

RÉDUCTIBILITÉ ET SÉRIES LINÉAIRES
DE CORPS CONVEXES

par Tudor ZAMFIRESCO

M. Paul Vincensini a introduit, et appliqué à de nombreux problèmes [9], la notion de *prolongement d'une série linéaire de corps convexes*. Ce même auteur a montré tout récemment [10], que l'ensemble \mathcal{E} des corps convexes C de l'espace euclidien E^n à n dimensions munis d'une frontière à $n - 1$ dimensions douée en chaque point de $n - 1$ rayons de courbure principaux finis et non nuls est susceptible d'une *fibration* intéressante, les fibres étant les différents sous-ensembles (e_Δ) de \mathcal{E} dont les éléments sont constitués par les corps convexes ayant un même corps convexe centré Δ pour *domaine vectoriel* [9], l'ensemble base étant l'ensemble $\{\Delta\}$ des corps convexes centrés de E^n .

M. Preston C. Hammer a, d'autre part [3], introduit la notion de *réductibilité* d'un corps convexe, autre moyen de définir des familles de corps convexes susceptibles de prolongement.

Le présent article expose un certain nombre de résultats auxquels conduit le rapprochement des deux espèces de prolongeabilité précédentes. Nous nous bornons ici à la considération des corps dont les frontières sont douées en chaque point de $n - 1$ rayons de courbure principaux finis et non nuls. Le cas général des ensembles convexes à frontière non différentiable sera prochainement envisagé dans une autre publication.

1. *Introduction.* — Dans l'espace euclidien à n dimensions E^n nous appellerons *corps convexes*, les ensembles convexes possédant des points intérieurs et bornés par des hypersurfaces fermées admettant en chaque point $n - 1$ rayons de courbure principaux finis et non-nuls. Le terme « ensemble convexe » sera réservé au cas où la frontière n'admet pas nécessairement la particularisation précédente.

Soit $E(a, b)$ le segment $\rho a + (1 - \rho) b$ ($0 \leq \rho \leq 1$), S l'hyper-sphère unitaire $\{x; \|x\| = 1\}$, centrée à l'origine O des axes de coordonnées. Désignons par $H_C(\omega)$, où $\omega \in S$, la fonction d'appui du corps C . Deux points a et b de la frontière B du corps convexe C sont dits diamétralement opposés s'il existe deux plans d'appui parallèles contenant l'un a et l'autre b ; la corde $E(a, b)$ est alors un diamètre de C .

Nous écrirons, comme d'habitude, $\mu M + \nu N = \{ \mu x + \nu y; x \in M, y \in N \}$ pour $M, N \subset E^n$, μ, ν étant des nombres réels ¹⁾.

Soit C un corps convexe. L'ensemble $C - C$ est un nouveau corps convexe [5], admettant 0 comme centre de symétrie, doué de propriétés remarquables liées à C , et dénommé *domaine vectoriel* du corps C [4]. Nous considérons aussi, avec M. P. Vincensini [10], dans l'ensemble \mathcal{E} des ensembles n -dimensionnels convexes de E^n , le sous-ensemble $\mathcal{E}_c \subset \mathcal{E}$ constitué par les ensembles centrés de \mathcal{E} , et les familles d'ensembles $e_\Delta = \{ C \in \mathcal{E}; C - C = \Delta \}$, regardées comme des *fibres* issues des éléments $\Delta \in \mathcal{E}_c$.

Soient C_0 et C_∞ deux corps convexes. La fonction

$$H_{C_\lambda}(\omega) = \frac{H_{C_0}(\omega) - \lambda H_{C_\infty}(\omega)}{1 - \lambda},$$

est, pour chaque $\lambda < 0$, la fonction d'appui d'un certain corps convexe C_λ appartenant à la série linéaire $[C_0, C_\infty]$. Mais, si λ_0 est le plus grand nombre ≤ 1 , et λ_∞ le plus petit nombre ≥ 1 tels que pour $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ ou pour $\lambda \geq \lambda_\infty$, $H_{C_\lambda}(\omega)$ soit la fonction d'appui d'un corps convexe, en ajoutant aux corps de la série $[C_0, C_\infty]$ ceux qui correspondent aux valeurs positives ainsi définies de λ , on obtient une nouvelle série plus étendue [9] dite série prolongée, λ_0 et λ_∞ étant ce que nous appellerons les limites respectivement *gauche* et *droite* de la prolongeabilité.

Considérons maintenant l'ensemble convexe borné n -dimensionnel C . Soit $C_b(r)$ homothétique à C , le rapport d'homothétie

¹⁾ Le signe « — » entre deux ensembles aura la signification ainsi définie.

étant r et le centre un point b sur la frontière B de C . Notons

$$C(r) = \begin{cases} \bigcap_{b \in B} C_b(r) & \text{si } r \leq 1 \\ \bigcup_{b \in B} C_b(r) & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

M. P. Hammer a démontré que les ensembles $C(r)$ sont vides ou convexes ([3], théorème 5, propriétés 1 et 3). Nous appellerons les corps $C(r)$ *corps associés* à C . M. P. Hammer a établi aussi l'existence d'un nombre $r_i \leq 1$ tel que

$$C = (C(r))(r/(2r-1)) \quad \text{si } r \geq r_i,$$

mais

$$C \supset (C(r))(r/(2r-1))^1 \quad \text{si } r < r_i$$

([3], théorème 7). Nous appellerons r_i le *nombre de réductibilité* de C . On dit que C est *réductible* (jusqu'à $C(r_i)$) si $r_i < 1$, *complètement réductible* si $r_i = \frac{1}{2}$ et *irréductible* si $r_i = 1$ [3].

2. *La série linéaire de deux corps symétriques.* Soit C_0 et C_∞ deux corps convexes symétriques par rapport à un point θ ($C_0 = -C_\infty$). En vertu de cette symétrie, on a $C_\lambda = -C_{1/\lambda}$ pour tout corps C_λ appartenant à la série linéaire $[C_0, C_\infty]$ prolongée, c'est-à-dire pour tout $\lambda \notin [\lambda_0, \lambda_\infty]$. En particulier, pour $\lambda = -1$, on a $C_{-1} = -C_{-1}$, donc $C_{-1} \in \mathcal{E}_c$. Evidemment $\lambda \notin [\lambda_0, \lambda_\infty]$ implique $1/\lambda \notin [\lambda_0, \lambda_\infty]$; on a donc $\lambda_0 \lambda_\infty = 1$, ce qui exprime la symétrie des limites de prolongeabilité. On voit ainsi que si $[C_0, C_\infty]$ est indéfiniment prolongeable dans un sens, elle l'est aussi dans l'autre. Dans ce cas C_0 et C_∞ coïncident à une translation près et chacun d'entre eux est doué d'un centre de symétrie, ainsi que tous les corps de la série prolongée.

En général, les corps C_0 et C_∞ ont même largeur dans chaque direction. Il résulte donc ([9], p. 47) que tous les corps de la série linéaire prolongée font partie d'une même fibre de \mathcal{E} .

3. *Hypersurface associée à un corps convexe.* — On peut, comme nous l'avons montré en [11], associer à un corps convexe

¹⁾ Nous utilisons les signes \subseteq et \supseteq pour les inclusions non-strictes, $=$ et \supset désignant les inclusions strictes.

quelconque C une hypersurface, liée à l'étude de la réductibilité de C , et dont nous allons rappeler ici la définition et quelques propriétés. Considérons la famille \mathcal{D} de tous les diamètres de C . L'ensemble des points

$$\gamma(r) = \left\{ \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}; E(x_1, x_2) \in \mathcal{D}, r = \frac{1}{1 - \lambda}, \lambda \geq -1 \right\}$$

constitue l'hypersurface dont il vient d'être question.

En ce qui concerne les frontières des corps convexes de E^n on a le résultat, d'ailleurs presque évident suivant :

Soit B la frontière d'un tel corps C et $E(a, b)$ un diamètre de C . Les hyperplans tangents à $\gamma(r)$ aux deux points de $\gamma(r) \cap E(a, b)$ sont parallèles aux hyperplans tangents en a et b à B .

Et de là on déduit aussitôt un résultat qui nous sera utile concernant l'hypersurface $\gamma(r)$. Soit $\Pi(\omega)$ l'hyperplan tangent à B au point d'image sphérique ω ; on a le

THÉORÈME 1. *L'hypersurface $\gamma(r)$ est l'enveloppe de la famille des hyperplans*

$$\frac{(1-r)\Pi(\omega) - r\Pi(-\omega)}{1-2r} \quad (\omega \in S).$$

4. *Condition nécessaire et suffisante pour la réductibilité des corps associés.* Soit C un corps convexe réductible; les corps associés de Hammer $C(r)$ sont, pour $r > r_i$, réductibles jusqu'au même corps associé $C(r_i)$ et, pour $r \leq r_i$, irréductibles ou vides; une condition nécessaire et suffisante pour la réductibilité de $C(r)$ est donc $r > r_i$.

THÉORÈME 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que $r \geq r_i$ est que l'hypersurface associée $\gamma(r)$ soit convexe.*

En effet, en vertu de la régularité supposée de la frontière B du corps convexe C , on peut appliquer un résultat établi en [11], selon lequel $r \geq r_i$ si et seulement si si $\gamma(r) = B(r)$, où $B(r)$ désigne la frontière de $C(r)$. Mais $B(r)$ est une hypersurface convexe, et la nécessité de la condition est prouvée. Inversement, si $\gamma(r)$ est une hypersurface convexe, l'inclusion

$\gamma(r) \supseteq B(r)$ (voir [11]) et la convexité de $B(r)$ impliquent l'égalité des ensembles $\gamma(r)$ et $B(r)$ et, par suite, l'inégalité $r \geq r_i$.

La convexité de l'hypersurface $\gamma(r)$ est entendue ici au sens que $\gamma(r)$ borne un ensemble convexe et non nécessairement un corps convexe. On verra plus loin (section 6, théorème 6) que la condition que $\gamma(r)$ borne un corps convexe est nécessaire et suffisante pour que $r > r_i$, c'est-à-dire pour la réductibilité de $C(r)$.

5. *Décomposition de \mathcal{E} en classes d'équivalence à l'aide de la réductibilité.* La remarque du début de la section précédente relative à la réductibilité des corps associés de Hammer va nous conduire à une décomposition naturelle de la famille \mathcal{E} des ensembles convexes de E^n en classes d'équivalence, liée d'une manière frappante de la fibration dont on a parlé à l'introduction.

Soit $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{E}$ la famille des ensembles convexes irréductibles. Nous dirons que deux ensembles convexes sont équivalents s'ils sont réductibles jusqu'à un même corps associé ou s'ils sont complètement réductibles et homothétiques, c'est-à-dire si chacun d'eux est un certain corps associé de l'autre. Appelons classes de réductibilité les classes d'équivalence obtenues.

THÉORÈME 3. *Les éléments d'une même classe de réductibilité font partie, à une homothétie près, d'une même fibre de l'espace \mathcal{E} .*

Soient en effet C et $C(r)$ ($r > 1$) deux éléments d'une même classe de réductibilité. On a, d'après ce que l'on vient de voir, $B(r) = \gamma(r)$, $B(r)$ étant la frontière de $C(r)$ et $\gamma(r)$ l'enveloppe des hyperplans

$$\frac{(1-r)\Pi(\omega) - r\Pi(-\omega)}{1-2r}.$$

Il en résulte que $(2r-1)C$ et $C(r)$ ont des largeurs égales dans chaque direction, et appartiennent par suite à une même fibre de \mathcal{E} .

Plaçons-nous dans le cas particulier du plan E^2 , et désignons par L_D la largeur de F pour tout ensemble $D \subset E^2$ à frontière F rectifiable. On peut alors énoncer le

THÉORÈME 4. *Etant donné dans E^2 l'ensemble convexe $C(r)$, générateur de la classe de réductibilité d'un ensemble convexe éventuellement irréductible C , on a*

$$L_{C(r)} = (2r-1) L_C.$$

Nous venons en effet de constater l'appartenance de $(2r-1)C$ et $C(r)$ à une même fibre. Il en résulte que $L_{(2r-1)C} = L_{C(r)}$ ([9], p. 23). Mais C et $(2r-1)C$ étant homothétiques, $L_{(2r-1)C} = (2r-1)L_C$, et de là résulte la relation annoncée entre $L_{C(r)}$ et L_C .

6. *Les classes de réductibilité et les séries linéaires de corps symétriques.* Soit C un corps convexe réductible de E^n . Considérons la série linéaire $[C, -C]$. Nous allons démontrer le théorème suivant, principal résultat de ce travail:

THÉORÈME 5. *L'ensemble convexe $C(r)$ de la classe de réductibilité de C et le corps convexe $C_{-\lambda}$ de la série linéaire $[C, -C]$ prolongée, où $r = \frac{1}{1-\lambda}$ et $-1 \leq \lambda < 1$, coïncident à une homothétie près.*

Considérons à cet effet la fonction d'appui $H_C(\omega)$, et le paramètre différentiel du deuxième ordre $\Delta_2 H_C(\omega)$ de cette fonction relatif au ds^2 de la représentation sphérique de la frontière de C . Si $R_C^1(\omega), \dots, R_C^{n-1}(\omega)$ sont les $n-1$ rayons de courbure principaux de la frontière de C au point d'image sphérique ω , on a

$$\sum_{j=1}^{n-1} R_C^j(\omega) = \Delta_2 H_C(\omega) + (n-1) H_C(\omega),$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} R_{-C}^j(\omega) = \Delta_2 H_{-C}(\omega) + (n-1) H_{-C}(\omega)$$

([1], p. 565). La fonction d'appui de $C_{-\lambda}$ est

$$H_{C_{-\lambda}}(\omega) = \frac{H_C(\omega) + \lambda H_C(\omega)}{1 + \lambda},$$

donc

$$\sum_{j=1}^{n-1} R_{C_{-\lambda}}^j(\omega) = \Delta_2 H_{C_{-\lambda}}(\omega) + (n-1) H_{C_{-\lambda}}(\omega) = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} R_C^j(\omega) + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} R_{-C}^j(\omega)}{1 + \lambda}.$$

De la même façon, on peut exprimer la fonction d'appui de $C(r)$ à l'aide de celle de C :

$$H_{C(r)}(\omega) = \frac{H_C(\omega) - \lambda H_C(-\omega)}{1 - \lambda} = \frac{H_C(\omega) + \lambda H_{-C}(\omega)}{1 - \lambda};$$

on a donc

$$\sum_{j=1}^{n-1} R_{C(r)}^j(\omega) = \Delta_2 H_{C(r)}(\omega) + (n-1) H_{C(r)}(\omega) = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} R_C^j(\omega) + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} R_{-C}^j(\omega)}{1 - \lambda},$$

et il en résulte que

$$\sum_{j=1}^{n-1} R_{C(r)}^j(\omega) = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \sum_{j=1}^{n-1} R_{C_{-\lambda}}^j(\omega).$$

Si l'on tient compte du résultat (*voir* Favard [2]), selon lequel un corps convexe K est bien déterminé si l'on connaît la somme $\sum_{j=1}^{n-1} R_k^j(\omega)$ en chaque point $\omega \in S$, on déduit immédiatement de là que $C(r)$ et $\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} C_{-\lambda}$ coïncident à une translation près, ce qui achève la démonstration du théorème en vue.

Dans le raisonnement précédent le fait que les frontières de $C(r)$ et $C_{-\lambda}$ sont convexes n'est pas intervenu. A chaque ensemble convexe de la classe de réductibilité de C correspond donc un certain corps convexe de la série linéaire $[C, -C]$ prolongée et réciproquement. Si $\lambda \in [-1, 0]$, soit $C_{-\lambda} \notin [C, -C]$, on a $r \in [\frac{1}{2}, 1]$; et de même si $\lambda \in (0, 1)$, ou $C_{-\lambda} \in [C, -C]$, on a $r \in [1, \infty)$.

Nous avons donc $r_i = \frac{1}{1 + \lambda_0}$.

En tenant compte de ce que $\lambda_0 \lambda_\infty = 1$ (voir la section 2), on a aussi $r_i = \frac{\lambda_\infty}{1 + \lambda_\infty}$.

Nous avons prouvé (section 2) que C_{-1} est symétrique. Si C n'est pas symétrique il en est de même (exception faite pour C_{-1}) de tous les corps de la série $[C, -C]$, même prolongée; et cela parce que aucun élément de la classe de réductibilité de C n'admet un centre de symétrie.

Revenons maintenant au problème de la section 4. Il est connu ([9], p. 17) que, si C_0 et C_∞ sont deux corps convexes (au sens admis), la série $[C_0, C_\infty]$ peut être prolongée dans les deux directions, c'est-à-dire que l'on a $\lambda_0 \neq 0$ et $\lambda_\infty \neq \pm \infty$. Si C est un corps convexe, la limite gauche de prolongeabilité de $[C, -C]$ n'est pas nulle et l'on a par suite, $r_i < 1$. Nous pouvons dès lors préciser le théorème 2 de la manière suivante.

THÉORÈME 6. *Une condition nécessaire et suffisante pour la réductibilité de $C(r)$ est que l'hypersurface $\gamma(r)$ soit la frontière d'un corps convexe.*

En effet, si $C(r)$ est réductible, $r > r_i$ et, selon le théorème 2, $\gamma(r)$ borne l'ensemble convexe $C(r)$. Mais, d'après le théorème 5, $C(r)$ est homothétique à un certain corps convexe, donc il est, lui-même, un corps convexe. Réciproquement, si $\gamma(r)$ borne un corps convexe, à savoir $C(r)$ (voir la démonstration du théorème 2), nous venons de trouver que le nombre de réductibilité de $C(r)$ est inférieur à 1, $C(r)$ n'est donc pas irréductible, et par suite $r > r_i$.

7. *Expressions du nombre de réductibilité dans E^2 et E^3 .* — Considérons le cas du plan E^2 . Il est connu ([9], p. 18) que

$$\lambda_\infty = \max_{\omega \in S} \frac{R_C(\omega)}{R_{-C}(\omega)}.$$

On obtient, de la même manière,

$$\lambda_0 = \min_{\omega \in S} \frac{R_C(\omega)}{R_{-C}(\omega)},$$

donc

$$r_i = \max_{\omega \in S} \frac{R_C(\omega)}{R_C(\omega) + R_C(-\omega)}.$$

Remarquons encore qu'on peut exprimer r_i à l'aide des rayons de courbure des frontières de C et de son domaine vectoriel Δ aux points de même image sphérique :

$$r_i = \max_{\omega \in S} \frac{R_C(\omega)}{R_\Delta(\omega)}.$$

En effet, nous avons déjà précisé que Δ est aussi un corps convexe (au sens admis); en outre, $R_C(\omega) + R_C(-\omega)$ et $R_\Delta(\omega)$ sont égaux pour chaque $\omega \in S$, [8].

Pour un corps convexe plan C de largeur constante D_C ,

$$r_i = \frac{\max_{\omega \in S} R_C(\omega)}{D_C}.$$

Passons au cas de l'espace à trois dimensions E^3 . Considérons, avec M. P. Vincensini [6], le point $\omega(\alpha, \beta, \gamma)$ où $\alpha = \sin \theta \cos \varphi$, $\beta = \sin \theta \sin \varphi$, $\gamma = \cos \theta$. Soit C un corps convexe et $H_C(\theta, \varphi)$ sa fonction d'appui. Notons

$$R_C(\omega) = H_C + \frac{\partial^2 H_C}{\partial \theta^2},$$

$$S_C(\omega) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 H_C}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial H_C}{\partial \varphi},$$

$$T_C(\omega) = H_C + \frac{\partial H_C}{\partial \theta} \cot \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 H_C}{\partial \varphi^2}.$$

Nous avons $H_{-C}(\theta, \varphi) = H_C(\pi - \theta, \pi + \varphi)$ et, par suite, $R_{-C}(\omega) = -R_C(-\omega)$, $S_{-C}(\omega) = -S_C(-\omega)$, $T_{-C}(\omega) = -T_C(-\omega)$. Si \mathcal{R} est l'ensemble des racines de l'équation $\Theta_\omega(\lambda) = 0$ où

$$\begin{aligned} \Theta_\omega(\lambda) = & [R_C(\omega) T_C(\omega) - S_C^2(\omega)] \lambda^2 - [R_C(\omega) T_{-C}(\omega) \\ & + R_{-C}(\omega) T_C(\omega) - 2S_C(\omega) S_{-C}(\omega)] \lambda + R_{-C}(\omega) T_{-C}(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - S_{-C}^2(\omega) &= [R_C(\omega) T_C(\omega) - S_C^2(\omega)] \lambda^2 + [R_C(\omega) T_C(-\omega) \\
 &+ R_C(-\omega) T_C(\omega) + 2S_C(\omega) S_C(-\omega)] \lambda + R_C(-\omega) T_C(-\omega) \\
 &\quad - S_C^2(-\omega),
 \end{aligned}$$

pour tous les points $\omega \in S$, alors la limite gauche (droite) de prolongeabilité de la série linéaire $[C, -C]$ est le minimum (maximum) de l'ensemble \mathcal{R} ([6], p. 366). Donc

$$r_i = \frac{1}{1 + \min \mathcal{R}} = \frac{\max \mathcal{R}}{1 + \max \mathcal{R}}.$$

Considérons, aussi, dans E^3 , le cas où C est de largeur constante D_C . Le corps C_{-1} de la série linéaire $[C, -C]$ est une sphère de rayon $D_C/2$. La limite à droite de prolongeabilité λ'_∞ de la série $[C, C_{-1}]$ est alors

$$\lambda'_\infty = \frac{2P}{D_C}$$

où P est le rayon de courbure normale maximum de la frontière de C (voir [6], p. 369 et [7], p. 86). Donc, pour la série $[C, -C]$,

$$\lambda_\infty = \frac{\lambda'_\infty}{2 - \lambda'_\infty} = \frac{P}{D_C - P}$$

et

$$r_i = \frac{\lambda_\infty}{1 + \lambda_\infty} = \frac{P}{D_C}.$$

On peut exprimer d'une manière analogue le nombre de réductibilité à l'aide du rayon de courbure normale maximum ρ de C :

$$r_i = \frac{D_C - \rho}{D_C}.$$

Il résulte de là que ρ et P sont liés par la formule

$$D_C = P + \rho,$$

conformément au fait bien connu que les normales aux frontières des corps de largeur constante de E^n sont des normales doubles.

Il convient de noter que le sujet concernant les liaisons entre les notions de réductibilité et de prolongement d'une série linéaire n'est pas épuisé. Ainsi par exemple, une détermination plus précise, dans le cas n -dimensionnel, des limites de prolongeabilité des séries linéaires déterminées par deux corps convexes symétriques, permettrait d'améliorer les résultats obtenus sur le problème de la recherche du nombre de réductibilité, et présenterait à cet égard un certain intérêt.

BIBLIOGRAPHIE

1. BIANCHI, L. *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, parte II, 1924.
2. FAVARD, J. Sur la détermination des surfaces convexes, *Bull. de la classe des Sc. de l'Ac. royale de Belgique*, t. XIX, 1933.
3. HAMMER, P. C. Convex Bodies Associated with a Convex Body, *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, vol. 2, nr 5, 1951.
4. RADEMACHER, H. Über den Vektorenbereich eines konvexen ebenen Bereiches, *Jahresb. der D. Math. Ver.*, t. XXXIV, 1925.
5. VINCENSINI, P. Sur les domaines vectoriels des corps convexes, *Journ. de Math.*, publié par H. Villat, t. XV, 1936, p. 373.
6. — Sur le prolongement des séries linéaires de corps convexes. Applications, *Rendic. del Circolo mat. di Palermo*, t. LX, 1936.
7. — Sur les corps de largeur constante de l'espace à trois dimensions, *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 204, 1937, p. 84.
8. — Sur une propriété des corps convexes de l'espace euclidien à n dimensions, *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 204, 1937, p. 1302.
9. — Corps convexes. Séries linéaires. Domaines vectoriels. *Mémorial des Sc. Math.*, fasc. XCIV, 1938.
10. *Questions liées à la notion de géométrie différentielle globale*, conférence faite au Colloque de Géom. diff. globale, tenu à Bucarest, 29 juin-4 juillet 1964.
11. ZAMFIRESCO, T. Reducibility of Convex Bodies, à paraître aux *Proc. of the London math. Soc.*

(Reçu le 15 mars 1965)

Boulevard G. Martie, 97
Bucarest