18

GAZETA MATEMATICĂ

SERIA A

PUBLICAŢIE PENTRU STUDIUL ŞI RĂSPÎNDIREA ŞTIINŢELOR MATEMATICE

Volumul LXXI • Nr. 1 ianuarie 1966

STUDII ŞI NOTE

CONSTRUCŢII CU RIGLA, COMPASUL ŞI TRISECTORUL

TUDOR ZAMFIRESCU

§ 0. Introducere

Ceea ce constituie obiectul articolului de faţă este aplicarea la cîteva probleme particulare satisfăcînd condiţiile cunoscute de constructibilitate cu rigla, compasul şi trisectorul a teoriei referitoare la astfel de construcţii. Un articol recent [7] prezintă, în cea mai mare parte a sa, tocmai chestiunile teoretice printre ale căror aplicaţii se numără acelea care vor fi acum puse în lumină. Nu ne vom mai ocupa de problemele clasice, care au fost tratate acolo, dar vom aborda cîteva probleme aparţinînd geometriei triunghiului şi problema construcţiei poligoanelor regulate. Vom încheia prin a da o idee despre extinderea în spaţiu a conceptului de construcţie geometrică.

Amintim, pentru a uşura expunerea, următoarele teoreme :

Teorema A. *Pentru ca o problemă să fie rezolubilă cu rigla şi compasul este necesar şi suficient să existe lanţul de extinderi*

$$\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \dots \subset \Lambda_{n-1} \subset \Lambda_n,$$

astfel încît $\Lambda_0 = \bigcap_{\Lambda_\iota \supset F} \Lambda_\iota$ *(Λ_ι corpuri),* $\Lambda_n \supset G$ *iar* $[\Lambda_m : \Lambda_{m-1}] = 2$ *($m = 1, \dots, n$), unde F şi G sînt mulţimile coordonatelor punctelor esenţiale date, respectiv cerute* [1].

Teorema B. *Pentru ca o problemă să fie rezolubilă cu rigla, compasul şi trisectorul este necesar şi suficient să existe lanţul de extinderi*

$$\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \dots \subset \Lambda_{n-1} \subset \Lambda_n,$$

astfel încît $\Lambda_0 = \bigcap_{\Lambda_\iota \supset F} \Lambda_\iota$ *(Λ_ι corpuri),* $\Lambda_n \supset G$, $[\Lambda_m : \Lambda_{m-1}] = 2$ *sau* 3 *($m = 1, \dots, n$) şi să existe* $\lambda_m \in \Lambda_m - \Lambda_{m-1}$, *astfel ca* $\Delta_{\lambda_m} \subset R$*), *unde* Δ_{λ_m} *este*

* Notăm cu R mulţimea numerelor reale.

corpul de descompunere al polinomului minimal al lui λ_m relativ la Λ_{m-1}, iar F şi G au semnificaţiile din teorema A [7].

Teorema C. *Pentru ca cel puţin o rădăcină a ecuaţiei*

$$\alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0,$$

cu $\alpha_3 \neq 0$, ireductibilă peste un corp construibil, să poată fi construită cu rigla, compasul şi trisectorul este necesar şi suficient ca

$$18\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - 4\alpha_0 \alpha_2^3 - 27\alpha_0^2 \alpha_3^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 - 4\alpha_1^3 \alpha_3 > 0 \quad [6].$$

§ 1. Exemple de construcţii cu rigla, compasul şi trisectorul

În problemele de construcţie sînt, în general, date geometric şi trebuie folosite mai multe elemente liniare (segmente) decît unul singur, deci alegerea unuia drept unitate de măsură nu poate evita existenţa unor mărimi date geometric şi necunoscute numeric. Cazurile ”fericite” ca cel din § 2 sînt excepţionale.

Cerîndu-se efectuarea unei construcţii geometrice se pune problema de a decide cu instrumentele date dacă această efectuare este realizabilă ori nu.

Teoremă. *Putem decide folosind rigla şi compasul dacă o problemă este sau nu rezolubilă cu rigla, compasul şi trisectorul.*

Demonstraţie. Avem în vedere teorema B. Dacă putem realiza punerea în evidenţă a lanţului de extinderi

$$\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \ldots \subset \Lambda_{n-1} \subset \Lambda_n,$$

unde Λ_0 este cel mai mic corp numeric ce include mulţimea F a numerelor reprezentînd lungimile segmentelor date, Λ_n include mulţimea G a numerelor de construit iar $[\Lambda_m : \Lambda_{m-1}] = 2$ sau 3 $(m = 1, \ldots, n)$, atunci alegînd $\lambda_m \in \Lambda_m - \Lambda_{m-1}$ pentru fiecare indice m pentru care $[\Lambda_m : \Lambda_{m-1}] = 3$, vom putea verifica cu rigla şi compasul condiţia teoremei C la polinomul minimal al lui λ_m relativ la Λ_{m-1}. Dacă condiţia este îndeplinită, problema este rezolubilă cu rigla, compasul şi trisectorul. Dacă condiţia nu este îndeplinită sau dacă, iniţial, s-a dovedit că nu se poate scrie lanţul de extinderi $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ cu proprietăţile precizate, atunci construcţia cu rigla, compasul şi trisectorul nu este posibilă.

Urmează un exemplu sugestiv care va utiliza din plin cele stabilite mai sus.

Problema 1. *Date fiind o dreaptă (prin două puncte ale ei) şi o cubică (prin nouă puncte ale ei), să se determine cu rigla, compasul şi trisectorul punctele lor de intersecţie.*

Rezolvare. Determinăm soluţiile celor două sisteme liniare în coeficienţii a_j şi b_k:

$$\{a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j + a_4 x_j^2 + a_5 x_j y_j + a_6 y_j^2 + a_7 x_j^3 + a_8 x_j^2 y_j + a_9 x_j y_j^2 + y_j^3 = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 9)$$

$$\{b_1 + b_2 x'_k - y'_k = 0 \qquad (k = 1, 2),$$

unde (x_j, y_j) sînt punctele date aflate pe cubică iar (x'_k, y'_k) cele de pe dreaptă. Înlocuind $y = b_1 + b_2 x$ în ecuația cubicei, obținem

$$x^3 \alpha_3(a_7, a_8, a_9, b_2) + x^2 \alpha_2(a_4, a_5, a_6, a_8, a_9, b_1, b_2) +$$

$$+ x\alpha_1(a_2, a_3, a_5, a_6, a_9, b_1, b_2) + \alpha_0(a_1, a_3, a_6, b_1) = 0,$$

coeficienții $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ fiind construibili cu rigla și compasul. Aplicînd teorema din § 1, ne mai rămîne doar de verificat cu rigla și compasul dacă avem inegalitatea $F(\alpha_i) > 0$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ din teorema C sau $F(\alpha_i) < 0$ sau $F(\alpha_i) = 0$ ($F(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ poate fi construit). În felul acesta constatăm dacă dreapta taie cubica în trei puncte, în unul singur sau este tangentă la ea. Conform teoremei C, în primul caz rădăcinile pot fi construite cu rigla, compasul și trisectorul, în al doilea nu pot fi construite cu cele trei instrumente, iar în al treilea cele una sau două rădăcini distincte pot fi construite cu rigla și compasul.

O clasă importantă de probleme de construcție în geometrie se referă la rezolvarea triunghiurilor. Un studiu amănunțit al constructibilității cu rigla și compasul a unui triunghi, date fiind trei elemente liniare ale sale a fost făcut de A. Korselt [3]. Ar merita să fie cercetate, în mod analog, toate cazurile de constructibilitate cu rigla, compasul și trisectorul. Dăm aici doar trei exemple.

Problema 2. *Să se construiască un triunghi isoscel* $(B=C)$ *date fiind bisectoarele sale interioare* β_a, β_b, *utilizînd rigla, compasul și trisectorul* [3], [5].

Rezolvare. Se cunosc formulele

$$\beta_a = \frac{2p \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}; \quad \beta_b = \frac{2p\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}}$$

care, în cazul $B=C$, devin

$$\beta_a = \frac{2p\sin^2\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}; \quad \beta_b = \frac{2p\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B-A}{2}}.$$

Notăm :

$$k = \frac{\beta_a}{\beta_b} = \frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B-A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}.$$

Cum $\sin\frac{A}{2} = \cos B$; $\cos\frac{A}{2} = \sin B$; $\cos\frac{B-A}{2} = \sin\frac{3B}{2}$,

$$k = \frac{\sin\frac{3B}{2}}{2\cos B}$$

Dezvoltînd, găsim că $\sin \frac{B}{2}$ verifică ecuaţia

$$4x^3 - 4kx^2 - 3x + 2k = 0,$$

unde k este cunoscut. Aplicînd teorema C, constatăm că totdeauna construcţia este posibilă cu rigla, compasul şi trisectorul ($2^5k^4 + 3^2k^2 + 3^3 > 0$). Amintim că problema a fost rezolvată cu rigla şi compasul în cazul bisectoarelor exterioare (de către Heymann).

Problema 3. *Să se construiască un triunghi cunoscînd o latură a, mediana corespunzătoare m_a şi raza r a cercului înscris* [3].

Rezolvare. Cunoaştem formulele

$$m_a = \sqrt{\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}}\,;\quad r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Punînd $b + c = \alpha$, $b - c = \beta$, găsim

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4m_a^2 + a^2,$$

$$4r^2(a + \alpha) = -(a - \alpha)(a - \beta)(a + \beta),$$

cu necunoscutele α, β. Eliminînd β^2,

$$\alpha^3 - a\alpha^2 - 4(m_a^2 + r^2)\alpha + 4a(m_a^2 - r^2) = 0.$$

Alegem unitatea de lungime $4(m_a^2 + r^2) = 1$ şi notăm $4(m_a^2 - r^2) = \lambda$, $a^2 = \mu$, care pot fi construiţi cu rigla şi compasul. Conform teoremei din § 1, aflăm cu rigla şi compasul dacă problema este rezolubilă ori nu, adică dacă inegalitatea

$$18\lambda\mu + 4\lambda\mu^2 - 27\lambda^2\mu + \mu + 4 \geqslant 0$$

este satisfăcută ori nu. Relaţia are loc dacă λ nu se află în afara rădăcinilor

$$\lambda_{1,2} = \frac{2}{27}\mu + \frac{1}{3} \pm \left(\frac{2}{27}\mu + \frac{2}{9}\right)\sqrt{1 + \frac{3}{\mu}}$$

uşor calculabile cu rigla şi compasul, ceea ce se poate verifica imediat. Construcţia lui α cu rigla, compasul şi trisectorul se face utilizînd [7], teorema 2 § 2. Se găsesc apoi cu rigla şi compasul $\beta = \sqrt{4m_a^2 + a^2 - \alpha^2}$ şi $b = \frac{\alpha + \beta}{2}$; $c = \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Problema 4. *Să se construiască un triunghi la care se cunosc două mediane m_a, m_b şi raza R a cercului circumscris* [3].

Rezolvare. Din formulele medianelor, exprimate în funcţie de laturi, rezultă

$$k_1 = \frac{16}{9}(m_a^2 - m_b^2)^2 = (b^2 - a^2)^2,$$

$$k_2 = 8(m_a^2 + m_b^2) = 8c^2 + 2(a^2 + b^2),$$

iar din formula

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

rezultă

$$-R^2[c^2-(a+b)^2]\,[c^2-(a-b)^2] = a^2b^2c^2.$$

Punînd $\alpha = (a+b)^2$; $\beta = (a-b)^2$; $\gamma = c^2$, găsim

$$k_1 = \alpha\beta,$$
$$k_2 = 8\gamma + \alpha + \beta,$$
$$-R^2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = \gamma\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)^2.$$

Introducînd prima relaţie în ultima, aflăm

$$-R^2[\gamma^2-\gamma(\alpha+\beta)+k_1] = \gamma\frac{(\alpha+\beta)^2-4k_1}{16}$$

ceea ce devine, eliminînd $\alpha+\beta$,

$$-64\gamma^3+16(k_2-7R^2)\gamma^2+(16R^2k_2-k_2^2+4k_1)\gamma-16R^2k_1 = 0.$$

La fel ca în problema precedentă va trebui să verificăm dacă există posibilitatea construcţiei lui γ, ceea ce putem face cu rigla şi compasul. Vom arăta acum că poate exista situaţia de constructibilitate. În adevăr, dacă $7R^2 < 8(m_b^2+m_a^2) < 16R^2$, atunci cu notaţiile din teorema C, avem $\alpha_0, \alpha_3 < 0$; $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, deci $18\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1^2\alpha_2^2$, $-4\alpha_1^3\alpha_3 > 0$ iar dacă k_1 este suficient de mic, $-4\alpha_0\alpha_2^3-27\alpha_0^2\alpha_3^2 > 0$ deoarece $(k_2-7R^2)^3 > 108\,R^2k_1$. Prin urmare $F(\alpha_i) > 0$.

În problema 3 se observă uşor existenţa unui λ între cele două rădăcini: făcînd ca $\mu\to 0$ sau $\mu\to\infty$, obţinem $\lambda_1\to-\infty$, $\lambda_2\to\infty$, respectiv $\lambda_1\to 0$, $\lambda_2\to\infty$ şi cum $\frac{3}{5} < \lambda < 1$, rezultă, pentru μ suficient de mic sau mare, $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. La problema 4 s-a demonstrat existenţa unui caz în care ea se poate rezolva. Dar demonstrarea teoretică a constructibilităţii cînd datele problemei sînt arbitrare sau a imposibilităţii ei este deseori (inclusiv în cele două probleme precedente) anevoiasă şi ne putem dispensa de ea doar efectuînd practic verificarea indicată, conform teoremei din § 1.

Problema 5. *Să se dividă cu rigla şi compasul un sector de conică (cu centru), prin diametre, în n părţi echivalente* [2].

Rezolvare. Date fiind cele cinci puncte ce definesc conica, se pot construi centrul O, asimptotele (pentru hiperbolă) şi diametrul mare (pentru elipsă).

În cazul sectorului OP_1P_2 de elipsă problema revine la diviziunea în n părţi egale a unghiului $P_1'OP_2'$ unde P_1' şi P_2' sînt intersecţiile aflate de aceeaşi parte a diametrului mare, ale cercului principal cu perpendicularele din P_1 şi P_2 pe diametrul mare al elipsei, ceea ce rezultă din considerarea elipsei că proiecţie a unui cerc egal cu cercul principal. Or, se poate dovedi că, pentru ca un unghi să poată fi divizat în n părţi egale folosind rigla şi compasul, este necesar şi suficient ca $n=2^m (m\in N)$*).

În cazul sectorului OQ_1Q_2 de hiperbolă, se remarcă uşor că el este echivalent cu trapezul mixtiliniu $Q_1Q_2Q_2'Q_1'$, unde Q_1' şi Q_2' sînt intersecţiile paralelelor din Q_1 şi Q_2 la o asimptotă cu cealaltă. Aria S_{12} a

* Notăm cu N mulţimea numerelor naturale.

acestuia a fost calculată în [7], teorema 5 § 3 şi este $K \cdot \ln \frac{x_2}{x_1}$, unde K este constanta relativă a hiperbolei iar $x_1 = OQ'_1$ şi $x_2 = OQ'_2$. Problema se reduce la găsirea abscisei x_n astfel încît $S_{12} = n\ S_{1n}$ sau $x_2/x_1 = (x_n/x_1)^n$, de unde $x_n = \sqrt[n]{x_1^{n-1} x_2}$. Sîntem din nou conduşi la condiţia necesară şi suficientă de constructibilitate găsită în cazul elipsei.

Deci, indiferent de natura conicei, construcţia cerută este efectuabilă dacă şi numai dacă $n = 2^m$ $(m \in N)$.

Problema 6. *Să se efectueze construcţia de la problema 5 folosind rigla, compasul şi trisectorul.*

Rezolvare. Conform rezultatelor obţinute la problema 5, răspunsul la noua problemă nu mai poate fi dat unitar pentru cele două cazuri. Condiţia necesară şi suficientă de constructibilitate este ca $n = 2^m 3^p (m,p \in Z_+)$ în cazul sectorului de elipsă (am notat $Z_+ = N \cup \{0\}$) şi $n = 2^m (m \in N)$ în cazul sectorului de hiperbolă. Aflarea naturii conicei (necesară cînd $n = 2^m 3^p$ cu $m \in Z_+$ şi $p \in N$) se face prin calcularea unui determinant (construibil cu rigla şi compasul) şi aflarea semnului său.

§ 2. Construcţia poligoanelor regulate

Problema pe care ne-o punem constă în a construi un poligon regulat, cu un număr dat de laturi, înscris într-un cerc dat. Sînt cunoscute următoarele rezultate privind constructibilitatea poligonului.

Teorema 1. *Pentru ca un poligon regulat cu n laturi să poată fi înscris cu rigla şi compasul într-un cerc, este necesar şi suficient ca*

$$n = 2^{\alpha_1} \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r, \tag{1}$$

unde $\alpha_1 \in Z_+$ iar $p_2, \ldots, p_r$ sînt numere prime distincte din şirul lui Fermat.

Pentru demonstrarea necesităţii se poate consulta, de exemplu, [1].

Teorema 2. *Pentru ca un poligon regulat cu n laturi să poată fi înscris într-un cerc cu rigla, compasul şi trisectorul este necesar şi suficient ca*

$$n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r, \tag{2}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2 \in Z_+$ iar $p_3, \ldots, p_r$ sînt numere prime distincte de forma

$$p_i = 2^{\beta_i} 3^{\gamma_i} + 1, \tag{3}$$

cu $\beta_i, \gamma_i \in Z_+$.

Teorema aceasta se află demonstrată în [6].

Interesant ar fi să se studieze subşirurile $\{x_n\}$ şi $\{t_n\}$ de numere de forma (1), respectiv (2), ale şirului numerelor naturale. În ceea ce priveşte interesul geometric arătat mai sus, mai semnificative sînt şirul $\{x_n\}$, şirul $\{y_n\}$ al tuturor termenilor $t_i \neq x_j$ $(i, j \in N)$ şi şirul $\{z_n\}$ al tuturor numerelor naturale diferite de t_i.

În general termenii celor trei şiruri alternează iar termenii lui $\{x_n\}$ apar din ce în ce mai rar. Dacă însă aglomerarea de numere consecutive $1, 2, 3, 4, 5, 6 \in \{x_n\}$ este justificată, în schimb au loc şi aglomerări ca $35, 36, 37, 38, 39 \in \{y_n\}$ sau $86, 87, 88, 89 \in \{z_n\}$.

Şirul numerelor naturale de forma (3) şi subşirul său al numerelor prime de acea formă merită de asemenea a fi studiate datorită analogiei lor cu şirul lui Fermat şi subşirul numerelor prime de tip Fermat.

Corolarul 1. *În condițiile teoremei 1, dacă cercul circumscris poligonului de construit este trasat și se dă centrul său, atunci construcția se poate efectua doar cu rigla.*

Demonstrația se face imediat ținînd seama de teorema 1 § 2 și cunoscînd că rigla poate înlocui rigla și compasul cînd este trasat un cerc de centru cunoscut (vezi [7], teorema 4 § 1).

Corolarul 2. *În condițiile teoremei 2, dacă circumferința cercului dat este trasată, atunci construcția se poate realiza cu rigla și trisectorul.*

Demonstrația ține seama de teorema 2 § 2 și de corolarul de la § 2 din [7].

Trecem acum la *construcția efectivă a heptagonului regulat*, cu rigla, compasul și trisectorul. Acesta este poligonul cu cel mai mic număr de laturi neconstruibil cu instrumentele clasice (rigla și compasul); el poate fi însă construit utilizînd și trisectorul ($7 = y_1$).

Fie $\varepsilon^0 = 1$, ε, ..., ε^6 rădăcinile complexe de ordinul 7 ale unității și $\alpha_0 = \varepsilon + \varepsilon^6$; $\alpha_1 = \varepsilon^3 + \varepsilon^4$; $\alpha_2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^5$ (fig. 1). Efectuînd calculele necesare găsim

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = -1 \\ \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_0 = -2 \\ \alpha_0\alpha_1\alpha_2 = 1, \end{cases}$$

deci α_0 verifică ecuația

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \tag{4}$$

care are rădăcinile reale și distincte α_0, α_1, α_2. Prin urmare, conform teoremei B, α_0 poate fi construit cu rigla, compasul și trisectorul. Punînd $x = \frac{2}{3}\sqrt{7}X - \frac{1}{3}$, ecuația (4) devine:

$$4X^3 - 3X = \frac{1}{2\sqrt{7}}. \tag{5}$$

Dacă X_0 este rădăcina pozitivă a ecuației (5), atunci $\alpha_0 = \frac{2}{3}\sqrt{7}X_0 - \frac{1}{3}$ iar $\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{2\sqrt{7}X_0 - 1}{6}$.

Efectiv, construcția se poate face în modul următor:

Se consideră (fig. 2) cercul dat (O), de rază 1. Ducem $OA = 3$ și luăm punctul B pe OA astfel ca $OB = \frac{1}{2}$. Fie C intersecția cercului de centru A și rază 4 cu perpendiculara în O pe OA. Avem $OC = \sqrt{7}$. Notăm cu D o intersecție a cercului de centru C și rază OC cu cercul (O). Avem $\cos \sphericalangle COD = \frac{1}{2\sqrt{7}}$. Fie E, F, G intersecțiile trisectoarei mai apropiate de OC a unghiului COD cu cercul (O) (cea mai apropiată de C), cu cercul (C) (cea diferită de O) și, respectiv, cu cercul de centru F și rază 1 (cea mai apropiată de O). Avem $OF = 2\sqrt{7}X_0$ și $OG = 2\sqrt{7}X_0 - 1$. Notăm cu H intersecția paralelei din B la AG cu OE iar cu J o intersecție a perpendicularei în H pe OE cu cercul (O). Atunci $OH = \frac{2\sqrt{7}X_0 - 1}{6}$ şi $\sphericalangle EOJ = \arccos \frac{2\sqrt{7}X_0 - 1}{6} = \frac{2\pi}{7}$. Deci latura heptagonului regulat înscris în (O) este EJ.

Se constată uşor că dacă $n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot p_3 \ldots p_r$ cu $p_i = 2^{\beta_i} \cdot 3^{\gamma_i} + 1$, atunci întrebuinţarea trisectorului este strict necesară de

$$\alpha_2 - \operatorname{sign} \alpha_2 + \sum_{i=3}^{r} \gamma_i$$

ori (în cazul heptagonului o singură dată).

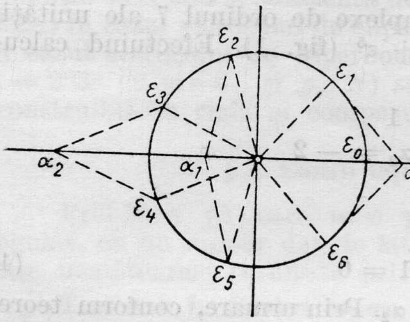

Fig. 1

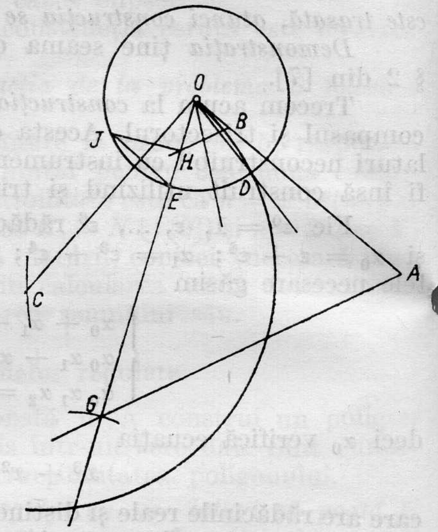

Fig. 2

Menţinînd legătura cu teoria, [6], se pot construi, în mod analog, poligoanele regulate cu 13 laturi, 19 laturi, etc.

§ 3. Construcţii geometrice în spaţiu

Construcţiile despre care s-a vorbit pînă acum se efectuează în cadrul geometriei plane. Apare apoi uşor ideea generalizării lor pentru geometria în spaţiu. Vom introduce următoarele instrumente de construcţie : *planograful* — cu care putem trasa un plan prin trei puncte necoliniare date şi *sferograful* — cu care se trasează o sferă în centrul într-un punct dat şi avînd raza egală cu distanţa între două puncte date. Am folosit cuvîntul "a trasa", deşi el nu are aici un sens efectiv clar, pentru a păstra terminologia din geometria plană. Evident, ar fi greu de conceput fabricarea unor atari instrumente, dar noi le postulăm existenţa abstractă. S-ar mai putea folosi rigla şi compasul în accepţiunea lor din geometria plană însă utilizarea lor poate fi înlocuită cu aceea a planografului şi sferografului, după cum se verifică uşor. Vom întrebuinţa şi trisectorul, cu care, prin definiţie, se operează pe orice plan din spaţiu ca în geometria plană.

Considerăm o problemă de construcţie în spaţiu, algebrizată după modelul celor expuse în [7]. Mulţimile F şi G au semnificaţia de acolo*).

Teorema 1. *Pentru ca o problemă să fie rezolubilă cu planograful şi sferograful este necesar şi suficient să existe lanţul de extinderi*

$$\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \cdots \subset \Lambda_n,$$

*) Mulţimile F şi G au fost precizate şi în acest articol, în § 0.

cu $\Lambda_0 = \bigcap\limits_{\Lambda_\iota \supset F} \Lambda_\iota (\Lambda_\iota$ *corpuri*); $\Lambda_n \supset G$ *şi* $[\Lambda_m : \Lambda_{m-1}] = 2$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$.

Demonstraţia este întru totul analoagă celei a teoremei A (posibilitatea construcţiei reperului cartezian triortogonal şi a determinării coordonatelor este evidentă).

Transpunînd teorema B pentru geometria în spaţiu, obţinem

Teorema 2. *Pentru ca o problemă să fie rezolubilă cu planograful, sferograful şi trisectorul este necesar şi suficient să existe lanţul de extinderi*

$$\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \ldots \subset \Lambda_n,$$

astfel ca $\Lambda_0 = \bigcap\limits_{\Lambda_\iota \supset F} \Lambda_\iota(\Lambda_\iota$ *corpuri*); $\Lambda_n \supset G$; $[\Lambda_m : \Lambda_{m-1}] = 2$ *sau* 3 $(m = 1, 2, \ldots, n)$ *şi să existe* $\lambda_m \in \Lambda_m - \Lambda_{m-1}$ *astfel ca* $\Delta_{\lambda_m} \subset R$.

Problema clasică a dublării cubului poate fi privită şi din acest nou punct de vedere, însă rezultatul este acelaşi.

Cuadratura, în geometria plană, a unei curbe închise oarecare este posibilă dacă şi numai dacă aria respectivă este construibilă. De pildă, se poate realiza cu rigla şi compasul cuadratura unui poligon. Referindu-ne la problema analoagă din geometria în spaţiu, aceea de a construi un cub de acelaşi volum V cu un corp dat, condiţia constructibilităţii lui V este necesară, dar nu suficientă. Pentru suficienţă trebuie, mai mult, ca $\sqrt[3]{V} \in \Lambda_0$. De pildă nu se poate construi cu planograful, sferograful şi trisectorul un cub avînd acelaşi volum cu un poliedru oarecare dat.

În legătură cu poliedrele regulate, enunţăm

Teorema 3. *Toate poliedrele regulate înscrise într-o sferă dată pot fi construite cu planograful şi sferograful.*

Demonstraţie. Într-adevăr, muchiile celor cinci tipuri existente de poliedre regulate (convexe) sînt construibile (mai departe construcţia poliedrelor fiind simplă), deoarece, luînd raza sferei date ca unitate de lungime, avem [2]:

$$a_4 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}};\ a_6 = \frac{2}{\sqrt{3}};\ a_8 = \sqrt{2};\ a_{12} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}};\ a_{20} = \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$$

(a_i este muchia poliedrului regulat cu i feţe).

În mod analog se găseşte şi că razele sferei înscrise şi a celei tangente muchiilor unui poliedru regulat oarecare sînt exprimabile prin radicali de ordinul doi, deci aceste poliedre pot fi construite dată fiind oricare dintre sferele sus-menţionate.

Ca un exemplu de aplicare a teoremelor 1 şi 2 din acest paragraf, vom considera următoarea

Problemă. *Să se construiască o calotă sferică de volum egal cu un sfert din volumul întregii sfere**) [4].

Rezolvare. Construirea calotei echivalează cu construirea înălţimii ei, h. Luînd raza sferei egală cu unitatea, volumul calotei este $\frac{1}{3}\pi h^2(3-h)$, iar cel al sferei $\frac{4}{3}\pi$. Punînd condiţia din enunţul problemei, găsim

$$h^2(3-h) = 1,$$

*) „Problema lui Arhimede".

deci h verifică ecuaţia

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$$

Polinomul $P(x)$ este ireductibil peste Q*) deoarece

$$P(x-1) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

este ireductibil conform criteriului lui Eisenstein. Deci h nu poate fi construit cu planograful şi sferograful.

Punînd $x = 2z + 1$, $P(x) = 0$ devine

$$8z^3 - 6z - 1 = 0$$

a cărei rezolvare cu planograful, sferograful şi trisectorul revine la trisectarea unghiului $\frac{\pi}{3}$.

Este imediată generalizarea pentru un spaţiu euclidian n-dimensional a conceptului de construcţie geometrică şi a instrumentelor utilizabile. De pildă, într-un asemenea spaţiu, dublarea hipercubului cu hiperplanograful şi hipersferograful este realizabilă dacă $n = 2^m$, dar nu este realizabilă nici adăugînd şi trisectorul dacă $n \neq 2^m$ $(m \in Z_+)$, în timp ce construcţia cu cele trei instrumente a unui hipercub de volum n-dimensional egal cu acela al unei hipersfere date este totdeauna imposibilă.

BIBLIOGRAFIE

[1] *Dickson-Bodewig*, „Höhere Algebra", Leipzig—Berlin, 1929.

[2] *J. Hadamard*, „Lecţii de geometrie elementară — geometrie în spaţiu, Bucureşti, 1961.

[3] *A. Korselt*, „Ueber die Trigonometrische Lösung merkwürdiger Dreiecksaufgaben", Archiv. der Math. und Phys., Leipzig, 1900.

[4] *Lugovski-Weinert*, „Grundzüge der Algebra", seil III, Leipzig, 1960.

[5] *M. Постников*, „Теория Галуа", Moscova, 1963.

[6] *T. Zamfirescu*, „Construcţii geometrice cu rigla, compasul şi trisectorul", Stud. şi cerc. mat., nr. 3, Bucureşti, 1964.

[7] *T. Zamfirescu*, „Constructibilitatea cu rigla, compasul şi trisectorul", G.M.—A, nr. 6, Bucureşti, 1965.

ÎNVĂŢĂMÎNT

PREDAREA INEGALITĂŢILOR TRIGONOMETRICE IN ŞCOALA MEDIE

ILIE ION

În programa de învăţămînt nu există nici o menţiune cu privire la predarea inegalităţilor trigonometrice. Studiul temeinic al inegalităţilor trigonometrice — care ocupă un loc de seamă în analiza matematică — reclamă un oarecare cuantum de cunoştinţe cu privire la inecuaţiile trigonometrice.

Personal consider că în manualul de trigonometrie sînt mult prea multe exerciţii la capitolul identităţi trigonometrice şi rezolvarea triunghiurilor dreptunghice. Înlocuirea acestora, în programă, cu elemente de bază ale inecuaţiilor trigonometrice ar fi însemnat un pas înainte pe linia îmbunătăţirii conţinutului matematic în şcoala medie.

*) Notăm cu Q mulţimea numerelor raţionale, cel mai mic corp construibil.