UN PROBLÈME VARIATIONNEL DANS L'ESPACE DE RIEMANN*)

PAR

TOMA ALBU et TUDOR ZAMFIRESCU

Dans ce travail, on étudie quelques propriétés des géodésiques d'une variété non-différentiable *V* dans les points où ces géodésiques rencontrent les sous-variétés différentiables sur lesquelles *V* n'est pas différentiable et, aussi, d'autres problèmes dérivés.

Le phénomène physique de la réflexion des rayons de lumière suit des lois gouvernées par le principe de Fermat, dont l'aspect géométrique nous a suggéré quelques extensions naturelles pour les espaces euclidiens à plusieurs dimensions et, plus généralement, pour les espaces riemanniens.

1. Soient $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ où $t \in [\alpha, \beta] \subset R$ l'équation vectorielle d'une courbe (C) régulière et $A\,(\vec{a})$, $B\,(\vec{b})$ deux points dans l'espace euclidien R^n, non situés sur (C). Si $M\,(\vec{r}\,(t))$ est un point arbitraire de la courbe (C), nous allons considérer les distances de A et de B à M et la fonction-somme de ces distances, dépendant de la position de M sur (C) :

$$f\,(t) = |\vec{r}\,(t) - \vec{a}| + |\vec{r}\,(t) - \vec{b}|\,.$$

La fonction f, définie sur $[\alpha, \beta]$ est continue, donc elle possède au moins deux points t_1, $t_2 \in [\alpha, \beta]$ d'extrémum absolu (l'un de minimum et l'autre de maximum). Supposons que la fonction f n'est pas strictement monotone, donc qu'il y a au moins un point $t_0 \in (\alpha, \beta)$ d'extrémum relatif pour f. Suivant le théorème de Fermat,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,(t_0) = 0,$$

*) Travail présenté au « Colloque de géométrie différentielle globale », Bucarest, 30 juin — 4 juillet 1964.

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., 1965, TOME X, N° 9, p. 1323–1330

donc

$$\frac{(\vec{r}\,(t_0)-\vec{a})\cdot\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t_0)}{|\vec{r}\,(t_0)-\vec{a}\,|}=-\frac{(\vec{r}\,(t_0)-\vec{b})\cdot\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t_0)}{|\vec{r}\,(t_0)-\vec{b}\,|}$$

ou, puisque $\dfrac{d\vec{r}}{dt}\neq 0$,

$$\frac{(\vec{r}\,(t_0)-\vec{a})\cdot\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t_0)}{|\vec{r}(t_0)-\vec{a}|\cdot\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t_0)\right|}=-\frac{(\vec{r}\,(t_0)-\vec{b})\cdot\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t_0)}{|\vec{r}(t_0)-\vec{b}\,|\cdot\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t_0)\right|},$$

donc les angles déterminés par la tangente en $M_0 \equiv M\,(\vec{r}\,(t_0))$ à (C) et chacun des vecteurs $\overrightarrow{AM_0}$ et $\overrightarrow{BM_0}$ sont égaux, c.-à-d.,

THÉORÈME 1. *Les vecteurs $\overrightarrow{AM_0}$ et $\overrightarrow{BM_0}$ sont également inclinés sur la courbe (C).*

Considérons les cônes ayant comme sommets les points A et B et comme courbe directrice la courbe (C). Soit (Σ) la surface constituée par la réunion des portions des deux cônes comprises entre (C) et chacun des sommets A et B. Du théorème 1, on déduit facilement que

THÉORÈME 1'. *Toute géodésique sur (Σ) qui joint les points A et B possède la propriété du théorème 1 au point de singularité appartenant à (C), si ce point ne coïncide pas à une extrémité de (C).*

2. Soit, maintenant, la variété régulière (S) $\vec{r}=\vec{r}\,(u_1,\ \ldots,\ u_p)$ dans R^n, où $1\leqslant p<n$ et la fonction $\vec{r}$ est définie sur la fermeture d'un domaine borné $D\subset R^p$. Considérons encore les points $A\,(\vec{a})$ et $B\,(\vec{b})$ de R^n. La fonction

$$F\,(u_1,\ldots,u_p)=|\,\vec{r}\,(u_1,\ldots,u_p)-\vec{a}\,|+|\,\vec{r}\,(u_1,\ldots,u_p)-\vec{b}\,|$$

atteint ses valeurs extrêmes dans $\overline{D}$, mais supposons qu'il existe un point d'extrémum relatif $(u_1^0,\ \ldots,\ u_p^0)\in D$. Il en résulte que ce point est stationnaire, donc

$$\frac{\partial F}{\partial u_\alpha}=0\qquad(1\leqslant\alpha\leqslant p)$$

dans $(u_1^0,\ \ldots,\ u_p^0)$, ou

$$\frac{(\vec{r}\,(u_1^0,\ldots,u_p^0)-\vec{a})\cdot\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u_\alpha}(u_1^0,\ldots,u_p^0)}{|\,\vec{r}\,(u_1^0,\ \ldots,u_p^0)-\vec{a}\,|}=-\frac{(\vec{r}(u_1^0,\ldots,u_p^0)-\vec{b})\cdot\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u_\alpha}(u_1^0,\ldots,u_p^0)}{|\vec{r}(u_1^0,\ \ldots,u_p^0)-\vec{b}\,|},$$

d'où l'on obtient immédiatement

$$\frac{(r(u_1^0, \ldots, u_p^0) - \vec{a}) \cdot \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_\alpha}(u_1^0, \ldots, u_p^0)}{|\vec{r}(u_1^0, \ldots, u_p^0) - \vec{a}| \cdot \left| \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_\alpha}(u_1^0, \ldots, u_p^0) \right|} = - \frac{(\vec{r}(u_1^0, \ldots, u_p^0) - \vec{b}) \cdot \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \frac{\partial r}{\partial u_\alpha}(u_1^0, \ldots, u_p^0)}{|\vec{r}(u_1^0, \ldots, u_p^0) - \vec{b}| \cdot \left| \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \frac{\partial r}{\partial u_\alpha}(u_1^0, \ldots, u_p^0) \right|}$$

quelles que soient les constantes λ_α.

L'hyperplan orthogonal à $\overrightarrow{AM_0}$ passant par $M_0 \equiv M(\vec{r}(u_1^0, \ldots, u_p^0))$ coupe la variété linéaire tangente en M_0 à (S) suivant une variété linéaire $(p-1)$-dimensionnelle V^{p-1}. Soit $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p-1}\}$ une base de V^{p-1}. Mais les vecteurs $\left\{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_p}\right\}$, calculés en M_0, forment une base de la variété tangente, grâce à la régularité de (S). En pouvant écrire

$$\vec{v}_j = \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha^j \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_\alpha}(u_1^0, \ldots, u_p^0) \quad (j = 1, \ldots, p-1),$$

il s'ensuit que les angles déterminés par $\vec{v}_j$ (pour un $j \leqslant p-1$ arbitraire) et chacun des vecteurs $\overrightarrow{AM_0}$ et $\overrightarrow{BM_0}$ sont égaux, donc $\vec{v}_j$ $(j = 1, \ldots, p-1)$ sont orthogonaux aux vecteurs $\overrightarrow{AM_0}$ et $\overrightarrow{BM_0}$. D'où, le résultat suivant :

THÉORÈME 2. *Les vecteurs $\overrightarrow{AM_0}$ et $\overrightarrow{BM_0}$ font partie de la même variété linéaire $(n-p+1)$-dimensionnelle V^{n-p+1} que la variété $(n-p)$-dimensionnelle normale à (S) en M_0.*

Dans le cas où $p = 1$ (et seulement dans ce cas), ce théorème nous conduit à une banalité. C'est la raison pour laquelle nous ne l'avons pas signalé au point 1.

Prenons la droite d'intersection de la variété linéaire tangente avec la variété V^{n-p+1}. Le verseur $\vec{w}$ de cette droite s'écrit

$$\vec{w} = \sum_{\alpha=1}^{p} \mu_\alpha \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_\alpha}(u_1^0, \ldots, u_p^0),$$

donc, il fait des angles égaux à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AM_0}$ et $\overrightarrow{BM_0}$. Arrivons donc au suivant

THÉORÈME 3. *Les vecteurs* $\overrightarrow{AM_0}$ *et* $\overrightarrow{BM_0}$ *sont également inclinés sur la variété* (S).

3. Soient dans R^n la famille $\{W_1, \ldots, W_m\}$ de variétés courbes à dimensions quelconques, analogues à celle précédente et les points $A, B \in R^n$. Considérons la fonction-longueur de la ligne brisée $AM_1 \ldots \ldots M_m B$, où $M_i \in W_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, dépendant du choix des points $M_1, \ldots, M_m$. Supposons qu'elle atteint un extrémum relatif dans l'intérieur de l'ensemble où elle est définie. Notons M_i^0 $(i = 1, \ldots, m)$ les points correspondant à ce cas.

THÉORÈME 4. *Les résultats des théorèmes 2 et 3 restent vrais pour chaque variété* W_i *et pour chaque paire de segments* $\{\overline{M_{i-1}^0 M_i^0}, \overline{M_i^0 M_{i+1}^0}\}$ *(de même pour* W_1 *et* $\{\overline{A\, M_1^0}, \overline{M_1^0 M_2^0}\}$ *et pour* W_m *et* $\{\overline{M_{m-1}^0 M_m^0}, \overline{M_m^0 B}\}$*).*

En effet, supposant M_{i-1}^0 et M_{i+1}^0 fixes, la fonction-somme des distances de M_i à M_{i-1}^0 et M_{i+1}^0 atteint un extrémum relatif dans M_i^0, qui correspond à un point de l'intérieur de l'ensemble de définition. Alors, les théorèmes 2 et 3 peuvent être appliqués, donc le théorème 4 est vérifié.

4. Enfin, nous allons passer aux espaces de Riemann. Les moyens élémentaires utilisés jusqu'ici vont céder la place aux méthodes de recherche caractéristiques au calcul des variations.

Soient (V_n) et $(\overline{V}_n)$ deux espaces de Riemann, ayant respectivement les métriques *)

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j,$$

$$\mathrm{d}\overline{s}^2 = \overline{g}_{ij}(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n)\, \mathrm{d}\overline{x}^i\, \mathrm{d}\overline{x}^j,$$

supposées positivement définies. Postulons l'existence d'une courbe régulière (C) dans (V_n), d'équation

$$x^i = \varphi^i(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

et d'une courbe régulière $(\overline{C})$ dans $(\overline{V}_n)$, d'équation

$$\overline{x}^i = \overline{\varphi}^i(t), \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

telles qu'on ait, pour tout $t \in [\alpha, \beta]$,

$$(\star) \qquad g_{ij}(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))\, \dot{\varphi}^i(t)\, \dot{\varphi}^j(t) = \overline{g}_{ij}(\overline{\varphi}^1(t), \ldots, \overline{\varphi}^n(t))\, \dot{\overline{\varphi}}^i(t)\, \dot{\overline{\varphi}}^j(t).$$

Grâce à l'égalité $(\star)$, pour toute paire de points $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, les distances de P_1 à P_2 et de $\overline{P}_1$ à $\overline{P}_2$, calculées au long de (C), respectivement $(\overline{C})$, sont égales, P_i et $\overline{P}_i$ étant les points de (C) et $(\overline{C})$ correspondant à t_i $(i = 1, 2)$.

---

*) Nous utiliserons dorénavant la convention d'Einstein.

Soient $A \in (V_n)$ et $\overline{A} \in (\overline{V}_n)$ deux points donnés. Nous nous proposons de trouver un point $M \in (C)$ tel que, si le point $\overline{M} \in (\overline{C})$ correspondant à M est identifié avec celui-ci, la somme

$$J\,(AM) + \overline{J}\,(\overline{A}M)$$

soit minimum ou maximum, $J\,(AM)$ ($\overline{J}\,(\overline{A}M)$) étant la distance géodésique entre A ($\overline{A}$) et M calculée dans (V_n) ($(\overline{V}_n)$).

Si $x^i = x^i\,(t)$ (respectivement $\overline{x}^i = \overline{x}^i\,(t)$) sont les équations de la géodésique (Γ) ($(\overline{\Gamma})$) qui joint les points A et M (respectivement $\overline{A}$ et M), alors

$$I\,[x^i\,(t), \overline{x}^i\,(t)] = J\,(AM) + \overline{J}\,(\overline{A}M) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_0} \sqrt{g_{ij}\,(x^1, \ldots, x^n)\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j}\;dt + \int_{\overline{t}_1}^{t_0} \sqrt{\overline{g}_{ij}\,(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n)\,\dot{\overline{x}}^i\dot{\overline{x}}^j}\;dt,$$

les points $A, \overline{A}, M$ correspondant aux valeurs t_1, $\overline{t}_1$, t_0 du paramètre t et

$$x^i\,(t_0) = \varphi^i\,(t_0),$$

$$\overline{x}^i\,(t_0) = \overline{\varphi}^i\,(t_0).$$

La condition d'extrémum

$$\delta I = \delta J + \delta \overline{J} = 0$$

s'écrit

$$\left[\left(L - \dot{x}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\,\delta x^i\right]\Bigg|_{t_1}^{t_0} = -\left[\left(\overline{L} - \dot{\overline{x}}^i \frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{\overline{x}}^i}\right)\delta t + \frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{\overline{x}}^i}\,\delta \overline{x}^i\right]\Bigg|_{\overline{t}_1}^{t_0},$$

où $L = \sqrt{g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j}$ et $\overline{L} = \sqrt{\overline{g}_{ij}\,\dot{\overline{x}}^i\dot{\overline{x}}^j}$. Cela devient

$$\frac{g_{ij}\,\dot{x}^j}{\sqrt{g_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j}}\,\delta x^i\Bigg|_{t_1}^{t_0} = -\frac{\overline{g}_{ij}\,\dot{\overline{x}}^j}{\sqrt{\overline{g}_{ij}\dot{\overline{x}}^i\,\dot{\overline{x}}^j}}\,\delta \overline{x}^i\Bigg|_{\overline{t}_1}^{t_0}.$$

Mais $\quad \delta x^i = \dot{\varphi}^i\,(t)\;\delta t, \quad \delta \overline{x}^i = \dot{\overline{\varphi}}^i\,(t)\;\delta t$ et $\delta x^i\,(t_1) = \delta \overline{x}^i\,(\overline{t}_1) = 0,$

donc

$$\frac{g_{ij}\,(x^k\,(t_0))\,\dot{\varphi}^i\,(t_0)\,\dot{x}^j\,(t_0)}{\sqrt{g_{ij}\,(x^k\,(t_0))\,\dot{x}^i\,(t_0)\,\dot{x}^j\,(t_0)}} = -\frac{\overline{g}_{ij}\,(\overline{x}^k(t_0))\,\dot{\overline{\varphi}}^i\,(t_0)\,\dot{\overline{x}}^j\,(t_0)}{\sqrt{\overline{g}_{ij}\,(\overline{x}^k\,(t_0))\,\dot{\overline{x}}^i\,(t_0)\,\dot{\overline{x}}^j(t_0)}}$$

où $x^k\,(t_0)$ et $\overline{x}^k\,(t_0)$ désignent respectivement $x^1\,(t_0), \ldots, x^n\,(t_0)$ et $\overline{x}^1\,(\overline{t}_0), \ldots$ $\ldots, \overline{x}^n\,(t_0)$.

En tenant compte de la régularité des courbes (C) et $(\overline{C})$ et de la relation (*), nous avons

$$\frac{g_{ij}\,(x^k\,(t_0))\,\dot{\varphi}^i\,(t_0)\,\dot{x}^j\,(t_0)}{\sqrt{g_{ij}\,(x^k\,(t_0))\,\dot{x}^i\,(t_0)\,\dot{x}^j(t_0)}\;\sqrt{g_{ij}\,(\varphi^k\,(t_0))\,\dot{\varphi}^i\,(t_0)\,\dot{\varphi}^j\,(t_0)}} = -$$

$$-\frac{\overline{g}_{ij}\,(\overline{x}^k\,(t_0))\,\dot{\overline{\varphi}}^i\,(t_0)\,\dot{\overline{x}}^j\,(t_0)}{\sqrt{\overline{g}_{ij}\,(\overline{x}^k\,(t_0))\,\dot{\overline{x}}^i\,(t_0)\,\dot{\overline{x}}^j\,(t_0)}\;\sqrt{\overline{g}_{ij}\,(\overline{\varphi}^k\,(t_0))\,\dot{\overline{\varphi}}^i\,(t_0)\,\dot{\overline{\varphi}}^j\,(t_0)}}.$$

Cette égalité exprime le suivant fait géométrique

THÉORÈME 5. *Les deux géodésiques* (Γ) *et* $(\overline{\Gamma})$ *font en* M *des angles égaux aux deux courbes,* (C) *et* $(\overline{C})$.

Le point t_0 et les $4n$ constantes qui figurent dans les équations des géodésiques peuvent être déterminées en utilisant les $4n+1$ relations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{g_{ij}(x^k(t_0))\,\dot{\varphi}^i(t_0)\,\dot{x}^j(t_0)}{\sqrt{g_{ij}(x^k(t_0))\,\dot{x}^i(t_0)\,\dot{x}^j(t_0)}} = -\dfrac{\overline{g}_{ij}(\overline{x}^k(t_0))\,\dot{\overline{\varphi}}^i(t_0)\,\dot{\overline{x}}^j(t_0)}{\sqrt{\overline{g}_{ij}(\overline{x}^k(t_0))\,\dot{\overline{x}}^i(t_0)\,\dot{\overline{x}}^j(t_0)}}, \\ x^i(t_0, c_1, \ldots, c_{2n}) = \varphi^i(t_0), \\ \overline{x}^i(t_0, \overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_{2n}) = \overline{\varphi}^i(t_0), \\ x^i(t_1, c_1, \ldots, c_{2n}) = a^i, \\ \overline{x}^i(t_1, \overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_{2n}) = \overline{a}^i, \end{cases}$$

où a^i et $\overline{a}^i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont les coordonnées de A et $\overline{A}$.

5. Au lieu des courbes (C) et ( ) considérons maintenant deux variétés p-dimensionnelles régulières

$$(S^p)\ x^i = \varphi^i(u^1, \ldots, u^p) \quad \text{et}$$

$$(\overline{S}^p)\ \overline{x}^i = \overline{\varphi}^i(u^1, \ldots, u^p) \quad (1 \leqslant p < n),$$

définies sur la fermeture du même domaine $D \subset R^p$, satisfaisant les p égalités suivantes :

$$(**)\qquad g_{ij}(\varphi^k(u^1, \ldots, u^p))\frac{\partial\varphi^i}{\partial u^\alpha}(u^1, \ldots, u^p)\frac{\partial\varphi^j}{\partial u^\alpha}(u^1, \ldots, u^p) =$$
$$= \overline{g}_{ij}(\overline{\varphi}^k(u^1, \ldots, u^p))\frac{\partial\overline{\varphi}^i}{\partial u^\alpha}(u^1, \ldots, u^p)\frac{\partial\overline{\varphi}^j}{\partial u^\alpha}(u^1, \ldots, u^p)$$

(sans somme après $\alpha = 1, \ldots, p$)

dans chaque point $(u^1, \ldots, u^p) \in \overline{D}$.

Nous nous proposons de résoudre le problème analogue à celui de 4. Dans ce but, on obtient de la même manière, pour chaque indice α,

$$\frac{g_{ij}(x^k(t_0))\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial u^\alpha}(u_0^1, \ldots, u_0^p)\,\dot{x}^j(t_0)}{\sqrt{g_{ij}(x^k(t_0))\,\dot{x}^i(t_0)\,\dot{x}^j(t_0)}} = -\frac{\overline{g}_{ij}(\overline{x}^k(t_0))\dfrac{\partial\overline{\varphi}^i}{\partial u^\alpha}(u_0^1, \ldots, u_0^p)\,\dot{\overline{x}}^j(t_0)}{\sqrt{\overline{g}_{ij}(\overline{x}^k(t_0))\,\dot{\overline{x}}^i(t_0)\,\dot{\overline{x}}^j(t_0)}},$$

où

$$x^i(t_0) = \varphi^i(u_0^1, \ldots, u_0^p),$$
$$\overline{x}^i(t_0) = \overline{\varphi}^i(u_0^1, \ldots, u_0^p).$$

En vertu de la régularité des variétés (S^p) et $(\bar{S}^p)$ et de $(^{**})$, on a, pour toutes constantes $\lambda^1, \ldots, \lambda^p$ avec $\sum_{i=1}^{p} |\lambda^i| > 0$, la relation $(^{***})$:

$$\frac{g_{ij}(x^k(t_0))\,\lambda^\alpha \dfrac{\partial \varphi^i}{\partial u^\alpha}(u_0^1, \ldots, u_0^p)\,\dot{x}^j(t_0)}{\sqrt{g_{ij}(x^k(t_0))\,\dot{x}^i(t_0)\,\dot{x}^j(x_0)}\sqrt{g_{ij}(x^k(t_0))\,\lambda^\alpha \dfrac{\partial \varphi^i}{\partial u^\alpha}(u_0^1, \ldots, u_0^p)\,\lambda^\beta \dfrac{\partial \varphi^j}{\partial u^\beta}(u_0^1, \ldots, u_0^p)}} =$$

$$= \frac{\bar{g}_{ij}(\bar{x}^k(t_0))\,\lambda^\alpha \dfrac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial u^\alpha}(u_0^1, \ldots, u_0^p)\,\dot{\bar{x}}^j(t_0)}{\sqrt{\bar{g}_{ij}(\bar{x}^k(t_0))\dot{\bar{x}}^i(t_0)\dot{\bar{x}}^j(x_0)}\sqrt{\bar{g}_{ij}(\bar{x}^k(t_0))\lambda^\alpha \dfrac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial u^\alpha}(u_0^1, \ldots, u_0^p)\,\lambda^\beta \dfrac{\partial \bar{\varphi}^j}{\partial u^\beta}(u_0^1, \ldots, u_0^p)}}.$$

L'hyperplan passant par M_0, orthogonal à la tangente en M_0 à la géodésique (Γ) coupe la variété linéaire (T^p) tangente en M_0 à (S^p) suivant une variété $(p-1)$-dimensionnelle (V^{p-1}). Soit $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p-1}\}$ une base de (V^{p-1}). Mais les vecteurs $\left\{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}, \ldots, \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^p}\right\}$, où $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^\alpha} = \left(\dfrac{\partial \varphi^1}{\partial u^\alpha}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi^n}{\partial u^\alpha}\right)$, calculés en M_0 forment une base de la variété (T^p), donc il y a $p(p-1)$ constantes λ_j^α, telles que

$$\vec{v}_j = \lambda_j^\alpha \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\alpha}(u_0^1, \ldots, u_0^p), \quad (1 \leqslant j \leqslant p-1,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant p).$$

Soient, dans $(\bar{V}_n)$, les vecteurs

$$\vec{\bar{v}}_j = \lambda_j^\alpha \frac{\partial \vec{\bar{r}}}{\partial u^\alpha}(u_0^1, \ldots, u_0^p), \text{ où } \frac{\partial \vec{\bar{r}}}{\partial u^\alpha} = \left(\frac{\partial \bar{\varphi}^1}{\partial u^\alpha}, \ldots, \frac{\partial \bar{\varphi}^n}{\partial u^\alpha}\right).$$

$\{\vec{\bar{v}}_1, \ldots, \vec{\bar{v}}_{p-1}\}$ est une base d'une variété $(\bar{V}^{p-1})$ $(p-1)$-dimensionnelle. En effet, si

$$\mu^j \vec{\bar{v}}_j = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant p-1),$$

alors

$$\mu^j \lambda_j^\alpha \frac{\partial \vec{\bar{r}}}{\partial u^\alpha}(u_0^1, \ldots, u_0^p) = 0$$

et, puisque la variété $(\bar{S}^p)$ est régulière, on a

$$\mu^j \lambda_j^\alpha = 0,$$

mais rang $\| \lambda_j^\alpha \| = p - 1$, donc $\mu^j = 0$.

La relation $(^{***})$ montre que $(\bar{V}^{p-1})$ est orthogonale sur la tangente en M_0 à $(\bar{\Gamma})$. Par conséquent, les variétés linéaires (V^{n-p+1}) et (V^{n-p+1*}), sommes directes des vecteurs tangents en M_0 à (Γ) et $(\bar{\Gamma})$ avec les variétés linéaires $(n-p)$-dimensionnelles normales à (S^p) et, respectivement, à $(\bar{S}^p)$ sont correspondantes, de sorte que $(V^{n-p+1*}) \equiv (\bar{V}^{n-p+1})$.

Considérons la droite d'intersection de la variété (T^p) avec la variété (V^{n-p+1}), de vecteur directeur

$$\vec{w} = \mu^\alpha \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\alpha} (u_0^1, \ldots, u_0^p).$$

En vertu de la correspondance des variétés linéaires (V^{n-p+1}) et $(\bar{V}^{n-p+1})$,

$$\vec{\bar{w}} = \mu^\alpha \frac{\partial \vec{\bar{r}}}{\partial u^\alpha} (u_0^1, \ldots, u_0^p)$$

est le vecteur directeur de la droite d'intersection des variétés linéaires $(\bar{T}^p)$ et $(\bar{V}^{n-p+1})$. Nous avons donc

THÉORÈME 6. *Les géodésiques* (Γ) *et* $(\bar{\Gamma})$ *sont également inclinées sur les variétés* (S^p) *et, respectivement,* $(\bar{S}^p)$.

Pour déterminer les points t_0 et $(u_0^1, \ldots, u_0^p)$ et les $4n$ constantes des géodésiques, écrivons

$$\begin{aligned} x^i(t_0, c_1, \ldots, c_{2n}) &= \varphi^i(u_0^1, \ldots, u_0^p), \\ \bar{x}^i(t_0, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{2n}) &= \bar{\varphi}^i(u_0^1, \ldots, u_0^p), \\ x^i(t_1, c_1, \ldots, c_{2n}) &= a^i, \\ \bar{x}^i(t_1, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{2n}) &= \bar{a}^i, \end{aligned}$$

$$\frac{g_{ij}(x^k(t_0)) \dfrac{\partial \varphi^i}{\partial u^\alpha}(u_0^1, \ldots, u_0^p)\, \dot{x}^j(t_0)}{\sqrt{g_{ij}(x^k(t_0))\, \dot{x}^i(t_0)\, \dot{x}^j(t_0)}} = - \frac{\bar{g}_{ij}(\bar{x}^k(t_0)) \dfrac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial u^\alpha}(u_0^1, \ldots, u_0^p)\, \dot{\bar{x}}^j(t_0)}{\sqrt{\bar{g}_{ij}(\bar{x}^k(t_0))\, \dot{\bar{x}}^i(t_0)\, \dot{\bar{x}}^j(t_0)}}.$$

Mais ces relations ne suffisent pas puisque pour $4n + p + 1$ inconnues, il n'y a que $4n + p$ relations à notre portée. Les lagrangiens $\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}$ et $\sqrt{\bar{g}_{ij}\dot{\bar{x}}^i\dot{\bar{x}}^j}$ sont positivement homogènes, donc on a perdu une relation, mais, justement dû à la positive-homogénéité de ces lagrangiens, on peut choisir, par exemple, $t = u^1$, l'égalité $t_0 = u_0^1$ pouvant être ajoutée aux relations ci-dessus. Ainsi, toutes les inconnues seront déterminées.

Aux points 4 et 5, nous avons considéré deux espaces de Riemann (V_n) et $(\bar{V}_n)$ n-dimensionnels. On observe facilement que les résultats obtenus subsistent pour deux espaces de Riemann à dimensions différentes.

Il nous semble intéressant d'appliquer les résultats précédents au cas où (V_n) et $(\bar{V}_m)$ sont deux variétés régulières dans un même espace R^p $(p \geqslant m, n)$. En supposant que l'intersection des deux variétés n'est pas vide, on peut particulariser les résultats de 5. Aussi, les conclusions du théorème 2 restent-elles vraies relativement aux tangentes aux deux portions de géodésique, dans leur point de rencontre.

Ainsi, les résultats mentionnés s'appliquent sans difficulté à l'étude des géodésiques sur une variété de R^n régulière seulement sur des portions.

Faculté de Mathématiques
et Mécanique de l'Université de Bucarest