CONSTRUCTIBILITATEA CU RIGLA, COMPASUL ŞI TRISECTORUL

TUDOR ZAMFIRESCU

§ 0. Introducere

Există două mari categorii de probleme în geometria elementară : cele care cer demonstrarea unui fapt geometric şi cele care cer construcţia unei figuri geometrice.

Referindu-ne la prima categorie, s-au strîns în lungul timpurilor numeroase probleme particulare ale căror demonstraţii erau foarte variate, lipsite de o metodă comună, general aplicabilă. În 1736, Descartes ne dă o astfel de metodă prin crearea geometriei analitice — joncţiune a geometriei cu algebra. Apariţia unei asemenea metode, după diversele rezolvări particulare seamănă cu apariţia într-o ştiinţă a naturii a unei teorii generale — fruct al diverselor experienţe care o preced şi sprijin pentru cele viitoare. În cadrul celei de-a doua categorii au apărut deja o serie întreagă de probleme, rezolvate în chipurile cele mai diverse. Multe dintre aceste probleme au fost puse în faţa oamenilor de către tehnică ; unele dintre ele nu au putut fi rezolvate. Se pune deci şi problema mai generală a rezolubilităţii problemelor de construcţii. Toate aceste probleme particulare au impus clădirea unei teorii generale relative la problemele incluse în a doua categorie. Vom prezenta aici unele aspecte ale acestei teorii.

În rezolvarea unei probleme de construcţii se parcurg trei etape : prima, în care trebuie precizat de ce instrumente avem dreptul să ne servim şi ce anume operaţii se pot executa cu aceste instrumente, apoi aceea în care cercetăm rezolubilitatea problemei şi, desigur doar dacă ne-am convins în a doua etapă de posibilitatea construcţiei, se trece la cea de-a treia, în care efectuăm această construcţie.

§ 1. Construcţii cu rigla şi compasul

Fie dată configuraţia geometrică plană $\mathcal{F}$ şi relaţiile $\mathfrak{R}$ dintre $\mathcal{F}$ şi configuraţia de construit $\mathcal{G}$. Dorim să realizăm algebrizarea problemei adică înlocuirea figurilor $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{G}$ prin mulţimile de numere F şi G, care le caracterizează, şi algebrizarea lui $\mathfrak{R}$. Trebuie ales în acest scop, un sistem de referinţă, de pildă cel cartezian. Între punctele ce compun configuraţiile $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{G}$ şi perechile de numere reale reprezentînd coordonatele lor se stabileşte o corespondenţă biunivocă. Dar, pînă şi în cele mai simple cazuri, bunăoară dacă $\mathcal{F}$ este o dreaptă, găsim mulţimi infinite de perechi de numere asociate. Putem alege atunci numai atîtea puncte ale lui $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{G}$ cîte sînt strict necesare ca ele să fie perfect determinate? Imperfecţiunea instrumentelor de care ne servim, în sensul că, de exemplu, cu rigla nu putem duce nici un arc de cerc, ne determină să ne mulţumim cu determinarea atîtor puncte din $\mathcal{G}$ cîte am stabilit că sînt necesare. Dar dacă sînt date gata trasate curbele din $\mathcal{F}$ (aflîndu-se printre ele şi curbe netrasabile cu instrumentul dat), aceasta — deşi departe de a echivala cu cunoaşterea infinităţii de perechi de numere despre care am vorbit — reprezintă totuşi mai mult decît cunoaşterea doar a unor puncte ce determină $\mathcal{F}$. În lucrarea de faţă nu ne vom ocupa însă, decît în mod excepţional (teorema 4, § 1) de cazul acesta aşa că ne limităm la considerarea problemelor în care $\mathcal{F}$ este dată prin o mulţime de curbe trasabile cu instrumentele date.

Deci, răspunsul la întrebare este (în cazul acesta) afirmativ. Metodele înfățișate în continuare nu subsistă în general, decît dacă mulțimile de numere F și G sînt finite. Iată de ce nu vom lua în considerare decît configurațiile $\mathcal{F}$ și $\mathcal{G}$ alcătuite dintr-un număr finit de curbe algebrice de grad finit.

Teorema 1. *Dacă $\mathcal{F}$ (sau $\mathcal{G}$) este alcătuită din a_0 puncte, a_1 drepte,... ..., a_n curbe de gradul n, atunci puterea mulțimii de numere F (sau G) este cel mult* $2a_0 + \sum_{j=1}^{n} j(j+3)a_j$.

Demonstrație. Cele a_0 puncte corespund biunivoc la a_0 perechi de numere, iar o curbă algebrică de grad m este determinată de $\frac{m\,(m+3)}{2}$ condiții independente, de pildă acelea de a trece prin tot atîtea puncte, cărora le corespund $m\,(m+3)$ numere. Se însumează pentru toate punctele și curbele figurii. Dacă toate numerele obținute mai sus sînt distincte, atunci avem egalitate. În caz contrar, deoarece în F sau G numerele nu se repetă, avem inegalitate.

Înțelegem prin *riglă*, un instrument cu ajutorul căruia două puncte pot fi unite printr-o linie dreaptă, iar prin *compas*, acel instrument cu care se poate trasa un cerc cu centrul într-un punct dat și cu raza cît distanța între două puncte date.

Convenim să considerăm cunoscute punctele de intersecție sau tangență a două curbe date ori construite, trasate continuu.

Considerăm o problemă de construcție cu rigla și copasul ce satisface ipotezele teoremei precedente. Construim cu cele două instrumente, în planul figurii date, sistemul cartezian de coordonate. Cele patru grade de libertate pe care le avem la dispoziție (trei grade pentru cele două axe rectangulare și un grad pentru unitate) permit să înlocuim două puncte esențiale ale lui $\mathcal{F}$ prin (0,0) și (1,0). Dar cu rigla și compasul nu se pot face măsurători. Dacă $\mathcal{F}$ conține mai mult decît două puncte esențiale, unele numere din F rămîn necunoscute. În funcție de ele se pot calcula însă, numerele din G, în baza relațiilor $\mathfrak{R}$, transpuse algebric.

Să însemnăm prin Λ_0 cel mai mic corp numeric ce include mulțimea F, cu alte cuvinte corpul obținut prin adjuncția numerelor din F la corpul Q al numerelor raționale.

Teorema 2. *Condiția necesară și suficientă ca o problemă să fie rezolubilă cu rigla și compasul este existența lanțului de extinderi*

$$\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \ldots \subset \Lambda_{n-1} \subset \Lambda_n,$$

astfel încît

$$\Lambda_n \supset G \text{ iar } [\Lambda_m : \Lambda_{m-1}] = 2 \,(m = 1, \ldots, n) \text{ [1]}.$$

Demonstrație. Să demonstrăm necesitatea condiției. Considerăm folosirea riglei. Cu ea se unesc două puncte cunoscute (a_1, b_1), (a_2, b_2) printr-o dreaptă ai cărei coeficienți se află, evident, în $Q\,(a_1, b_1, a_2, b_2)$. Să considerăm folosirea compasului. Cu acesta se trasează un cerc de rază egală cu distanța dintre două puncte cunoscute (a_1, b_1), (a_2, b_2) și cu centrul într-un punct cunoscut (a_3, b_3). Ecuația cercului este $(x-a_3)^2 + (y-b_3)^2 = (a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2$, deci are coeficienții în $Q\,(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3)$. Prin astfel de trasări de drepte și cercuri se obțin puncte de intersecție ale căror coordonate sînt soluţiile sistemelor de cîte două ecuaţii reprezentînd curbele concurente. Intersectînd două drepte rezolvăm un sistem de ecuaţii liniare cu corpul coeficienţilor C_1 şi soluţia (a, b); avem $a,b \in C_1$. Prin interecţia unei drepte cu un cerc, dacă corpul coeficienţilor este C_2, găsim soluţiile (a, b), (a', b'), cu $a, b, a', b' \in C_2$ sau cu $[C_2(a, b, a', b') : C_2] = 2$. Intersecţiile a două cercuri cu coeficienţi în C_3 coincid cu intersecţiile unuia dintre ele cu axa radicală, ai cărei coeficienţi sînt tot în C_3, problema reducîndu-se astfel, la cazul precedent. Deci, dacă construcţia este posibilă, înseamnă că există un lanţ de extinderi

$$\Lambda_0 \subset \ldots \subset \Lambda_n, \text{ cu } G \subset \Lambda_n \text{ şi } [\Lambda_m : \Lambda_{m-1}] = 2 \ (m = 1, \ldots, n).$$

Trecem la demonstrarea suficienţei condiţiei. Pentru aceasta să ne amintim mai întîi că orice extindere algebric generată a lui Q este un spaţiu vectorial peste cîmpul Q şi să demonstrăm apoi că orice element al ei este constructibil cu rigla şi compasul dacă i se cunoaşte o bază. În adevăr, un element arbitrar α se scrie în raport cu baza $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ ca o combinaţie liniară $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \beta_i \ (c_i \in Q)$ constructibilă cu rigla şi compasul. Un corp ale cărui elemente pot fi construite cu instrumentele considerate îl vom denumi constructibil. Fie corpul constructibil P şi extinderea sa $P^* \supset P$, astfel ca $[P^* : P] = 2$. Să dovedim că şi P^* este constructibil. În adevăr, fie β un element oarecare al lui P^*. El are cel mult gradul 2 peste P; deci, există $a_0, a_1, a_2 \in P$ astfel încît $a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 = 0$, de unde

$$\beta = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

sau $\beta = b_1 + b_2\sqrt{b_3}$, unde $b_1, b_2, b_3 \in P$ sînt constructibile, deci şi β este constructibil. Prin urmare, corpul P^* este constructibil. Din cele arătate mai sus urmează că întreg corpul Λ_0 este constructibil, la fel ca întreg lanţul de supracorpuri $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$. Rezultă că şi numerele din $G \subset \Lambda_n$ sînt constructibile cu rigla şi compasul.

Nu trecem mai departe înainte de a aminti că orice problemă rezolubilă cu rigla şi compasul poate fi rezolvată cu compasul singur [4]. Evident, ne vom mulţumi cu aflarea a două puncte de pe o dreaptă în locul determinării întregii drepte, dacă se cere aceasta. În demonstraţie se utilizează o transformare prin inversiune.

Vom arăta acum, că dacă în plan este dat un cerc (trasat în întregime) şi centrul său, atunci se pot rezolva doar cu rigla problemele rezolubile cu rigla şi compasul. Pentru aceasta vom demonstra mai întîi

Teorema 3. *Dacă $\mathcal{F}$ conţine un paralelogram, atunci putem rezolva cu rigla orice ecuaţie de gradul I faţă de un reper cartezian oblic* [2].

Demonstraţie. Fie (fig. 1) paralelogramul dat $ABCD$, dreapta Δ şi punctul P. Notăm intersecţiile $M = (AB, \Delta)$, $N = (CD, \Delta)$, $I = (AC, BD)$. Alegem arbitrare punctul R în plan (nesituat pe BD) şi dreapta δ trecînd prin Q, dar nu şi prin B. Notăm $T = (RB, \delta)$, $U = (RI, \delta)$, $V = (RD, \delta)$. Se poate arăta uşor că TM şi VN sînt concurente într-un punct S. Intersecţia $J = (SU, \Delta)$ este mijlocul lui MN, căci birapoartele $(QBID)$ şi $(QMJN)$ sînt egale, fiind ambele egale cu

$(QTUV)$, iar $QB = QD : QB = QN : QM$. Apoi se știe că, doar cu rigla, putem completa cu o dreaptă Pp razele PM, PJ, PN astfel ca fascicolul $P(M, J, N, p)$ să fie armonic. Dreapta Pp construită este paralelă cu Δ; deci, în condițiile teoremei poate fi dusă printr-un punct dat o paralelă la o dreaptă dată.

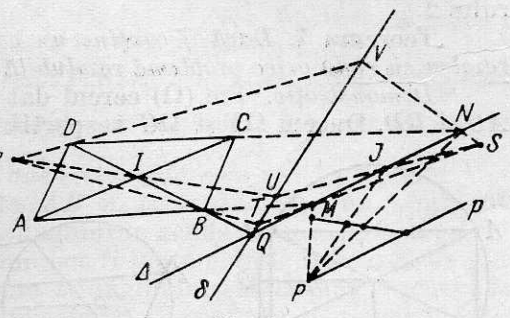

Fig. 1

Fie ecuația $ax + b = 0$. Numerele a și b reprezintă două coordonate ale unor puncte date. Datorită posibilității trasării de paralele din aceste puncte la axele de coordonate, putem stabili pe axe două puncte cu coordonatele nenule a și b. Să analizăm situația $A\ (a,\ 0)$, $B\ (b, 0)$. Remarcînd că dacă se cunoaște punctul $N_1\ (n, 0)$ atunci se poate construi $N_2\ (0,\ n)$ și reciproc (intersecția paralelei din N_1, respectiv N_2, la dreapta [1] E_1E_2 cu Oy, respectiv Ox), nu se mai impune studierea altor situații. Va trebui să construim $x = -\dfrac{b}{a}\cdot$ Avem evident, $\dfrac{x}{e_2} = \dfrac{b}{-a}$, iar x va fi aflat pe Oy. Punctul $A'\ (-a,\ 0)$ poate fi construit [2]. Intersecția paralelei din B la $A'E_2$ cu axa ordonatelor ne dă punctul $X_2\ (0,\ x)$, apoi putem construi și $X_1(x, 0)$. Teorema este demonstrată.

Observăm că în condițiile teoremei 3 nu putem duce numai cu rigla o perpendiculară dintr-un punct dat pe o dreaptă dată, în general. Aceasta nu poate constitui o surpriză avînd în vedere că, în axe oblice, construcția aceasta nu revine la rezolvarea unei ecuații de gradul I.

Corolarul 1. *În condițiile teoremei 1, date fiind a și b, putem construi produsul ab.*

Demonstrație. Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} ay - 1 = 0, \\ xy - b = 0, \end{cases}$$

înlocuind pe $y = a^{-1}$ din prima în a doua ecuație : $x = ab$.

Corolarul 2. *Dacă $\mathcal{F}$ conține un pătrat, atunci putem rezolva doar cu rigla, orice ecuație de gradul I față de un sistem de coordonate rectangular cu unități egale pe cele două axe.*

Demonstrație. Dat fiind pătratul $ABCD$, putem lua ca axe pe BA și BC, iar ca unitate latura pătratului ; putem însă construi și alte sisteme de referință carteziene rectangulare, eventual mai comode. Observînd că teo-

[1]) Notăm e_1 unitatea de pe axa absciselor, e_2 cea de pe axa ordonatelor, $E_1\ (e_1,\ 0)$ și $E_2\ (e_2,\ 0)$.

[2]) Luăm punctul P arbitrar pe Oy, diferit de originea O. Paralela din O la AP taie paralela din P la Ox în Q iar paralela din Q la Oy taie pe Ox în A'. În mod asemănător putem construi și suma $a + b$ dacă a și b sînt cunoscute.

rema 2 se aplică şi cazului cînd sistemul de referinţă este cel enunţat, corolarul este demonstrat.

Ca aplicaţie, cititorul va putea verifica posibilitatea coborîrii unei perpendiculare dintr-un punct dat pe o dreaptă dată, în condiţiile corolarului 2.

Teorema 4. *Dacă $\mathcal{F}$ conţine un cerc şi centrul său, atunci se poate rezolva cu rigla orice problemă rezolubilă cu rigla şi compasul* [2].

Demonstraţie. Fie (Ω) cercul dat (fig. 2). Ducem arbitrar diametrii AC şi BD. Ducem ΩF şi ΩG respectiv paralele cu AB şi BC; completăm

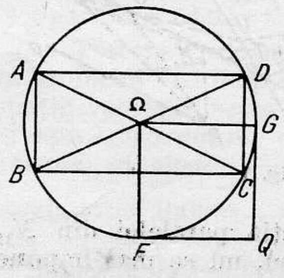

Fig. 2

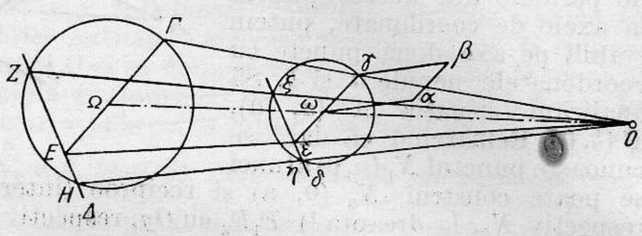

Fig. 3

patratul ΩFQG. Ca urmare, putem rezolva orice ecuaţie de gradul I faţă de un sistem de coordonate rectangulare cu unităţi egale pe cele două axe.

Se pot afla doar cu rigla intersecţiile unei drepte δ cu un cerc dat prin punctele ω, α, β, centrul fiind ω, iar raza distanţa dintre α şi β (fig. 3). În adevăr, să completăm într-un fel, prin punctul γ, paralelogramul $\omega\alpha\beta\gamma$. Noul vîrf va aparţine cercului (ω). Fie ε intersecţia $(\delta, \omega\gamma)$. Paralela din Ω la $\omega\gamma$ taie cercul dat în două puncte dintre care pe cel aflat de aceeaşi parte a lui $\Omega\omega$ ca şi γ îl notăm cu Γ. Aflăm centrul O de omotetie directă a celor două cercuri intersectînd dreptele $\Omega\omega$ şi $\Gamma\gamma$. Găsim apoi omologul E al lui ε intersectînd pe $\Omega\Gamma$ cu $O\varepsilon$. Paralela Δ din E la δ va corespunde în această omotetie dreptei δ. Fie Z şi H intersecţiile lui Δ cu cercul (Ω). Evident, soluţiile problemei sînt omoloagele punctelor Z şi H adică intersecţiile ζ şi η ale lui OZ şi OH cu δ.

Afirmăm că putem rezolva orice ecuaţie de gradul II faţă de un sistem cartezian rectangular de coordonate cu unităţi egale pe cele două axe. În adevăr, fie ecuaţia $ax^2+bx+c=0$, cu a, b, c, cunoscute. Soluţiile ei sînt

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Corolarul 1 a descris calcularea lui $n=b^2-4ac$. Să găsim acum $m=\sqrt{n}$. Pentru aceasta, dacă am găsit punctul $N(n,0)$, construim punctul $E(-1,0)$, găsim apoi mijlocul P al segmentului EN (problemă de gradul întîi) şi, conform celor demonstrate mai sus, aflăm intersecţia M a axei Oy cu cercul de diametru EN. Avem $OM=m$. Calculăm apoi $x_{1,2}=\dfrac{\pm m-b}{2}$.

Aşadar am dovedit că rigla singură poate înlocui rigla şi compasul în condiţiile teoremei 4, bineînţeles exceptînd trasarea continuă a cercurilor.

§ 2. Construcţii cu rigla, compasul şi trisectorul

După cum sugerează şi numele, *trisectorul* este un instrument cu care se poate divide un unghi oarecare în trei părţi egale.

Teorema 1. *Putem rezolva cu rigla şi trisectorul orice ecuaţie de gradul I faţă de un sistem de axe de coordonate cu unghiul* $\frac{\pi}{3}$ *între ele şi unităţi egale pe ele sau faţă de un sistem de axe rectangulare cu unităţi diferite.*

Demonstraţie. Ducem dreapta AB şi, trisectînd cîte un unghi de mărime π din A şi B, obţinem triunghiurile echilaterale ABC_1 şi ABC şi rombul AC_1BC_2. Cele două sisteme pot fi luate astfel: perechea de axe C_1A, C_1B cu unităţile egale cu latura triunghiului echilateral şi perechea de axe AB, C_1C_2. Existenţa rombului asigură — conform teoremei 3, § 1 — rezolubilitatea de demonstrat.

Putem duce perpendiculara dintr-un punct dat P pe o dreaptă dată Δ, construind ca în teorema 1 rombul AC_1BC_2 cu A şi B pe Δ şi ducînd paralela din P la C_1C_2, care poate fi construită conform teoremei 1.

Corolar. *Dacă configuraţia dată* $\mathcal{F}$ *conţine circumferinţa unui cerc, atunci se poate rezolva cu rigla şi trisectorul orice problemă rezolubilă cu rigla, compasul şi trisectorul.*

Demonstaţie. Ducem printr-un punct arbitrar al circumferinţei date două drepte perpendiculare, conform celor menţionate mai sus. Acestea determină un diametru al cercului, a cărui intersecţie cu un alt diametru construit analog este centrul cercului. Conform teoremei 4, § 1, rigla singură înlocuieşte mai departe compasul şi teorema este demonstrată.

Teorema 2. *Fie ecuaţia* $\alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ *cu coeficienţi constructibili şi* $\alpha_3 \neq 0$. *Pentru ca rădăcinile ei să fie constructibile cu rigla, compasul şi trisectorul este suficient ca ele să fie reale.*

Demonstraţie. Punînd $a = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$, $b = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}$, $c = \frac{\alpha_0}{\alpha_3}$, apoi translatînd $x = x' - \frac{a}{3}$, aflăm

$$x'^3 + px' + q = 0 \tag{1}$$

unde $$p = b - \frac{a^2}{3} \quad \text{şi} \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$$

Transformarea $x' = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}X$ ne dă $4X^3 - 3X = \alpha$ (2)

unde $\alpha = \frac{3q}{p\beta}$ şi $\beta = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Dacă ecuaţia dată are două rădăcini confundate, atunci polinomul din membrul ei stîng este reductibil. Prin urmare ecuaţia poate fi rezolvată doar cu rigla şi compasul. Dacă ecuaţia dată are rădăcinile reale şi distincte deducem uşor din $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ că $-1 < \alpha < 1$. Evident, cu ajutorul mărimilor date α_0, α_1, α_2, α_3 se pot construi cu rigla şi compasul a, b, c, apoi p, q şi β, α. Găsim cu trisectorul unghiului $\omega = \frac{\text{arc cos } \alpha}{3}$. Aflăm cu rigla şi compasul $X_1 = \cos \omega$, $X_{2,3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} \pm \omega\right)$ care sînt cele trei rădăcini reale ale ecuaţie (2). Rezultă apoi imediat şi rădăcinile ecuaţiei date.

Mai mult, se poate demonstra [5] următoarea teoremă de necesitate şi suficienţă :

Teorema 3. *Fie corpul constructibil K şi ecuaţia $\alpha_3 X^3 + \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0 = 0$, cu $\alpha_3 \neq 0$, ireductibilă peste K. Condiţia necesară şi suficientă ca cel puţin o rădăcină a ei să fie constructibilă cu rigla, compasul şi trisectorul este ca toate rădăcinile să fie reale.*

Această teoremă cu aspect calitativ poate fi pusă şi sub o altă formă, al cărei caracter cantitativ o face mai utilă în multe aplicaţii :

Teorema 4. *Condiţia necesară şi suficientă ca cel puţin o rădăcină a ecuaţiei $\alpha_3 X^3 + \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0 = 0$, cu $\alpha_3 \neq 0$, ireductibilă peste corpul constructibil K, să fie constructibilă cu rigla, compasul şi trisectorul este ca*

$$18\, \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 4\, \alpha_0\alpha_2^3 - 27\, \alpha_0\alpha_3^2 + \alpha_1\alpha_2^2 - 4\, \alpha_1^3\alpha_3 < 0.$$

Demonstraţie. Condiţia necesară şi suficientă pentru constructibilitatea a cel puţin unei rădăcini, dată de teorema 3, se scrie $q^2:4+p^3:27<0$. Exprimînd p, q prin $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, se obţine inegalitatea din enunţ.

Reunind rezultatele obţinute mai sus, se poate cu uşurinţă demonstra

Teorema 5. *Condiţia necesară şi suficientă ca numerele din G să poată fi construite cu rigla, compasul şi trisectorul, cunoscîndu-se cele din F, este ca să existe corpurile*

$$\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \ldots \subset \Lambda_{n-1} \subset \Lambda_n,$$

astfel ca $\Lambda_0 = \bigcap_{\Lambda_\iota \supset Q \cup F} \Lambda_\iota$ (Λ_ι corpuri); $\Lambda_n \supset G$; $[\Lambda_m : \Lambda_{m-1}] = 2$ sau 3 $(m = 1, 2, \ldots, n)$ şi să existe $\lambda_m \in \Lambda_m$ astfel ca $\Delta\lambda_m \subset R$, unde R este corpul numerelor reale, iar $\Delta\lambda_m$ este corpul de descompunere al polinomului minimal al lui λ_m relativ la Λ_{m-1}.

§ 3. Problemele clasice

Se spune că pe vremea geometrului grec Platon, pe insula Delos a izbucnit o epidemie de ciumă. Un oracol, pretins purtător de cuvînt al zeului Apollo, a poruncit pămîntenilor să dubleze altarul zeului, care avea şi urma să aibă o formă cubică. Locuitorii insulei s-au adresat geometrilor timpului şi în primul rînd lui Platon. Acesta nu a reuşit să o rezolve folosind rigla şi compasul şi nici altcineva după el nu a avut vreodată succes. Ulterior s-a demonstrat irezolubilitatea problemei. Mai mult, vom da acum

Teorema 1. *Nu se poate construi cu ajutorul riglei, compasului şi trisectorului muchia cubului de volum dublu faţă de un cub dat.*

Demonstrație. Construim două axe rectangulare cu unități egale cu muchia cubului dat. Trebuie cercetată posibilitatea construcției unui segment de lungime $\sqrt[3]{2}$. Considerăm corpul constructibil Q [1]) și ecuația $x^3 - 2 = 0$ ireductibilă peste Q. Aplicînd teorema 4, § 2 cazului particular cînd $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, corespunzător unei ecuații binome, găsim că $-27\,\alpha_0^2\,\alpha_3^2 < 0$, deci nici o rădăcină a ecuației considerate, inclusiv $\sqrt[3]{2}$, nu este constructibilă. Imposibilitatea construcției subsistă deci oricare ar fi $\alpha_0 \in Q$ cu $\sqrt[3]{\alpha_0} \notin Q$.

O altă problemă clasică irezolubilă cu rigla și compasul este trisecțiunea unui unghi arbitrar. Merită atenție cuvîntul „arbitrar" datorită celor ce urmează. Dat fiind un unghi — spune problema — să se afle unghiul de trei ori mai mic. Am spus că problema este irezolubilă cu rigla și compasul și vom demonstra aceasta. Dar există unghiuri (de exemplu : 180° ; 90° ; 72° ; etc.) a căror trisectare este posibilă ? Aceasta înseamnă că răspunsul la problemă este că în general construcția este imposibilă dar în unele cazuri particulare ea ar fi totuși posibilă. Unghiul ne este dat geometric, fără să-l putem măsura, deci chiar dacă s-ar întîmpla ca el să aibă 72° de exemplu, noi am putea cunoaște aceasta ? Răspunsul este afirmativ dacă și numai dacă admitem că se poate decide dacă un punct dat și altul construit sînt distincte sau confundate, or este la libera noastră alegere dacă postulăm posibilitatea acestei deciziuni sau imposibilitatea ei. În primul caz, și acesta va fi luat în considerare mereu de acum înainte, am văzut că putem găsi valori care ar putea fi atribuite unghiului dat astfel ca el să poată fi trisectat cu cele două instrumente, dar existența unei infinități de astfel de valori (atestată de teorema 3, § 3) care ar trebui încercate dovedește, în virtutea necesității parcurgerii doar a unui număr finit de pași în construcție, imposibilitatea unei atari verificări.

Unghiul dat fiind A, relația trigonometrică $\cos A = 4\cos^3\frac{A}{3} - 3\cos\frac{A}{3}$ arată că ecuația de rezolvat este

$$4x^3 - 3x - a = 0 \tag{1}$$

unde $a = \cos A$ este dat geometric. Această ecuație este irezolubilă cu rigla și compasul deoarece nu-l cunoaștem numeric pe a și dacă, de exemplu, am avea $a = \frac{3}{4}$, atunci polinomul $16x^2 - 12x - 3$ ar fi ireductibil peste Q (conform criteriului lui Eisenstein), deci $\left[Q\left(\cos\frac{A}{3}\right) : Q(\cos A)\right] = 3$. Am demonstrat astfel

Teorema 2. *Problema trisecțiunii unghiului este irezolubilă cu rigla și compasul* [1].

---

[1]) S-a notat în § 1 cu Q corpul numerelor raționale.

Evident, folosind trisectorul, prin definiţie problema se rezolvă; de altfel este clar că tocmai problema clasică de care ne ocupăm a condus la introducerea acestui instrument.

Este interesant de studiat, în cazul cînd avem informaţii despre mărimea lui A, mulţimile de valori ale lui A pentru care construcţia cu rigla şi compasul este sau nu posibilă.

Teorema 3. *Mulţimea valorilor unghiului A pentru care construcţia unghiului $\frac{A}{3}$ cu rigla şi compasul se poate realiza este numărabilă (infinită) iar cea a valorilor pentru care construcţia nu este posibilă are puterea continuului.*

Demonstraţie. Vom demonstra prima parte a teoremei, care implică, evident, şi pe cea de a doua. Două criterii de constructibilitate, unul necesar şi altul suficient, vor servi la demonstraţie.

Criteriul 1. *Pentru ca trisecţiunea unghiului A să fie realizabilă cu rigla şi compasul este necesar ca $a = \cos A$ să fie algebric peste Q.*

Demonstraţie. Să presupunem că a ar fi transcendent peste Q. Dacă, în acest caz, trisecţiunea ar fi posibilă cu rigla şi compasul, atunci ecuaţia $4x^3 - 3x = a = 0$ ar fi verificată de un element $\frac{p(a)}{q(a)} \in Q(a)$, unde p şi q sînt două polinoame cu coeficienţi raţionali, prin urmare am avea $4p^3(a) - 3(a)q^2(a) - aq^3(a) = 0$, ceea ce contrazice nealgebricitatea lui a. Construcţia este deci imposibilă pentru a transcendent.

Criteriul 2. *Pentru ca trisecţiunea unghiulului A să fie realizabilă cu rigla şi compasul este suficient ca $A = \frac{2\pi}{n}$, unde n este un număr natural nedivizibil prin 3.*

Demonstraţie. Întrucît n şi 3 sînt prime între ele, ecuaţia diofantică $nx + 3y = 1$ admite o soluţie (x_0, y_0), deci

$$\frac{2}{3}x_0 + Ay_0 = \frac{A}{3}$$

şi unghiul $\frac{A}{3}$ poate fi construit.

Pentru demonstrarea teoremei anterioare ne mai rămîne doar să observăm că din criteriul 2 rezultă posibilitatea construcţiei pentru o infinitate de valori atribuite unghiului dat iar criteriul 1 precizează că această infinitate este numărabilă (ceea ce rezultă din numărabilitatea numerelor algebrice peste Q).

Cea de a treia problemă celebră — tot irezolubilă cu rigla şi compasul — este cea a cuadraturii cercului. Ea constă deci în a construi cu cele două instrumente un pătrat echivalent (avînd aceeaşi arie) cu un cerc dat. Mai departe vom extinde studiul asupra cuadraturii conicelor.

Teorema 4. *Cuadratura cercului este irealizabilă cu rigla, compasul şi trisectorul.*

Demonstraţie. Cercul ne este dat prin raza lui, pe care o alegem ca unitate. Rezolvarea problemei coincide cu cea a ecuaţiei $x^2 - \pi = 0$. Cum rădăcina ei pozitivă $\sqrt{\pi}$ este transcendentă peste Q rezultă că extinderea lui Q generată de $\sqrt{\pi}$ nu este algebrică, deci construcția este imposibilă.

Obținem imediat și următorul

Corolar. *Nu se poate construi cu rigla, compasul și trisectorul un patrat echivalent cu un segment de elipsă dat* (pentru că altfel s-ar realiza în particular cuadratura cercului).

Teorema 5. *Nu se poate construi cu rigla, compasul și trisectorul un pătrat echivalent cu un segment de hiperbolă dat.*

Demonstrație. Așa cum se arăta în § 1, presupunem dată hiperbola prin cinci puncte ale sale și ne propunem să realizăm cuadratura segmentului de hiperbolă determinat de două dintre aceste cinci puncte. Din teoria privind reducerea conicelor se deduce că putem construi cu rigla și compasul asimptotele hiperbolei. Notînd cu φ unghiul dintre ele și cu k constanta relativă a hiperbolei [2]), ecuația acesteia este $xy = k$ cosec φ față de asimptote. Dacă x_1, x_2 sînt abscisele punctelor ce determină segmentul de hiperbolă considerat, atunci aria lui este diferența între aria S_1 ușor construibilă a unui trapez și aria

$$S_2 = \sin\varphi \int_{x_1}^{x_2} \frac{k \operatorname{cosec}\varphi}{x}\, dx = k \ln \frac{x_2}{x_1}.$$

Cum însă S_2, deci și $S_1 - S_2$, nu pot fi construite cu rigla, compasul și trisectorul, teorema este demonstrată.

Contrar celor ce se petrec la conicele cu centru, pentru parabolă avem

Teorema 6. *Se poate construi cu rigla și compasul pătratul echivalent cu un segment de parabolă dat* [2].

Demonstrație. Ni se dau patru puncte ale parabolei dintre care două determină segmentul de parabolă considerat. Coeficienții parabolei pot fi construiți, deci și tangentele în cele două puncte. Conform unei teoreme a lui Arhimede, aria segmentului de parabolă este egală cu 2/3 din cea a triunghiului determinat de tangente și coarda ce mărginește segmentul de parabolă. Prin urmare cuadratura segmentului de parabolă este realizabilă cu rigla și compasul.

BIBLIOGRAFIE

1. Dikson–Bodewig, Höhere Algebra, Leipzig-Berlin, 1929.
2. J. Hadamard, Lecții de geometrie elementară — geometrie în spațiu, București, 1961.
3. M. Postnikov, Teoria lui Galois, Moscova, 1963.
4. A. Toth, Elemente de teoria construcțiilor geometrice.
5. T. Zamfirescu, Construcții geometrice cu rigla, compasul și trisectorul, Stud. cerc. mat., 3, București, 1964.

---

[2]) Constanta relativă a hiperbolei este aria paralelogramului cu un vîrf pe hiperbolă și laturile nealăturate pe asimptote [2].