice, să se înglobeze într-o definiție mai mult decît strictul necesar. Repetăm, acest strict necesar nu este unic și doar motive pedagogice, estetice sau de altă natură, în orice caz nu pur matematice, ne pot face să-l preferăm în locul unei alte definiții echivalente, restrînsă și ea la minimum.

În privința triunghiurilor asemenea, manualele noastre dau următoarea definiție:

Două triunghiuri sînt asemenea dacă unghiurile unuia din ele sînt respectiv egale cu unghiurile celuilalt, iar laturile lor omoloage sînt proporționale.

Este limpede că definiția aceasta cuprinde mai mult decît strictul necesar pentru definirea triunghiurilor asemenea. Anume, sînt reunite trei definiții echivalente într-o singură exprimare. Desigur că autorii au compus în acest fel definiția despre care este vorba cu grija de a păstra analogia cu cazul poligoanelor oarecare. Dorința de a păstra această analogie, care de altfel nu se poate întinde prea departe, poate determina complicarea definiției în cazul triunghiurilor?

Ar fi poate preferabil ca asemănarea triunghiurilor să fie tratată în urma asemănării poligoanelor oarecare, din pricina acelui „serios dezavantaj" că „asemănarea triunghiurilor poate fi stabilită prin simple considerații asupra unghiurilor"**), însă, dacă se începe totuși cu asemănarea triunghiurilor, lucrurile se schimbă și dezavantajul de mai sus se schimbă într-un avantaj, anume acela al trecerii treptate de la particular la general, de la mai simplu la mai complicat.

Expunem în cele ce urmează un mod de prezentare a începutului capitolului consacrat triunghiurilor asemenea.

Omitem de a face aici introducerea — desigur necesară — pe o cale cît mai intuitivă, a figurilor și apoi a triunghiurilor asemenea.

Definiție. Două triunghiuri sînt asemenea dacă au unghiurile respectiv egale.

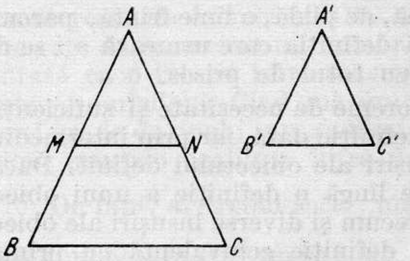
---

*) vezi A. Hollinger, „Definiția poligoanelor asemenea", G.M.-A, nr. 7/1964.
**) vezi H. Frendenthal, „Inițierea în geometrie, II", G.M.-A, nr. 3/1958.

Pentru a uşura scrierea, introducem următoarea notaţie: „triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul $A'B'C'$" se va scrie: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Teoremă. Dacă două triunghiuri sînt asemenea, atunci ele au laturile omoloage proporţionale*).

Demonstraţie. Fie $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Din definiţia dată rezultă că $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ şi $\hat{C} = \hat{C}'$. Purtăm pe AB un segment $AM = A'B'$. Ducem din M o paralelă la BC şi notăm cu N punctul ei de intersecţie cu latura AC. Conform teoremei lui T a l e s,



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

Avem prin ipoteză $\hat{A} = \hat{A}'$, iar prin construcţie $AM = A'B'$. În acelaşi timp, din egalităţile $\widehat{AMN} = \hat{B}$ (ca unghiuri corespondente) şi $\hat{B} = \hat{B}'$ (prin ipoteză) rezultă că $\widehat{AMN} = \hat{B}'$. Conform cazului II de egalitate a triunghiurilor, $\Delta AMN = \Delta A'B'C'$, deci $AN = A'C'$.

Prin urmare

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}. \qquad (1)$$

În mod analog,

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}. \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2), obţinem:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}, \quad |\text{c.c.t.d.}$$

Raportul a două laturi omoloage din două triunghiuri asemenea se numeşte raport de asemănare.

Următoarele trei propoziţii, care dau condiţii suficiente pentru asemănare sînt cunoscute sub numele de cazuri de asemănare**).

Cazul I. Dacă două triunghiuri au cîte două unghiuri respectiv egale, atunci ele sînt asemenea.

*) În expunerea clasică această teoremă se demonstrează în cadrul cazului I de asemănare.

**) Datorită faptului că am dat o altă definiţie triunghiurilor asemenea, teorema fundamentală a asemănării (o paralelă la una din laturile unui triunghi determină un triunghi asemenea cu cel dat) devine banală.

De asemenea, cele trei cazuri de asemănare vor avea demonstraţii diferite de cele din manuale.

Demonstrația este imediată. Fie ΔABC, $\Delta A'B'C'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ și $\hat{C} = \hat{C}'$. Știind că suma unghiurilor unui triunghi este de 180°, obținem $\hat{A} = \hat{A}'$ și, conform definiției, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, c.c.t.d.

Cazul II. Dacă două triunghiuri au cîte două laturi respectiv proporționale, iar unghiurile dintre ele egale, atunci ele sînt asemenea.

Demonstrație. Considerăm ΔABC și $\Delta A'B'C'$ și fie $\hat{A} = \hat{A}'$ și $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$. Așezăm latura $A'B'$ peste latura AB, vîrful A' venind în A, iar B' în M. Pentru că $\hat{A} = \hat{A}'$, latura $A'C'$ se va suprapune pe AC, punctul C' venind în N. Înlocuind în relația dată în ipoteză, $A'B'$ prin AM și $A'C'$ prin AN, obținem

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

Conform reciprocei teoremei lui Tales, dreptele MN și BC sînt paralele și atunci $\widehat{AMN} = \hat{B}$ și $\widehat{ANM} = \hat{C}$, ca unghiuri corespondente. Dar, pe baza cazului I de egalitate a triunghiurilor, $\Delta AMN = \Delta A'B'C'$ și deci $\widehat{AMN} = \hat{B}'$ și $\widehat{ANM} = \hat{C}'$. Deci $\hat{B} = \hat{B}'$ și $\hat{C} = \hat{C}'$; atunci din definiția asemănării triunghiurilor rezultă că $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, c.c.t.d.

Cazul III. Dacă două triunghiuri au laturile respectiv proporționale, ele sînt asemenea.

Demonstrație. Fie din nou ΔABC și $\Delta A'B'C'$, de această dată satisfăcînd egalitățile:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}.$$

Purtăm pe AB un segment $AM = A'B'$; prin M ducem o paralelă la BC și notăm cu N punctul ei de intersecție cu AC.

Conform teoremei lui Tales are loc relația

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \tag{3}$$

Se observă că ΔAMN și ΔABC, avînd unghiul A comun și două laturi respectiv proporționale (relația (3)), sînt, conform cazului II de asemănare, triunghiuri asemenea. Egalînd rapoartele între laturi conform teoremei anterioare, și ținînd seama că $AM = A'B'$, obținem

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}. \tag{4}$$

Comparînd egalitățile (4) cu cele din ipoteză, rezultă că $AN = A'C'$ și $MN = B'C'$. În baza cazului III de egalitate a triunghiurilor, $\Delta AMN = \Delta A'B'C'$; dar $\Delta AMN \sim \Delta ABC$, deci $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, c.c.t.d.

Toate cele trei cazuri de asemănare furnizează totodată și condiții necesare pentru asemănare, primul în mod evident, iar celelalte două în virtutea teoremei anterioare.