BULL. MATH. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Roumanie
Tome 9 (57), nr. 3, 1965.

CARACTÉRISATIONS DES HYPERSURFACES CONVEXES

PAR

TUDOR ZAMFIRESCU (Bucarest)

INTRODUCTION

Le but de cet article est de montrer comment il est possible d'éviter quelques précisions comprises dans la définition des hypersurfaces convexes, qui sont en fait superflues, c'est-à-dire comment on peut élargir la définition pour qu'on ait encore une bonne caractérisation des hypersurfaces convexes.

Soit E_n l'espace euclidien à n dimensions. Habituellement un ensemble $C \subset E_n$ est appelé *hypersurface convexe* s'il existe un corps convexe (ensemble convexe contenant des points intérieurs), pour lequel C soit la frontière et si C n'est pas formé d'un ou deux hyperplans. Dans ce cas, il est connu que C est soit *fermée* (homéomorphe à une hypersphère S_{n-1}), soit *ouverte* (homéomorphe à un hyperplan E_{n-1}), soit *cylindrique* (homéomorphe à $E_r \times S_{n-r-1}$, où $1 \leqslant r \leqslant n-2$) [1].

Considérons ensuite seulement de telles hypersurfaces $S = \mathcal{A}(V)$, obtenues en appliquant un automorphisme $\mathcal{A}$ de l'espace E_n à une sous-variété canonique $V = E_r \times S_{n-r-1}$, où $0 \leqslant r \leqslant n-1$ et $E_0 = S_0 = \{0\}$. Dans le cas d'une courbe fermée de E_2, il s'agit d'une courbe de Jordan. On remarque tout de suite que toute hypersurface envisagée, soit elle fermée, ouverte ou cylindrique, a pour complémentaire un ensemble ouvert à deux composantes connexes.

Soient $[x, y]$ le segment determiné par $x, y \in E_n$, $[x, y)$ la semi-droite à une extrémité x et passant par y, (x, y) la droite contenant $[x, y]$ et $|x, y|$ la distance euclidienne entre x et y. Désignons par $\overline{M}$ la fermeture topologique de $M \subset E_n$.

CARACTÉRISATION PAR LA COMPOSANTE DE LA COMPLÉMENTAIRE NON-PRÉCISÉE

D é f i n i t i o n 1. *Un hyperplan H est appelé hyperplan d'appui pour l'hypersurface S si S se trouve entièrement dans l'un des semiespaces fermés bornés par H.*

L e m m e 1. *S'il existe un hyperplan d'appui dans tout point de l'hypersurface S, alors S est convexe.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient D_1 et D_2 les composantes connexes de la complémentaire de S, Σ l'intersection de S avec un plan Π, x et y deux points sur Σ, H_x et H_y deux hyperplans d'appui de S dans x et y, $\eta_x = H_x \cap \Pi$, $\eta_y = H_y \cap \Pi$, R_x et R_y les semiplans ouverts bornés par η_x et η_y, disjoints de Σ. Supposons que $R_x \subset D_1$ et $R_y \subset D_2$. Si η_x et η_y ne sont pas parallèles, alors

$$D_1 \cap D_2 \supset R_x \cap R_y \neq \emptyset,$$

absurde. Si η_x et η_y sont parallèles, alors il y a une droite η orthogonale à η_x et η_y ne recontrant pas Σ. Si R est le semiplan borné par η disjoint de Σ, alors soit $R \subset D_1$ et

$$D_1 \cap D_2 \supset R_y \cap R \neq \emptyset,$$

soit $R \subset D_2$ et

$$D_1 \cap D_2 \supset R_x \cap R \neq \emptyset,$$

absurde. Donc il y a $i \in \{1, 2\}$ tel que $R_x \cup R_y \subset D_i$ pour tous $x, y \in \Sigma$. Selon le théorème 9 de [2], Σ est convexe.

On sait que si toutes les sections planes d'une hypersurface sont des courbes convexes, alors l'hypersurface est, elle même, convexe. Donc S est convexe et le lemme est prouvé.

T h é o r è m e 1. *Une hypersurface S (fermée, ouverte ou cylindrique), dont la complémentaire a D_1, D_2 pour composantes connexes est convexe si et seulement si pour toute paire de points x, $y \in S$, il y a $i \in \{1, 2\}$ tel que*

$$[x, y] \cap D_i = \emptyset$$

D é m o n s t r a t i o n. Si S est convexe alors il y a un corps convexe C dont la frontière est S. L'intérieur et l'extérieur de C, étant connexes et couvrant $E_n - S$, coïncident à D_1 et D_2. Selon la convexité de C, si x, $y \in S$, alors

$$[x, y] \subset C \cup \{x, y\} \subset D_1 \cup S,$$

d'où

$$[x, y] \cap D_2 = \emptyset$$

Pour démontrer la réciproque, nous allons prouver que l'indice i, qui dans l'énoncé dépend de x et y, reste en fait toujours le même.

Supposons que S n'est pas convexe; alors il existe une section plane Σ qui aussi ne l'est pas. Soit $\Delta_i = \Pi \cap D_i$, où Π est le plan de Σ. Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre points se trouvant dans cette ordre sur Σ, tels que

$$[a_1, a_2] \cap \Delta_1 \neq \emptyset$$

et

$$[a_3, a_4] \cap \Delta_2 \neq \emptyset.$$

Il faudra considérer les positions relatives de ces quatre points.

Soient $b_i \in [a_{2i-1}, a_{2i}] \cap \Delta_i$ et B_i un disque centré en b_i et disjoint de Σ $(i = 1, 2)$. Il existe un semiplan topologiquement ouvert s_i borné par (a_{2i-1}, a_{2i}), tel que la semidroite $[b_i, u)$ rencontre Σ quelque soit $u \in s_i$.

Si $b_1 \notin s_2$ et $b_2 \notin s_1$, alors (b_1, b_2) rencontre Σ en trois points c_1, c_2, c_3 (au moins), le premier entre B_1 et B_2 et les autres au delà de B_1 et B_2. On a

$$[c_2, c_3] \cap \Delta_i \neq \emptyset \quad (i = 1, 2),$$

ce qui contradit l'hypothèse faite à l'égard de S.

Si $b_1 \in s_2$ et $b_2 \in s_1$, on déduit que a_2 et a_3 sont séparés par (b_1, b_2). Donc (b_1, b_2) rencontre Σ en trois points c_1, c_2, c_3, trouvés dans cette ordre, entre a_1 et a_2, a_2 et a_3, a_3 et a_4, sur Σ. L'ordre est la même sur (b_1, b_2), qui rencontre donc Δ_2 entre c_1 et c_2 et Δ_1 entre c_2 et c_3, d'où

$$[c_1, c_3] \cap \Delta_i \neq \emptyset \quad (i = 1, 2),$$

absurde.

Si $b_1 \in s_2$ et $b_2 \notin s_1$, alors a_1 ou a_2, par exemple a_1, appartient à s_2.

Si $a_2 \in s_2$, alors $[b_2, a_2]$ rencontre Σ et soit $c_1 \in [b_2, a_2] \cap \Sigma$. Évidemment a_2 et a_3 sont séparés par (a_4, c_1), donc il y a deux points sur Σ, c_1 entre a_3 et a_4 et c_2 entre a_2 et a_3, colinéaires avec a_4. On a

$$[c_2, a_4] \cap \Delta_i \neq \emptyset \quad (i = 1, 2),$$

absurde.

Si $a_2 \notin s_2$, soit a_2' un point de s_2 où la courbe Σ rencontre la parallèle par b_1 à (a_3, a_4). On continue par des raisonements similaires au cas où $a_2 \in s_2$, le rôle de a_2 étant joué par a_2'.

Donc l'hypersurface S est convexe et la démonstration est achevée.

CARACTÉRISATIONS PAR CONDITIONS LOCALES

Théorème 2. *Une hypersurface S (fermée, ouverte ou cylindrique) est convexe si et seulement s'il existe un nombre k et un indice $i \in \{1, 2\}$ tels que pour tous $x, y \in S$, avec $|x, y| < k$, on ait*

$$[x, y] \cap \Delta_i = \emptyset.$$

Démonstration. Il faut démontrer seulement que dans les conditions du théorème, l'hypersurface est convexe, car l'assertion réciproque est évidente.

Soient $i = 1$ et Σ une section plane non-convexe de l'hypersurface S supposée non-convexe. Considérons les points $x, y \in \Sigma$, tels que

$$[x, y] - \{x, y\} \subset D_1.$$

Soit Δ_1 l'intersection du plan de Σ avec D_1. Le segment $[x, y]$ décompose Δ_1 en deux domaines plans, l'un non-borné Δ_3 et l'autre borné Δ_4.

Soit $\mathcal{F}$ la famille des droites parallèles à (x, y) et intersectant $\overline{\Delta}_4$. Soit $f \in \mathcal{F}$ la droite dont la distance à (x, y) atteint le maximum. Alors $f \cap \overline{\Delta}_4$ est une réunion de segments de longueurs supérieures à k. En effet, dans le cas contraire l'une des composantes connexes de $f^* \cap \overline{\Delta}_4$, où $f^* \in \mathcal{F}$ est une droite suffisamment proche de f, serait inférieure à k, ce qui viendrait en contradiction avec l'hypothèse. Soit $[z, w]$ un segment maximal de $f \cap \Delta_4$. Soient u, v deux points de Σ, tels que w se trouve entre eux sur Σ et que les inégalités suivantes soient remplies:

$$|u, w| < k/2, \quad |v, w| < k/2.$$

Alors $[u, v] \cap \Delta_4 \neq \emptyset$ et $|u, v| < k$, ce qui contradit l'hypothèse. Donc S doit être convexe et la démonstration est terminée.

Théorème 3. *Une hypersurface S (fermée, ouverte ou cylindrique) est convexe si et seulement si pour un certain indice $i \in \{1, 2\}$ et pour tout point $x \in S$ il y a un disque $(n-1)$-dimensionnel d_x centré en x tel que $d_x \cap D_i = \emptyset$.*

Démonstration. Soient Π un plan de E_n, $\Sigma = \Pi \cap S$, $\delta_x = \Pi \cap d_x$, y, $z \in \Sigma$ et $\sigma \subset \Sigma$ un arc joignant y et z. Construisons d_x pour tout $x \in \sigma$. L'arc étant compact, extrayons les disques d_{x_1}, $d_{x_2}, \ldots$ $\ldots, d_{x_m}$ tels que $\bigcup_{j=1}^{m} d_{x_j} \supset \sigma$. Alors $\delta_y, \delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_m}, \delta_z$ déterminent une ligne poligônale convexe π, de sorte que $\pi \cap s_y = \emptyset$, où s_y est le semiplan ouvert intersectant D_i et borné par la droite contenant δ_y. Il résulte que $z \notin s_y$, donc $\Sigma \cap s_y = \emptyset$, pour tout $y \in \Sigma$, d'où, en vertu du lemme 1, Σ est convexe, donc S l'est également. L'assertion réciproque est évidente.

CARACTÉRISATION PAR HYPERSPHÈRES D'APPUI

Définition 2. *Une hypersphère B est appelée hypersphère d'appui pour l'hypersurface S dans $x \in S$ si $x \in B$ et si la composante bornée $\mathcal{J}B$ de la complémentaire de B ne rencontre pas S.*

Théorème 4. *L'hypersurface S (fermée, ouverte un cylindrique) est convexe si et seulement s'il existe un ensemble dense E sur S, tel que pour tout $x \in E$, il y a une hypersphère d'appui pour S à rayon arbitrairement grand.*

Dénonstration. Si S est convexe, alors soit D_1 la composante connexe convexe de $E_n - S$. Il est connu [2] qu'il existe en chaque point $x \in S$ un hyperplan d'appui H. Prenons donc $E = S$; on peut construir une hypersphère tangente a H à rayon arbitrairement grand, en fixant convenablement son centre sur la normale extérieure (incluse dans $S \cup D_2$) en x à H.

Inversement, supposons que les conditions du théorème sont remplies et démontrons que S est convexe. Soit $\{B_n\}$ une suite d'hypersphère satisfaisant aux conditions de l'énoncé et contenant $x \in E$, telles que les rayons grandissent indéfiniment. Si $\{b_m\}$ est la suite des centres, considérons la suite partielle $\{b_{m_p}\}$, telle que $\{(x, b_{m_p})\}$ soit convergeante; désignons par (x, b) la droite limite.

Démontrons qu'il existe un indice $i \in \{1, 2\}$ tel que l'hyperplan H orthogonal à (x, b) en x et D_i soient disjoints. En effet, si $y \in D_i \cap H$, où $i \in \{1, 2\}$, alors il existe une hypersphère A de rayon ρ contenue dans D_i et centrée en y. Soient A' l'hypersphère de rayon $\rho/2$ et centre y et K la réunion des hyperplans orthogonaux aux droites passant par x et rencontrant A'. Soit (x, b_{m_q}) un terme de la suite $\{(x, b_{m_p})\}$, se trouvant dans K et tel que

$$|x, b_{m_q}| > \frac{|x, y|^2}{\rho} - \frac{\rho}{4}.$$

On constate alors que l'hyperplan H' orthogonal à (x, b_{m_q}) et passant par x rencontre A', qu'il y a $z \in A' \cap H'$ tel que $|x, z| < |x, y|$, que B_{m_q} rencontre l'hypersphère de centre z et rayon $\rho/2$ et, par suite, que $B_{m_q} \cap A \neq \emptyset$. Il résulte que B_{m_q} contient un point a_i de D_i. Posons $\{i, j\} = \{1, 2\}$. D'une manière analogue, on déduit que si $D_j \cap H \neq \emptyset$, alors il existe un indice r et un point a_j, tels que $a_j \in B_{m_r} \cap D_j$. Si S n'est pas un hyperplan, on remarque tout de suite que, si q et r sont suffisamment grands, alors H n'est pas un hyperplan séparant b_{m_q} et b_{m_r} et tangeant à B_{m_q} et B_{m_r}, ce que nous allons supposer à l'égard de q et r. Soit alors $x' \in B_{m_q} \cap B_{m_r} - \{x\}$. On a

$$x \notin [a_i, x'] \cup [x', a_j],$$

mais il existe $x'' \neq x$, tel que

$$x'' \in S \cap ([a_i, x'] \cup [x', a_j]),$$

d'où soit $x'' \in S \cap \partial B_{m_q}$, soit $x'' \in S \cap \partial B_{m_r}$, l'hypothèse étant contradite. Donc H est un hyperplan d'appui de S en x.

Soit u un point quelconque de S. Il existe une suite $\{u_k\}$ de points de E, convergeant vers u. Nous avons déjà vu qu'on peut construir un hyperplan d'appui H_k de S dans chque point u_k. Soit $\{l_k\}$ la suite des droites orthogonales à H_k menées par u et $\{l_{k_h}\}$ une suite partielle convergeante vers l. On constate immédiatement que $\{H_{k_h}\}$ a H pour limite et que $H \cap S \neq \emptyset$, où l'hyperplan H est orthogonal à l et contient u. Si v et w étaient deux points de S séparés par H, alors il existerait un indice g tel que v et w soient aussi séparés par H_{k_g}, absurde; donc H est un hyperplan d'appui de S. Donc S admet dans tous ses points des hyperplans d'appui, d'où, selon le lemme 1, elle est convexe.

CARACTÉRISATIONS GLOBALES PAR DEUX TYPES DE CONNEXIONS

Définition 3. *Un ensemble $M \subset E_n$ est A-connexe si pour tous $x, y \in M$, il existe un arc de Jordan plan convexe inclus dans M qui les joint.*

Dans le cas où $n = 2$, on arrive aux „*arcwise connected sets*" de [3].

Définition 4. *Un ensemble $M \subset E_n$ est U-connexe si pour tous $x, y \in M$, il existe un continu qui les contient, inclus dans M et dans un semiplan fermé, borné par (x, y).*

Dans le cas où $n = 2$, on arrive aux „*unilaterally connected sets*" de [3].

Évidemment l'A-connexion implique l'U-connexion, mais, en général, la réciproque n'est pas vraie.

Lemme 2. *Soient un ensemble $M \subset E_n$ et un nombre $m \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$. L'ensemble M est A-connexe (U-connexe) si et seulement si pour tous $x, y \in M$, il existe une variété linéaire m-dimensionnelle $V_{xy} \ni x, y$, telle que $M \subset V_{xy}$ soit A-connexe (U-connexe).*

La démonstration est immédiate.

Théorème 5. *Une hypersurface S (fermée, ouverte ou cylindrique) est convexe si et seulement si elle est U-connexe).*

Démonstration. Supposons que S est convexe. Alors, si $x, y \in S$ et P est un plan contenant x et y, la courbe $P \cap S$ est convexe, donc il existe un arc convexe sur $P \cup S$ joignant x et y; par conséquent S est A-connexe, donc U-connexe aussi.

Supposons que S n'est pas convexe. Alors, d'après le théorème 1, il y a quatre points x, y, u, v tels que $x, y \in S$, $u \in D_1 \cap [x, y]$, $v \in D_2 \cap [x, y]$. Soit Π un plan contenant (x, y).

Si $\Sigma = \Pi \cap S$ est une courbe ouverte, alors évidemment on ne trouve aucun continu contenant x et y inclus dans Σ et dans un semiplan fermé borné par (x, y), donc Σ n'est pas U-connexe.

Si Σ est une courbe fermée, alors soit $D_1 \cap \Pi$ son intérieur. Désignons par p, q les deux points de $\Sigma \cap (x, y)$, tels que $[p, q]$ soit maximal. Soit σ l'arc de Σ, d'extrémités p, q, tel que u et v soient séparés par la courbe $\sigma \cup ((x, y) - [p, q])$. Cette courbe ouverte décompose le plan en deux domaines et $\Sigma - \sigma$ se trouve dans un seul d'entre eux, à savoir dans celui qui contient u. Soient s le semiplan borné par (x, y) et dont l'intersection avec le domaine précédent est non-borné, δ un disque centré en v et inclus dans D_2 et l une droite parallèle à (x, y) et intersectant $\delta \cap s$.

Soient encore $a, b, c, d \in l \cap \Sigma$, tels que $[a, d]$ soit maximal, $[b, c]$ minimal et $b \in [a, c]$. On déduit alors que $b, c \in \sigma$ et $a, d \in \Sigma - \sigma$.

Maintenant on voit aisément que chacun des deux arcs joignant a et c n'est pas inclus dans un semiplan fermé borné par l, donc Σ n'est pas U-connexe.

Selon le lemme 2, S aussi n'est pas U-connexe.

Théorème 6. *Une hypersurface S (fermée, ouverte ou cylindrique) est convexe si et seulement si elle est A-connexe).*

Démonstration. L'A-connexité de S dans l'hypothèse que S est convexe a été montré à la démonstration du théorème précédent. Si S est A-connexe, alors elle est U-connexe aussi, donc convexe, vu ayant le théorème 5.

En conclusion, *à l'égard des hypersurfaces que nous envisageons, la convexité, l'A-connexité et l'U-connexité sont équivalentes.*

Reçu le 23.III.1966

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Busemann, „*Convex surfaces*", Intersc. tracts in pure and appl. math., 6, 1958.
[2] H. G. Eggleston, „*Convexity*", Cambridge University Press, 1963.
[3] F. A. Valentine, „*A characterization of simply connected closed arcwise convex sets*", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 2, 1951.