SUR LES FONCTIONS DU TYPE K

PAR

TUDOR ZAMFIRESCU

Dans ce travail on démontre une généralisation d'un résultat antérieur [5] sur les fonctions du type K, on introduit de nouvelles classes de fonctions K et on étend les considérations sur ces dernières.

1. INTRODUCTION

Dans son travail [2], M. S. Marcus a introduit la classe des fonctions du type K, dont nous rappelons la définition :

On appelle fonction du type K une application $f: (a, b) \to R$ jouissant de la propriété qu'il y a les fonctions φ définie, réelle, strictement croissante et convexe sur (a, b) et ψ définie, réelle, strictement croissante et concave sur $(\varphi(a), \varphi(b))$, telles que $f(x) = \psi(\varphi(x))$. Dans le travail cité, on a donné les suivantes conditions suffisantes pour l'appartenance au type K :

THÉORÈME A. *Soit f une fonction réelle définie sur (a, b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$. Supposons que f est dérivable sur (a, b) et que $f'(x) > 0$ pour $a < x < b$. Supposons encore que $f''(x)$ existe, finie, en chaque point de (a, b) et que f'' est sommable sur chaque intervalle compact contenu dans (a, b). Alors, f est, sur (a, b) une fonction du type K.*

On connaît, de même [5], le résultat qui suit :

THÉORÈME B. *Pour que la fonction $f: (a, b) \to R$ soit du type K il suffit que les quatre conditions suivantes soient remplies :*

1° *f est continue sur (a, b),*

2° *f^+ (f^-) est définie sur (a, b) et à variation bornée sur chaque $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$,*

3° *la borne inférieure de f^+ (f^-) est strictement positive sur chaque $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$,*

4° $\mathcal{D}_{f^+}'' \subseteq \{a, b\}$ $(\mathcal{D}_f''^- \subseteq \{a, b\})$

(on comprend par g^+, g^- et $\mathcal{D}_g$ la dérivée à droite, la dérivée à gauche et l'ensemble des points de discontinuité ou d'extrême relatif strict de la fonction g).

De ces deux théorèmes, aucun ne représente l'extention de l'autre. Concernant la dérivabilité, les conditions du théorème B sont moins restrictives ([5], section 4). Mais on peut donner des exemples de fonctions qui ne vérifient pas les conditions du théorème B et sont pourtant du type K en vertu du théorème A. Voici un tel exemple :

À l'aide de la fonction $F : (-\pi^2, \pi^2) \to R$, définie par

$$F(x) = \begin{cases} [6(|x|+1) - \pi^2]^{3/2} \sin^2 \pi \, [6(|x|+1) - \pi^2]^{-1/2} \\ \qquad \text{si } 6|x| \in (\pi^2 - 6, \pi^2), \\ \left[6\left(|x| + \sum_{k=1}^{j+1} k^{-2}\right) - \pi^2\right]^{3/2} \sin^2 \pi \left[6\left(|x| + \sum_{k=1}^{j+1} k^{-2}\right) - \pi^2\right]^{-1/2} \\ \qquad \text{si } 6|x| \in \left(\pi^2 - 6 \sum_{k=1}^{j+1} k^{-2}, \ \pi^2 - 6 \sum_{k=1}^{j} k^{-2}\right], \\ 0 \text{ si } x = 0, \end{cases}$$

on construit la fonction $f(x) = x + \int_0^x F(t)\, dt$ qui nous procure l'exemple cherché. En effet, f est dérivable et $f'(x) = 1 + F(x) > 0$ existe, est finie dans $(-\pi^2, \pi^2)$ et est sommable sur chaque $[\alpha, \beta] \subset (-\pi^2, \pi^2)$ parce que F' est bornée sur $[\alpha, \beta]$, donc F est lipschitzienne, d'où f' est absolument continue et, donc, à variation bornée[1]). Mais, en même temps,

$$\mathcal{D}_{f^+}' = \{0\} \not\subseteq \{-\pi^2, \pi^2\}.$$

Nous avons aussi choisi cet exemple parce qu'il constitue une preuve de la supériorité du théorème A sur le théorème de Szekeres (voir le théorème 6). En effet, f'' n'est pas continue dans chaque point

$$\pm \left[\pi^2 - 6 \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k^2}\right],$$

où j parcourt l'ensemble des nombres naturels.

---

[1]) On peut vérifier directement que F est à variation bornée car sa variation $\mathcal{V}_F$ satisfait à l'inégalité

$$\mathcal{V}_F \leqslant 4 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{h=i}^{\infty} h^{-3} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{2}{3}\pi^2.$$

2. CONDITIONS SUFFISANTES

Le théorème suivant étend le théorème B et l'utilise. Il présente aussi des conditions suffisantes pour l'appartenance au type K.

THÉORÈME 1. *Si la fonction* $f: (a, b) \to R$ *satisfait aux conditions suivantes* :

1° f *est continue sur* (a, b),

2° f^+ *existe et est à variation bornée sur chaque* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$,

3° $\inf f^+ > 0$ *sur chaque* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$,

4° $\mathcal{D}_{f^+}$ *est réductible* (*au sens de* [1], *p.* 322),

alors f *est du type* K.

Remarque. On obtient un théorème semblable en changeant la dérivée à droite f^+ de la fonction f, par sa dérivée à gauche f^-.

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{D}_{f^+}$ étant réductible, il y a un nombre entier positif n tel que $\mathcal{D}_{f^+}^{(n)} \neq \Phi$, mais $\mathcal{D}_{f^+}^{(n+1)} = \Phi$. Si $n \in \{0, 1\}$, le théorème est un cas particulier du théorème B. Soit donc $n \geqslant 2$.

Considérons la suite d'intervalles $\{I_i^p\}_{i \in N}$ avec les propriétés :

$$I_r^p \cap I_s^p = \Phi \quad (r \neq s) \quad \text{et} \quad \bigcup_{s=1}^{\infty} I_s^p = (a, \quad b) - \mathcal{D}_{f^+}^{(p)} \quad \text{si} \quad p \in \{1, \ldots, n-1\} ;$$

$$I_r^n \cap I_s^n = \Phi \ (r \neq s) \quad \text{et} \quad \bigcup_{s=1} I_s^n = (a, b) - \mathcal{D}_{f^+}^{(n)}, \quad \text{où } q = \operatorname{card} \mathcal{D}_{f^+}^{(n)}.$$

Soit $m_i^p = \inf I_i^p$ et $M_i^p = \sup I_i^p$.

Selon la démonstration du théorème 1 de [5], à chaque intervalle I_i^1, on peut attacher une paire de fonctions, notées là-bas par $g_i(x)$ et $h_i(x)$. Ces fonctions peuvent être identifiées dans le point de I_i^1 où elles sont, toutes les deux, définies ; on obtient la fonction croissante $f_i^1 : I_i^1 \to R$ satisfaisant aux inégalités :

$$\lim_{x \to m_i^1} f_i^1(x) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to M_i^1} f_i^1(x) < \infty,$$

si $m_i^1 > a$ et $M_i^1 < b$.

En utilisant ces propriétés des fonctions f_i^1, les fonctions $f_{i_{j_2}}^1$ qui correspondent à la sous-suite $\{I_{i_{j_2}}^1\}$ de $\{I_i^1\}$ pour laquelle $\bigcup\limits_{s=1}^{\infty} I_{i_s}^1 = I_i^2$, convenablement amplifiées, peuvent être prolongées par continuité dans les extrémités des intervalles $I_{i_{j_2}}^1$, telles qu'elles se superposent là-bas ; on arrive ainsi aux fonctions $F_{k_i}^i$ ([5], section 3), renotées maintenant par f_i^2.

Supposons que la fonction f_i^k, obtenue en prolongeant par continuité les fonctions $f_{i_{j_k}}^{k-1}$ qui correspondent aux intervalles $I_{i_{j_k}}^{k-1}$ pour lesquels $\bigcup\limits_{s=1}^{\infty} I_{i_s}^{k-1} = I_i^k$, vérifie

$$\lim_{x \to m_i^k} f_i^k(x) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to M_i^k} f_i^k(x) < \infty,$$

si $m_i^k > a$ et $M_i^k < b$. Alors les fonctions $f^k_{i_{j_{k+1}}}$ convenablement amplifiées, peuvent être prolongées par continuité dans les extrémités des intervalles $I^k_{i_{j_{k+1}}}$, en obtenant ainsi la fonction f_i^{k+1}. Démontrons que

$$\lim_{x \to m_i^{k+1}} f_i^{k+1}(x) > 0 \text{ et } \lim_{x \to M_i^{k+1}} f_i^{k+1}(x) < \infty,$$

si $m_i^{k+1} > a$ et $M_i^{k+1} < b$. En effet, si on utilise les notations de la démonstration du théorème 1 de [5],

$$\frac{\lim\limits_{x \to M_i^1} f_i^1}{\lim\limits_{x \to m_i^1} f_i^1} = \frac{g_i(x_i^{n_\infty})}{h_i(x_i^{n_\infty})} = \frac{g_i(x_i^{n_1})}{h_i(x_i^{n_1})}\left[1 + \frac{a_i^1}{(f^{-1})^+(x_i^{p_1} \pm 0}\right]\cdot\left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{a_i^2}{(f^{-1})^+(x_i^{p_2} \pm 0)}\right] \cdots \left[1 + \frac{b_i^1}{(f^{-1})^+(x_i^{q_1})}\right]\cdot\left[1 + \frac{b_i^2}{(f^{-1})^+(x_i^{q_2})}\right] \cdots =$$

$$= \frac{g_i(x_i^{n_1})}{h_i(x_i^{n_1})}\left[1 + \frac{a_i^1}{(f^{-1})^+(x_i^{p_1} \pm 0)}\right]\cdot\left[1 + \frac{b_i^1}{(f^{-1})^+(x_i^{q_1})}\right]\cdot\left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{a_i^2}{(f^{-1})^+(x_i^{p_2} \pm 0)}\right]\cdot\left[1 + \frac{b_i^2}{(f^{-1})^+(x_i^{q_2})}\right] \cdots .$$

La série

$$\sum_{j_1=1}^{\infty}\left[\frac{a_i^{j_1}}{(f^{-1})^+(x_i^{p_{j_1}} \pm 0)} + \frac{b_i^{j_1}}{(f^{-1})^+(x_i^{q_{j_1}})}\right]$$

est convergente, car $(f^{-1})^+$ est à variation bornée sur tout $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, donc le produit infini ci-dessus est absolument convergent et

$$\frac{\lim\limits_{x \to M_i^1} f_i^1}{\lim\limits_{x \to m_i^1} f_i^1} < \infty.$$

Dorénavant, nous n'écrirons plus le rapport $\dfrac{g_i(x_i^{n_1})}{h_i(x_i^{n_1})}$ parce qu'il n'influe point sur la convergence des produits qui vont être considérés.

$$\frac{\lim\limits_{x \to M_i^2} f_i^2}{\lim\limits_{x \to m_i^2} f_i^2} = \prod_{j_2=1}^{\infty} \frac{\lim\limits_{x \to M^1_{i_{j_2}}} f^1_{i_{j_2}}}{\lim\limits_{x \to m^1_{i_{j_2}}} f^1_{i_{j_2}}} =$$

$$= \prod_{j_2=1}^{\infty}\prod_{j_1=1}^{\infty}\left[1 + \frac{a^{j_1}_{i_{j_2}}}{(f^{-1})^+(x^{p_{j_1}}_{i_{j_2}} \pm 0)}\right]\cdot\left[1 + \frac{b^{j_1}_{i_{j_2}}}{(f^{-1})^+(x^{q_{j_1}}_{i_{j_2}})}\right] < \infty,$$

etc. Enfin

$$\frac{\lim\limits_{x\to M_i^{k+1}} f_i^{k+1}}{\lim\limits_{x\to m_i^{k+1}} f_i^{k+1}} = \prod_{j_{k+1}=1}^{\infty} \frac{\lim\limits_{x\to M^k_{i_{j_{k+1}}}} f^k_{i_{j_{k+1}}}}{\lim\limits_{x\to m^k_{i_{j_{k+1}}}} f^k_{i_{j_{k+1}}}} =$$

$$= \prod_{j_{k+1}=1}^{\infty} \prod_{j_k=1}^{\infty} \cdots \prod_{j_1=1}^{\infty} \left[1 + \frac{a^{j_1}_{i_{j_2 j_3 \ldots j_{k+1}}}}{(f^{-1})^+(x^{p_{j_1}}_{i_{j_2 j_3 \ldots j_{k+1}}} \pm 0)}\right] \cdot \left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{b^{j_1}_{i_{j_2 j_3 \ldots j_{k+1}}}}{(f^{-1})^+ (x^{q_{j_1}}_{i_{j_2 j_3 \ldots j_{k+1}}})}\right] < \infty,$$

selon des raisonnements similaires. Les inégalités cherchées résultent immédiatement.

Donc, pour tout $p \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\lim_{x\to m_i^p} f_i^p(x) > 0 \text{ et } \lim_{x\to M_i^p} f_i^p(x) < \infty,$$

si $m_i^p > a$ et $M_i^p < b$. D'une manière semblable et encore plus simple, on prouve aussi les mêmes inégalités, où p est remplacé par n. Donc les fonctions f_i^n peuvent être prolongées par continuité dans les extrémités des intervalles I_i^n, en arrivant ainsi à la fonction f_i^{n+1}, renotée de nouveau par F_k, car elle dépend d'une constante multiplicative k, comme on le remarque aisément.

La fonction

$$\overline{\varphi}(x) = \int_{x_0}^{f(x)} F_k(t)\,dt,$$

où $x_0 \in (f(a), f(b))$ et $x \in (a, b)$ est convexe et strictement croissante sur (a, b) ; l'inverse $\overline{\psi}(u)$ de la fonction $\int_{x_0}^{x} F_k(t)\,dt$ est concave et strictement croissante sur $(\overline{\varphi}(a), \overline{\varphi}(b))$ et

$$\overline{\psi}(\overline{\varphi}(x)) = f(x)$$

évidemment. Donc f est du type K.

3. LES CLASSES DES FONCTIONS φ ET ψ

Soit $f : (a, b) \to (c, d)$ une fonction du type K. Considérons la fonction F_k construite plus haut et une fonction croissante et strictement positive $h : (c, d) \to R$, autrement arbitraire. Notons

$$\Psi_h(x) = \int_{x_0}^{x} F_k(t)\,h(t)\,dt + C$$

où x_0, $x \in (c, d)$ et C est une constante arbitraire.

Les fonctions φ et ψ auront dorénavant les significations comprises dans la définition du type K.

Théorème 2. *Si les conditions du théorème 1 sont remplies, alors il y a une fonction h telle que* $\varphi = \Psi \circ f$ *et* $\psi = \Psi^{-1}$.

Théorème 3. *Supposons que les conditions du théorème 1 sont remplies. La classe des fonctions* φ *coïncide à celle des fonctions dérivables à droite* $\varphi^* : (a, b) \to R$, *telles que pour chaque* $\rho \in (a, b)$, *si* $\varphi^{*+}(\rho) = \overline{\varphi}^+(\rho)$, *alors* $\varphi^{*+}(\iota) \leqslant \overline{\varphi}^+(\iota)$ *pour* $\iota < \rho$ *(et* $\varphi^{*+}(\iota) \geqslant \overline{\varphi}^+(\iota)$ *pour* $\iota > \rho$*). La classe des fonctions* ψ *coïncide à celle des fonctions* $\psi^* : I \to (c, d)$, *telles que* $(\psi^{*-1})^+$ *existe et, pour chaque* $\tau \in (c, d)$, *si* $(\psi^{*-1})^+(\tau) = (\overline{\psi}^{-1})^+(\tau)$, *alors* $(\psi^{*-1})^+(\nu) \leqslant (\overline{\psi}^{-1})^+(\nu)$ *pour* $\nu < \tau$ *(et* $(\psi^{*-1})^+(\nu) \geqslant (\overline{\psi}^{-1})^+(\nu)$ *pour* $\nu > \tau$*),* I *étant un intervalle arbitraire.*

Les démonstrations des théorèmes 2 et 3 sont analogues aux démonstrations des théorèmes 2 et 4 de [5].

4. NOUVEAUX TYPES DE FONCTIONS K

Définition 1. *On appelle* K_0 *la classe des fonctions du type* K.

Définition 2. *On appelle* K_1 *la classe des fonctions* $f : (a, b) \to R$ *pour lesquelles il y a les fonctions* φ *définie, strictement croissante, dérivable et à dérivée croissante sur* (a, b) *et* ψ *définie, strictement croissante, dérivable et à dérivée décroissante sur* $(\varphi(a), \varphi(b))$ *telles que* $\psi \circ \varphi = f$.

Définition 3. *On appelle* K_2 *la classe des fonctions contenues dans* K_1 *et deux fois dérivables.*

Définition 4. *On appelle* $K_{\bar{1}}$ $(K_{\bar{2}})$ *la classe des fonctions de* K_1 (K_2) *dont les premières (deuxièmes) dérivées sont continues.*

Proposition. *Entre les classes introduites plus haut, on a les relations*

$$K_0 \subset K_1 = K_{\bar{1}} \subset K_2 \subset K_{\bar{2}}.$$

Démonstration. Les définitions des ensembles ci-dessus montrent que

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_{\bar{1}} \subseteq K_2 \subseteq K_{\bar{2}}.$$

L'exemple de la section 4 de [5] nous procure une fonction du type K non dérivable dans un point de l'intervalle de définition, donc $K_0 \supset K_1$.

Si $f \in K_1$, alors f' a des limites latérales finies dans tout point de l'intervalle de définition, car φ' et ψ' sont monotones ; donc f', ne pouvant avoir des discontinuités de la première espèce, est continue et, par suite, $K_1 = K_{\bar{1}}$.

La fonction $f : (0, 2) \to R$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in (0, 1) \\ 2x - 1 & \text{si } x \in (1, 2) \end{cases}$$

appartient à K_1 parce qu'elle s'écrit $f = i \circ f$, où $i : (0,2) \to (0,2)$ est la fonction identique, f et i sont dérivables, f' est croissante et i' constante sur $(0,2)$. Mais f' n'est pas dérivable dans $1 \in (0,2)$, donc $K_1 \supset K_2$.

Une fonction de la classe K_2 à dérivée seconde discontinue est donnée par l'exemple de la section 1. Son appartenance à cette classe sera assurée par le théorème 5 de la section suivante. Ainsi on a établi la dernière inclusion stricte à démontrer, $K_2 \supset K_{\bar{2}}$.

5. THÉORÈMES DE SUFFISANCE

THÉORÈME 4. *Si la fonction* $f : (a,\ b) \to R$ *satisfait aux suivantes conditions* :

1° f *est dérivable sur* $(a,\ b)$,

2° f' *est à variation bornée sur tout* $[\alpha,\ \beta] \subset (a,\ b)$,

3° $f' > 0$ *sur* $(a,\ b)$,

4° $\mathcal{D}_{f'}$ *est réductible*,

alors $f \in K_1$.

Remarque. Ici $\mathcal{D}_{f'}$ désigne seulement l'ensemble des points d'extrême relatif strict de f' (cette fonction n'a pas de points de discontinuité : $K_1 = K_{\bar{1}}$).

Démonstration. La fonction f' étant continue, $\inf f' > 0$ sur tout $[\alpha,\ \beta] \subset (a,\ b)$. Donc les conditions du théorème 1 sont remplies et $f \in K_0$. La construction des fonctions $\bar{\varphi}$ et $\bar{\psi}$, faite à la démonstration du théorème 1, montre que $\bar{\varphi}$ et $\bar{\psi}$ sont dérivables, en tenant compte de la dérivabilité de f. Les fonctions $\bar{\varphi}$ et $\bar{\psi}$ sont l'une convexe et l'autre concave, d'où $\bar{\varphi}'$ et $\bar{\psi}'$ sont l'une croissante et l'autre décroissante ; donc $f \in K_1$.

THÉORÈME 5. *Si la fonction* $f : (a,\ b) \to R$ *satisfait aux conditions du théorèmes 3 et, en outre, est deux fois dérivable sur* $(a,\ b)$, *alors* $f \in K_2$.

Démonstration. En vérifiant les conditions du théorème 4, la fonction f appartient à K_1. L'existence de f'' assure l'appartenance de f à K_2.

THÉORÈME 6. *Si la fonction* $f : (a,\ b) \to R$ *satisfait aux conditions suivantes* :

1° f *est deux fois dérivable sur* $(a,\ b)$,

2° f'' *est continue sur* $(a,\ b)$,

3° $f' > 0$ *sur* $(a,\ b)$,

alors $f \in K_{\bar{2}}$[2]).

6. LES CLASSES DES FONCTIONS φ_1, ψ_1 ET φ_2, ψ_2

Soient φ_i et ψ_i les fonctions notées par φ et ψ dans la définition de la classe K_i $(i = 1,\ 2)$.

Considérons la fonction $f_i : (a,\ b) \to (c,\ d)$ satisfaisant aux conditions du théorème $3 + i$, la fonction $F_k^i : (c,\ d) \to R$ $(i = 1,\ 2)$ construite

---

[2]) Pour une démonstration, voir [4], [2].

à la démonstration du théorème 1 et la fonction continue, croissante et strictement positive $h:(c,\ d)\rightarrow R$, autrement arbitraire. Notons

$$\Psi_h^i(x)=\int_{x_0}^{x} F_k^i(t)\,h(t)\,\mathrm{d}t+C$$

où $x_0,\ x\in(c,\ d)$ et C est une constante arbitraire.

THÉORÈME 7. *Si les conditions du théorème* $3+i$ *sont remplies, alors il y a une fonction h telle que* $\varphi_i=\Psi_h^i\circ f_i$ *et* $\psi_i=(\Psi_h^i)^{-1}$ $(i=1,\ 2)$.

Nous laissons au lecteur le soin de faire la démonstration, car elle suit le modèle de la démonstration du théorème 2 de [5].

Reçu le 6 août 1965

Faculté de Mathématique-Mécanique
de l'Université de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 2e éd., Paris Gauthier-Villars, 1950.
2. S. MARCUS, *Sur un théorème de G. Szekeres concernant les fonctions monotones et convexes*. Canad. J. of Math., 1959, **11**, 524–526.
3. M. NICOLESCU, *Analiză matematică*, vol. II. Ed. tehnică, Bucarest, 1958.
4. G. SZEKERES, *On a property of monotone and convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, 351–353.
5. T. ZAMFIRESCU, *Sur quelques théorèmes de G. Szekeres et S. Marcus, concernant les fonctions monotones et convexes*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 1965, **10**, *1*, 81–90.