BULLETIN MATHÉMATIQUE

DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
DE LA RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE

TIRAGE À PART

Tome 10 (58)
nr. 4/1966

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN R. S. ROMÂNIA

1967 Bucureşti 1967

BULL. MATH. de la Soc. Sci. Math. de la R.S.R.
Tome 10 (58), nr. 4, 1966

FAMILLES DE CORPS ASSOCIÉS À UN CORPS CONVEXE

PAR

TUDOR ZAMFIRESCU (Bucarest)

Envisageons l'espace $\mathcal{K}^n$ de tous les corps convexes compacts n-dimensionnels de l'espace euclidien à n dimensions E^n. Nous allons considerer, dans E^2 et E^n des familles de corps convexes associés, totalement ordonnées par inclusion, ainsi que des nombres mesurant l'asymétrie et l'excentricité des corps convexes.

Notations

Soient $[x, y]$ le segment joignant les points $x,\ y \in E^n$, (x, y) la droite contenant x, y et $[x, y)$ ou $(y, x]$ la semi-droite ayant l'extrémité x et contenant $[x, y]$.

Si M est une partie de l'espace, alors $[M]$ désigne son enveloppe convexe. Pour comodité, $[\{x_1, \ldots, x_n\}]$, où $x_i \in E^n$, sera notée $[x_1, \ldots, x_n]$.

Si s et t sont des semi-droites dont les extrémités coïncident, alors $\mu(s, t)$ désigne la mesure (inférieure, égale ou supérieure à $\pi/2$) de l'angle déterminé par elles. Si V et W sont deux variétés linéaires quelconques de E^n, alors $\mu(V, W)$ signifie la mesure (ne dépassant jamais $\pi/2$) de l'angle qu'elles définissent.

La frontière d'un corps convexe $C \in \mathcal{K}^n$ sera notée par ∂C, tandis que $\mathring{C}$ signifiera son intérieur.

Notons par $\mathcal{K}^n_2$ le sous-ensemble des corps de $\mathcal{K}^n$ dont les frontières sont douées en chaque point de $n-1$ rayons de courbure principaux, finis et non nuls [2].

En fin, $\mathcal{V}^m$ désignera la famille de tous les variétés linéaires à m dimensions de E^n.

Familles de corps associés à un corps convexe plan

Soient $C \in \mathcal{K}^2$ et $a \notin \mathring{C}$.

Désignons par l_a et l'_a les droites d'appui (les côtés de l'angle tangent) de C passant par a si $a \notin C\ (a \in \partial C)$.

Soient $\alpha_C(a)$ la mesure de l'angle sous lequel on voit C de a et

$$\delta_C(a) = C - [\{a\} \cup ((l_a \cup l'_a) \cap C)].$$

Nous attachons au corps C et au nombre $k \in (0, \pi)$ le corps convexe associé

$$C_k = \bigcap_{\alpha_C(a)=k} \delta_C(a).$$

Théorème 1. *Si* $k_1 < k_2$, *alors* $C_{k_1} \subset C_{k_2}$ [1]).

Démonstration. Il suffit de montrer que pour chaque ensemble $\delta_C(a_2)$ où $\alpha_C(a_2) = k_2$ on peut choisir un autre ensemble $\delta_C(a_1)$, où $\alpha_C(a_1) = k_1$ tel que $\delta_C(a_1) \subset \delta_C(a_2)$.

Soit

$$[a_2, b, c] = [\{a_2\} \cup ((l_{a_2} \cup l'_{a_2}) \cap C)],$$

où $b \in l_{a_2}$ et $c \in l'_{a_2}$. Aussi, soit $m \in l'_{a_2}$ tel que $a_2 \in [m, c]$ et que $\mu((b, m], [m, c)) = k_1$. Si (m, b) est une droite d'appui de C, alors en choisissant $a_1 = m$, $\delta_C(a_1) = \delta_C(a_2)$. Si (m, b) n'est pas une droite d'appui de C, alors il y a $a_1 \in (m, a_2)$ tel que $m \in [a_1, a_2]$ et que $\alpha_C(a_1) = k_1$. La droite d'appui l de C, parallèle à (m, b) et passant par a_1 ne rencontre pas $[a_2, b, c]$, donc

$$[\{a_1, c\} \cup (l \cap C)] \supset [a_2, b, c],$$

d'où $\delta_C(a_1) \subset \delta_C(a_2)$. Par conséquent $C_{k_1} \subseteq C_{k_2}$; mais il n'est pas possible que (m, b) soit toujours une droite d'appui, d'où l'inclusion est vraiment stricte.

Soient $b \in C$ et $c = [u, v]$ une corde de C passant par b. Désignons par $\gamma(c)$ le maximum des mesures des angles formés par deux droites d'appui de C passant l'une par u et l'autre par v. Alors

$$C^k = \{b \in \mathring{C} : \max_{b \in c} \gamma(c) < k\}$$

est aussi le générateur d'une famille de corps associés à C.

Théorème 2. *Pour tout corps* $C \in \mathcal{K}^2$ *et tout nombre réel* k, *on a* $C_k = C^k$.

Démonstration. Soient $b \in C_k$ et $c \ni b$ une corde de C.

Supposons que $\gamma(c) = k$. Alors, si a est le sommet de l'angle définissant $\gamma(c)$, $b \in \partial\delta_C(a)$, mais $b \notin \delta_C(a)$, donc $b \notin C_k$, absurde.

Supposons que $\gamma(c) > k$. Alors, $b \notin C_{\gamma(c)}$ et $C_{\gamma(c)} \supset C_k$ en vertu du théorème 1, d'où $b \notin C_k$, absurde.

Il résulte que $\gamma(c) < k$. La fonction γ étant supérieurement semi-continue sur l'ensemble compact $\{c : b \in c\}$, il y a une corde $c_0 \ni b$, telle que

$$\max_{b \in c} \gamma(c) = \gamma(c_0) < k,$$

d'où $b \in C^k$.

Soient $b' \in C^k$ et $a \notin \mathring{C}$, tel que $\alpha_C(a) = k$. Soit c' le côté du triangle $[\{a\} \cup ((l_a \cup l'_a) \cap C)]$ opposé à a.

Supposons que $b' \notin \delta_C(a)$. Alors b' se trouve dans le triangle ci-dessus et soit c'' une corde de C passant par b' et parallèle à c'. Evidemment, $\gamma(c'') \geqslant \gamma(c')$. Mais $\gamma(c') \geqslant k$, donc

$$k \leqslant \gamma(c'') \leqslant \max_{b' \in c} \gamma(c)$$

[1]) Le signe « $\subset$ » désigne l'inclusion stricte.

et $b' \in C^k$, absurde. Par conséquent

$$b' \in \bigcap_{\alpha_C(a)=k} \delta_C(a) = C_k.$$

Théorème 3. *En général, les ensembles* ∂C_k *et* $\{b \in \mathring{C} : \max_{b \in c} \gamma(c) = k\}$ *ne sont pas inclus l'un dans l'autre.*

Démonstration. Choisissons le nombre $k \in (2\pi/3, \pi)$. Soient e et f deux points sur l'axe de symétrie du rectangle $[a, b, c, d]$ parallèle à (a, d), tels que, dans l'hexagone $[a, e, b, c, f, d]$, on ait

$$\mu((a, e], [e, b)) > k; \; \mu((c, f], [f, d)) = k.$$

Pour le corps convexe plan $C = [a, e, b, c, f, d]$, on a

$$C_k = [a, b, c, d] - \partial [a, b, c, d],$$

donc

$$\partial C_k = \partial [a, b, c, d],$$

mais

$$\{b' \in \mathring{C} : \max_{b' \in c} \gamma(c) = k\} = [c, f, d] - [c, f] - [f, d].$$

Considérons maintenant les ensembles

$$C_k^{\cdot} = \bigcap_{\alpha_C(a)=k} (\delta_C(a) \cup \partial \delta_C(a))$$

et

$$C_{\cdot}^k = \{ b \in \mathring{C} : \max_{b \in c} \gamma(c) \leqslant k\},$$

associés à C.

Théorème 4. *Pour tout corps* $C \in \mathcal{K}^2$, *les corps associés* $C_k^{\cdot}$ *et* $C_{\cdot}^k$ *sont convexes, mais ils ne sont pas, en général, inclus l'un dans l'autre.*

Démonstration. Les ensembles

$$\delta_C(a) \cup \partial \delta_C(a) \qquad (\text{où } \alpha_C(a) = k)$$

étant convexes, leur intersection l'est aussi. Quant aux ensembles $C_{\cdot}^k$, on a

$$C_{\cdot}^k = \bigcap_{j > k} C^j$$

donc ils sont également convexes.

Exprimés à l'aide de C_k et C^k, les deux nouveaux types de corps associés s'écrivent

$$C_k^{\cdot} = C_k \cup \partial C_k \qquad (\text{si card } C_k^{\cdot} \neq 1)$$

et

$$C_{\cdot}^k = C^k \cup \{b \in \mathring{C} : \max_{b \in c} \gamma(c) = k\}.$$

Comme $C_k = C^k$ et, en vertu du théorème 3, les ensembles ∂C_k et $\{b : \max\limits_{b\in c} \gamma(c) = k\}$ ne sont pas, en général, inclus l'un dans l'autre, la même chose est valable à l'égard des corps associés $C_k^{\cdot}$ et $C^k_{\cdot}$.

T h é o r è m e *5. Si* $k_1 < k_2$, *alors* $C_{k_1}^{\cdot} \subset C_{k_2}^{\cdot}$ *et* $C^{k_1}_{\cdot} \subset C^{k_2}$.

Démonstration. Selon le théorème 1, $C_{k_1} \subset C_{k_2}$, donc

$$C_{k_1}^{\cdot} = C_{k_1} \cup \partial C_{k_1} \subset C_{k_2} \cup \partial C_{k_2} = C_{k_2}^{\cdot}.$$

Il est pourtant possible que l'inclusion

$$C_{k_1}^{\cdot} \subseteq C_{k_2}$$

soit fausse. Par exemple, dans le cas particulier considéré à la démonstration du théorème 3, prenons $k_1 \in (\pi - k/2, k)$ et $k_2 = k$. Alors

$$C_{k_1}^{\cdot} = [a, b, c, d]$$

et

$$C_{k_2} = [a, b, c, d] - \partial\, [a, b, c, d].$$

L'autre assertion du théorème se déduit immédiatement, car

$$C^{k_1}_{\cdot} = \{b \in \mathring{C} : \max_{b\in c} \gamma(c) \leqslant k_1\} \subset \{b \in \mathring{C} : \max_{b\in c} \gamma(c) < k_2\} = C^{k_2}.$$

Nombres associés à un corps convexe plan

Soient

$$k_C = \inf\, \{k : C_k \neq \emptyset\}$$

l'*angle critique* et

$$\{b \in \mathring{C} : \max_{b\in c} \gamma(c) = k_C\}$$

l'*ensemble critique* du corps convexe $C \in \mathcal{K}^2$.

Evidemment,

$$\{b \in \mathring{C} : \max_{b\in c} \gamma(c) = k_C\} = C^{k_C}_{\cdot},$$

donc l'ensemble critique est un corps convexe, à savoir

$$\min\, \{C^k_{\cdot} : C^k_{\cdot} \neq \emptyset\},$$

relativement à l'inclusion comme relation d'ordre.

L'ensemble critique s'écrit encore $C^{k^C}_{\cdot}$, où l'indice supérieur est

$$k^C = \min_{b\in\mathring{C}} \max_{b\in c} \gamma(c).$$

Le minimum ci-dessus est vraiment atteint. En effet, la fonction

$$\sup_{b\in c} \gamma(c) : C \to [0, \pi]$$

est inférieurement semi-continue et son minimum n'est atteint dans aucun point de ∂C, parce que pour un tel point f,

$$\sup_{f \in c} \gamma(c) = \pi.$$

Théorème 6. *L'angle critique est zéro si et seulement si le corps est symétrique.*

Démonstration. Soit $0 < \varepsilon < \pi$. Evidemment, si le corps C admet un point p comme centre de symétrie, alors pour chaque diamètre d de C, il y a un point a, tel que $\alpha_C(a) = \varepsilon$ et $d \subset \delta_C(a) \cup \partial\delta_C(a)$. Donc $p \in C^*_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon \in (0, \pi)$ et, par conséquent, $k_C = 0$.

Réciproquement, si $k_C = 0$, supposons que pour tout point $q \in C$ il y a une corde $d \ni q$ qui ne soit pas un diamètre. Si φ est l'angle minimum formé par deux droites d'appui passant par les extrémités de d, alors il y a un point q' tel que $\alpha_C(q') \in (0, \varphi)$ et $q \notin \delta_C(q') \cup \partial\delta_C(q')$. Il suit que $q \notin C^*_{\alpha_C(q')}$, donc

$$\bigcap_{k \in (0, \pi)} C^*_k = \emptyset .$$

Mais, d'autre part, $\{C^*_{1/n}\}$ est une suite décroissante d'ensembles compacts non-vides parce que $k_C = 0$, d'où

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C^*_{1/n} \neq \emptyset$$

et une contradiction est obtenue. Pour cette raison, il y a un point $p \in C$, tel que chaque corde passant par p soit un diamètre et, évidemment, ça suffit pour que la symétrie de C soit prouvée.

Théorème 7. *L'indice k^C est zéro si et seulement si le corps convexe C est symétrique et ∂C est différentiable.*

Démonstration. Evidemment, si C admet le point p comme centre de symétrie et si ∂C est différentiable, alors $\gamma(d) = 0$ pour tout diamètre d, donc

$$\max_{p \in d} \gamma(d) = 0$$

et $k^C = 0$.

Réciproquement, si $k^C = 0$, alors il y a $b_0 \in C$ tel que $\gamma(c) = 0$ pour toute corde $c \ni b_0$, c.-à-d. que toute telle corde c soit un diamètre. Donc C est symétrique. Supposant que ∂C n'est pas différentiable dans le point a, dont l'angle tangent a la mesure $m < \pi$, on a

$$\gamma((a, b_0) \cap C) = \pi - m,$$

absurde. La démonstration est finie.

Familles de corps associés à un corps convexe de $\mathcal{K}^n$

Soient $C \in \mathcal{K}^n$, $k \in (0, \pi/2]$ et $a \in \partial C$. Désignons par $\mathcal{H}^a_k$ l'ensemble des hyperplanes $H \ni a$ tels qu'il y a un hyperplan d'appui $H' \ni a$ satisfaisant à l'égalité $\mu(H, H') = k$. Soit R_H le semi-espace fermé borné par H et contenant la normale intérieure de ∂C orthogonale à H' en a. Notons

$$\Delta_k(a) = \bigcap_{H \in \mathscr{H}_k^a} R_H$$

et

$$C_k^+ = \bigcap_{a \in \partial C} \Delta_k(a);$$

le dernier ensemble engendre une famille de corps associé au corps convexe n-dimensionnel C. La convexité des semi-espaces R_H entraîne celle des ensembles $\Delta_k(a)$ et même la convexité de C_k^+.

Considérons maintenant un point $b \in \overset{\circ}{C}$ et une corde $c \ni b$. Soit $\Gamma_C(c)$ le minimum des mesures des angles déterminés par la corde c et les hyperplans d'appui de C passant par l'une des extrémités de c. Notons

$$C_+^k = \{b \in \overset{\circ}{C} : \min_{b \in c} \Gamma_C(c) \geqslant k\}.$$

T h é o r è m e 8. *Pour tout corps $C \in \mathcal{K}^n$ et tout nombre $k \in (0, \pi/2]$, on a $C_k^+ = C_+^k$.*

Démonstration. Soit $b \in C_k^+$. Supposons qu'il y a une corde $[p, q] \ni b$ telle que $\Gamma_C([p, q]) < k$. Alors il y a un hyperplan d'appui H' passant par l'une des extrémités de la corde, soit elle p, et faisant un angle de mesure $\Gamma_C([p, q])$ avec (p, q). Il suit qu'il y a un hyperplan $H \ni p$ tel que

$$\mu(H, H') = k; \ [p, q] \not\subset R_H.$$

Par conséquent, $b \notin \Delta_k(p)$, d'où $b \notin C_k^+$, absurde.

Soit $b \in C_+^k$. Supposons qu'il y a un semi-espace R_H, où $H \in \mathscr{H}_k^a$, qui ne contient pas b. En vertu de la définition de l'ensemble $\mathscr{H}_k^a$, il y a un hyperplan d'appui $H' \ni a$ tel que $\mu(H, H') = k$. Alors

$$\mu((a, b), H) < k,$$

d'où $\Gamma_C((a, b) \cap C) < k$, en contradiction avec $b \in C_+^k$. Le théorème est complètement démontré.

T h é o r è m e 9. *Si $C \in \mathcal{K}^n$ et $k \in (0, \pi/2]$, alors*

$$\partial C_k^+ = \{b \in \overset{\circ}{C} : \min_{c \ni b} \Gamma_C(c) = k\}$$

Démonstration. On voit facilement que

$$\min_{c \ni b} \Gamma_C(c) : \overset{\circ}{C} \to (0, \pi/2]$$

est une fonction continue.

Soit $a \in \partial C_k^+$. Si

$$\min_{c \ni a} \Gamma_C(c) < k,$$

alors il y a un voisinage V_a de a, tel que

$$\min_{c \ni b} \Gamma_C(c) < k$$

quel que soit $b \in V_a$, d'où a est extérieur à C_k^+, absurde. Si

$$\min_{c \ni a} \Gamma_C(c) > k,$$

alors on trouve d'une façon analogue que $a \in \mathring{C}_k^+$, absurde. Donc

$$\partial C_k^+ \subseteq \{b \in \mathring{C} : \min_{c \ni b} \Gamma_C(c) = k\}.$$

Réciproquement, si

$$\min_{c \ni a} \Gamma_C(c) = k,$$

alors $a \in C_k^+$. Supposons que $a \in \mathring{C}_k^+$; il y a alors un voisinage $V_a \subset C_k^+$ de a. Il existe un point $p \in \partial C$ et un hyperplan d'appui $H \ni p$ de C tels que

$$\mu((a, p), H) = k.$$

Soit

$$b \in V_a - \Delta_k(p).$$

Evidemment

$$\mu((b, p), H) < k,$$

d'où

$$\min_{c \ni b} \Gamma_C(c) < k,$$

en contradiction avec $b \in C_k^+$. Donc $a \in \partial C_k^+$ et l'égalité du théorème est établie.

D'après ce théorème, $\partial C_k^+ \subseteq C_k^+$, donc C_k^+ est fermé. Comme $C_k^+ \subset C$ nous avons, si $\mathring{C}_C^+ \neq \varnothing$,

$$C_k^+ \in \mathcal{K}^n.$$

Théorème 10. *Si* $k_1 < k_2$, *alors* $C_{k_1}^+ \supset C_{k_2}^+$.

Démonstration. D'après la definition des corps associés C_+^k, on a

$$C_+^{k_1} \supseteq C_+^{k_2}.$$

D'après le théorème 9, si $b \in \partial C_{k_1}^+$, alors

$$\min_{c \ni b} \Gamma_C(c) = k_1 < k_2,$$

donc $b \notin C_{k_2}^+$, d'où

$$C_{k_1}^+ \supset C_{k_2}^+.$$

Théorème 11. *Pour tout corps* $C \in \mathcal{K}^2$, *on a*

$$C_k^+ \subseteq C_\cdot^{\pi - 2k}.$$

Démonstration. Si $a \in C_{+}^{\pi-2k}$, alors $\Gamma_C([p_1, p_2]) \geqslant k$ pour toute corde $[p_1, p_2] \ni a$ de C. Si b est un point tel que (b, p_1) et (b, p_2) soient des droites d'appui pour C et que $\mu((p_1, b], [b, p_2))$ soit minimum, alors

$$\mu((p_1, b], [b, p_2)) \leqslant \pi - 2k$$

car chacune des mesures des angles bp_1p_2 et bp_2p_1 est supérieure ou égale à k. Il résulte que

$$\gamma([p_1, p_2]) \leqslant \pi - 2k,$$

donc

$$\max_{a \in c} \gamma(c) \leqslant \pi - 2k$$

et $a \in C_{\cdot}^{\pi-2k}$. L'inclusion de l'énoncé est prouvée.

Théorème 12. *Si $C \in \mathcal{K}^2$, alors*

$$(C_k^+)_{\pi-2k} \subseteq \bigcap_{a \in \partial C} (C_k^+ - [\{a\} \cup (\partial \Delta_k(a) \cap C_k^+)]).$$

Démonstration. En utilisant les notations des paragraphes antérieurs, on a

$$C_k = \bigcap_{\alpha_C(b) \leqslant k} \delta_C(b)$$

et

$$\delta_{C_k^+}(a) = C_k^+ - [\{a\} \cup (\partial \Delta_k(a) \cap C_k^+)]$$

pour tout point $a \in \partial C$. Mais

$$\alpha_{C_k^+}(a) \leqslant \pi - 2k$$

pour les points $a \in \partial C$, d'où

$$\bigcap_{a_C \in \partial C} \delta_{C_k^+}(a) \supseteq (C_k^+)_{\pi-2k}.$$

Nous considérons maintenant des intersections de corps convexes et des sections faites par eux.

Si V est une variété linéaires de E^n et C un corps convexe de $\mathcal{K}^n$, alors C_V désigne leur intersection.

Théorème 13. *On a*

$$C_k^+ \cap V \subseteq (C_V)_k^+$$

quels que soient $C \in \mathcal{K}^n$, $V \in \mathcal{V}^m$ *et* $k \in (0, \pi/2]$.

Démonstration. Soit $a \in C_k^+ \cap V$. On a

$$\Gamma_C([p_1, p_2]) \geqslant k$$

pour toute corde $[p_1, p_2] \ni a$ de C_V. Si $\mathcal{H}$ est la famille des hyperplans d'appui de C en p_2, alors

$$\mu((p_1, p_2), (p_2, b)) \geqslant k$$

quels que soient $b \in \Pi - \{p_2\}$ et $\Pi \in \mathcal{H}$. Il suit qu'on a aussi

$$\mu((p_1, p_2, (p_2, b'))) \geqslant k$$

si b' varie dans $\Pi \cap V - \{p_2\}$, où $\Pi \in \mathcal{H}$. Donc

$$\Gamma_{CV}([p_1, p_2]) \geqslant k,$$

d'où

$$\min_{a \in c} \Gamma_{CV}(c) \geqslant k$$

et l'inclusion de l'énoncé est vraie.

Théorème 14. *Si $\mathcal{C}$ est une famille de corps convexes à intersection non vide, alors*

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C_k^+ \subseteq (\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C)_k^+.$$

Démonstration. Soient $a \in \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$, $[p_0, q_0] \ni a$ une corde de $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ et $P \ni q_0$ un hyperplan d'appui de $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ en q_0. Si card $\mathcal{C} < \aleph_0$ alors il y a un corps $C_0 \in \mathcal{C}$ tel que $q_0 \in \partial C_0$ et qu'un hyperplan d'appui Π de C_0 en q_0 satisfait à l'inégalité

$$\mu((p_0, q_0), P) \geqslant \mu((p_0, q_0), \Pi).$$

Si card $C \geqslant \aleph_0$, alors il y a une suite de corps $C_n \in \mathcal{C}$ ainsi qu'une suite convergente de points $q \in \partial C_n$ et une suite d'hyperplans d'appui Π_n de C_n en q_n, convergente vers Π_0, telles que $q_n \to q_0$ et que

$$\mu((p_0, q_0), P) \geqslant \mu((p_0, q_0), \Pi_0).$$

Mais

$$\mu((p_0, q_n), \Pi_n) \geqslant k \ (n = 1, 2, \ldots),$$

donc

$$\mu((p_0, q_0), \Pi_0) = \lim_{n \to \infty} \mu((p_0, q_n), \Pi_n) \geqslant k.$$

En tous les cas

$$\mu((p_0, q_0), P) \geqslant k,$$

d'où

$$\Gamma_{\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C}(p_0, q_0) \geqslant k$$

et $a \in (\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C)_k^+$.

Nombre associé à un corps de $\mathcal{K}^n$

Soient $C \in \mathcal{K}^n$ et

$$k_C^+ = \cos \max_{b \in \mathring{C}} \min_{b \in c} \Gamma_C(c)$$

un nombre qu'on lui attache; appelons-le *excentricité* de C. Soit encore

$$C^+ = C^+_{\arccos k_C^+}$$

Théorème 15. *Si $C \in \mathcal{K}_2^2$, alors C^+ est formé d'un seul point b_0. En outre, si $c \ni b_0$ est une corde telle que $\Gamma_C(c) = \arccos k_C^+$ et si l'angle définissant $\Gamma_C(c)$ a pour sommet l'extrémité a de c, alors b_0 est la projection du centre de courbure de ∂C en a sur c.*

Démonstration. Démontrons d'abord que $b_0 \in C^+$ coïncide à la projection ω du centre de courbure de ∂C en a sur c. Soit $c_{a'}$ une corde de C avec une extrémité a', telle que la mesure de l'angle déterminé par $c_{a'}$ et ∂C en a' soit $\arccos k_C^+$ et telle que si cet angle est superposé par un déplacement sur l'angle précédent de sommet a, $c_{a'}$ se superpose sur c. On voit aisément que si $a' \to a$,

$$c \cap c_{a'} \to \omega.$$

Si $b_0 \neq \omega$ et $b_0 \in [a, \omega]$, alors il y a un point $a'' \in \partial C$ tel que

$$c \cap c_{a''} \subset [b_0, \omega] - \{b_0\}$$

(la mesure de l'angle $a''a\, b_0$ est inférieure à $\pi/2$); la mesure de l'angle formé par (b_0, a'') et ∂C est inférieure à $\arccos k_C^+$, absurde.

Si $b_0 \neq \omega$ et $\omega \in [a, b_0]$, alors il y a un point $a''' \in \partial C$ tel que

$$c \cap c_{a'''} \subset [b_0, \omega] - \{b_0\}$$

(la mesure de l'angle $a'''\, a\, b_0$ est supérieure à $\pi/2$); la mesure de l'angle formé par (b_0, a''') et ∂C est inférieure à $\arccos k_C^+$, absurde. Donc $b_0 = \omega$.

Soit $b' \in \mathring{C}$ un point tel que

$$k_C^+ = \cos \min_{b_0' \in c} \Gamma_C(c).$$

En vertu de la convexité de C^+, $[b_0, b_0'] \subset C^+$. S'il y a un point

$$b \in [b_0, b_0'] - \{b_0, b_0'\},$$

alors soient c' une corde de C passant par b, telle que

$$k_C^+ = \cos \min_{b \in c} \Gamma_C(c) = \cos \Gamma_C(c')$$

et a une extrémité de c' telle que la mesure de l'angle déterminé par c' et ∂C en a' soit $\arccos k_C^+$. Il est montré ci-dessus que $[b_0, b_0'] \not\subset c'$. Evidemment, soit (b_0, a'), soit (b_0', a') fait avec ∂C en a' un angle de mesure inférieure à $\arccos k_C^+$, absurde. Donc le segment $[b_0, b_0']$ est dégénéré, c.-à-d. $b_0' = b_0$ et

$$C^+ = \{b_0\}.$$

Le théorème est prouvé.

Remarquons que si $C \in \mathcal{K}^n$, alors il est possible qu'on ait

$$\text{card } C \neq 1.$$

On peut démontrer cela en prenant un simplexe de E^n pour C. Par exemple, soient $n = 2$ et $C = [u, v, w]$. Supposons que

$$\mu((v, u), (u, w)) < \mu((w, v), (v, u)) < \mu((u, w), (w, v)).$$

Soient b la bissectrice intérieure de l'angle vuw et $y, z \in [u, v, w] \cap \cap b$ tels que

$$\mu((y, v), (v, u)) = \mu((z, v), (v, w)) = \mu((y, u), (u, v)).$$

Alors,

$$k_C^+ = \cos \mu((y, u), (u, v))$$

et

$$C^+ = [y, z].$$

Théorème 16. *Pour un corps $C \in \mathcal{K}^n$, on a $k_C^+ = 0$ si et seulement si ∂C est une hypersphère.*

Démonstration. Evidemment, si ∂C est une hypersphère de centre z, alors

$$\max_{b \in \overset{\circ}{C}} \min_{b \in c} \Gamma_C(c) = \min_{z \in c} \Gamma_C(c) = \pi/2,$$

donc $k_C^+ = 0$.

Réciproquement supposons que $k_C^+ = 0$, mais ∂C n'est pas une hyperphère. Alors, pour tout point $b \in \overset{\circ}{C}$, il y a une corde $c_b \ni b$, telle que $\Gamma_C(c_b) < \pi/2$. Il suit que

$$\min_{b \in c} \Gamma_C(c) < \pi/2$$

et

$$\cos \max_{b \in \overset{\circ}{C}} \min_{b \in c} \Gamma_C(c) > 0,$$

absurde.

Exemple. L'excentricité en notre sens d'un corps convexe plan C borné par une ellipse s'exprime à l'aide de l'excentricité habituelle e de l'ellipse de la manière suivante :

$$k_C^+ = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}.$$

On remarque la monotonie de k_C^+, comme fonction de e et que e et k_C^+ tendent simultanément vers 0 et 1.

Théorème 17. *Si $C \in \mathcal{K}^n$ et $1 < m < n$, alors*

$$k_C^+ \geq \max \{k_{C_V}^+ : V \in \mathcal{V}^m, V \cap C^+ \neq \emptyset\}.$$

Démonstration. Soit V une variété linéaire m-dimensionnelle intersectant C^+. Choisissons $p \in V \cap C^+$. On a

$$\min_{p \in c} \Gamma_{C_V}(c) \leqslant \arccos k^+_{C_V}.$$

Mais

$$\Gamma_C(c) \leqslant \Gamma_{C_V}(c)$$

pour toute corde $c \ni p$ de C_V, d'où

$$\min_{p \in c} \Gamma_C(c) \leqslant \min_{p \in c} \Gamma_{C_V}(c),$$

donc

$$k^+_C = \cos \min_{p \in c} \Gamma_C(c) \geqslant k^+_{C_V}.$$

Cette inégalité démontre le théorème.

Théorème 18. *Si $\mathcal{C}$ est une famille de corps convexes à intersection non vide et si*

$$K^+ \cap \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C - \partial \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$$

quel que soit $K \in \mathcal{C}$, alors

$$k^+_{\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C} \leqslant \max_{C \in \mathcal{C}} k^+_C$$

et

$$\left(\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C^+\right) \cup \left(\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C\right)^+ \subseteq \left(\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C\right)^+_{\arccos \max_{C \in \mathcal{C}} k^+_C}.$$

Démonstration. Notons

$$\lambda_K(q, c) = \min \{\mu((d, H);\ H \in \mathcal{A}^n_K\},$$

où $K \in \mathcal{K}^n$, d est une droite, $c = d \cap K$, q est une extrémité de c et $\mathcal{A}^n_K$ est l'ensemble des hyperplans d'appui de K en q.

Soient $D = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$, $p \in \mathring{D}$ et $[m_p, n_p] \ni p$ une corde de D telle que

$$\lambda_D(m_p, [m_p, n_p]) = \min_{q \in \partial D} \Gamma_D((q, p) \cap D).$$

Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il y a (voir la démonstration du théorème 14) un corps $C_p \in \mathcal{C}$ et un point $q_p \in \partial C$ tels que

$$|\lambda_{C_p}(q_p, [q_p, q_p(p)]) - \lambda_D(m_p, [m_p, n_p])| < \varepsilon,$$

où $q_p(p) = (p, q_p) \cap \partial C_p - \{q\}$. Mais

$$\lambda_{C_p}(q_p, [q_p, q_p(p)]) \geqslant \min_{c \ni p} \Gamma_{C_p}(c),$$

donc

$$\lambda_D(m_p, [m_p, n_p]) \geqslant \min_{c \ni p} \Gamma_{C_p}(c) - \varepsilon,$$

d'où
$$\lambda_D(m_p, [m_p, n_p]) \geqslant \min_{\substack{c \ni p \\ C \in \mathcal{C}}} \Gamma_C(c) - \varepsilon.$$

Il résulte d'ici que
$$\max_{p \in \mathring{D}} \lambda_D(q, [q, q(p)]) \geqslant \max_{p \in \mathring{D}} \min_{\substack{c \ni p \\ C \in \mathcal{C}}} \Gamma_C(c) - \varepsilon.$$

Puisque $C^+ \cap \mathring{D} \neq \emptyset$ si $C \in \mathcal{C}$, on a
$$\max_{p \in \mathring{D}} \min_{\substack{c \ni p \\ C \in \mathcal{C}}} \Gamma_C(c) = \min_{C \in \mathcal{C}} \max_{p \in \mathring{D}} \min_{c \ni p} \Gamma_C(c) = \min_{C \in \mathcal{C}} \arccos k_C^+,$$

d'où
$$\max_{p \in \mathring{D}} \min_{q \in \partial D} \Gamma_D((q, p) \cap D) \geqslant \arccos \max_{C \in \mathcal{C}} k_C^+ - \varepsilon$$

quel que soit $\varepsilon > 0$, donc
$$k_D^+ \leqslant \max_{C \in \mathcal{C}} k_C^+.$$

Démontrons la deuxième part du théorème. En vertu du théorème 10,
$$C^+ = C^+_{\arccos k_C^+} \subseteq C^+_{\min\limits_{C \in \mathcal{C}} \arccos k_C^+}.$$

D'après le théorème 14,
$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C^+ \subseteq \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C^+_{\arccos \max\limits_{C \in \mathcal{C}} k_C^+} \subseteq \Big(\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C\Big)^+_{\arccos \max\limits_{C \in \mathcal{C}} k_C^+}.$$

On a trouvé ci-dessus que
$$\arccos k^+_{\bigcap\limits_{C \in \mathcal{C}} C} \leqslant \arccos \max_{C \in \mathcal{C}} k_C^+,$$

d'où, selon le théorème 10,
$$\Big(\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C\Big)^+ \subseteq \Big(\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C\Big)^+_{\arccos \max\limits_{C \in \mathcal{C}} k_C^+},$$

ce qui achève la démonstration.

Théorème 19. *Il existe un corps convexe $C \in \mathcal{K}_2^n$, tel que si $p \in C^+$, alors il y a une infinité non dénombrable de cordes $c_\iota \ni p$ de C satisfaisant à l'égalité*
$$\cos \Gamma_C(c_\iota) = k_C^+.$$

Démonstration. Le théorème sera démontré pour $n = 2$, une démonstration pour $n \geqslant 3$ étant similaire.

Considérons le corps convexe plan construit à la démonstration du théorème de [1], auquel nous apportons les modifications suivantes :

1) Les „sticking out arcs" utilisés à la construction de $C(\varphi)$ pour $\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/4$ sont remplacés par les arcs $\Theta(\varphi)$ $(\varphi_i' \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i'')$ définis plus bas.

2) Il n'y a pas de nombre i tel que $3\pi/4 \in \{\varphi_i', \varphi_i''\}$.

Nous définissons l'arc $\Theta(\varphi)$ $(\varphi_i' \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i'')$ de la manière suivante : Soit l'angle $u0v$ tel que

$$\mu((u, 0], [0, v)) = \varphi_i'' - \varphi_i'$$

et que u et v appartiennent à la spirale logarithmique

$$\rho(\varphi) = e^{a\varphi} \ (a > 1).$$

Considérons aussi la droite $d \ni v$ parallèle à la tangente en u à la spirale et le point $w \in (0, u)$ situé entre $d \cap (0, u)$ et u. L'arc $\Theta(\varphi)$ $(\varphi_i' \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i'')$ est déterminé par une fonction Θ deux fois différentiable et telle que $\Theta(\varphi_i') = |v|$, $\Theta(\varphi_i'') = |w|$, que la courbure de l'arc soit égale à un nombre $N > 0$ fixe dans ses extrémités, que l'arc soit convexe et que

$$\frac{\Theta'(\varphi)}{\Theta(\varphi)} \geqslant a$$

sur $(\varphi_i', \varphi_i'')$.

Considérons maintenant seulement l'arc $C(\varphi)$ $(\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/4)$. Soit $C'(\varphi)$ $(3\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant 5\pi/4)$ sont symétrique relativement à la droite $\varphi = 3\pi/4$, c.-à-d. $C'(\varphi) = C(3\pi/2 - \varphi)$.

Considérons un arc $B(\varphi)$ doué d'une courbure finie et non nulle, tangent aux arcs précédents dans les points où φ est égale à $\pi/4$ et $5\pi/4$, complétant une courbe convexe ∂K et tel que $0 \in \mathring{K}$, que la courbure dans ses extrémités soit égale à N, que pour toute droite $(0, x)$ d'équation $\varphi = \overline{\varphi}$, avec

$$\in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right),$$

on ait

$$\mu((0, x], \ x, y)) \geqslant \operatorname{arctg} a,$$

où $x \in \partial K$ et (x, y) est tangente à ∂K et que

$$\mu((0, x_0], [x_0, y_0)) = \operatorname{arctg} a$$

pour une certaine droite $(0, x_0)$, d'équation $\varphi = \varphi_0$, où

$$\varphi_0 \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right),$$

$x_0 \in \partial K$, (x_0, y_0) est tangente à ∂K et la mesure de l'angle directeur de y_0 est inférieure à φ_0. L'existence de $(0, x_0)$ est assurée par l'inégalité $a > 1$. On a $K \in \mathcal{K}_2^2$.

D'après le théorème 15, K^+ est formé d'un seul point; démontrons que ce point est l'origine. Soit $\psi \in \mathcal{E}$ [1]. Pour la corde $c_\psi \ni 0$ située sur la droite $\varphi = \psi$, on a

$$\Gamma_K (c_\psi) = \operatorname{arctg} a,$$

en tenant compte des propriétés de l'ensemble $\mathcal{E}$ et de l'arc $B(\varphi)$.

Si $\psi \in [\pi/4, 3\pi/4] - \mathcal{E}$, alors il y a un nombre i tel que $\psi \in (\varphi_i', \varphi_i'')$. Puisque

$$\frac{\Theta'(\psi)}{\Theta(\psi)} \geqslant a,$$

nous avons

$$\Gamma_K (c_\psi) \geqslant \operatorname{arctg} a.$$

En vertu de la symétrie de ∂K, il résulte que la relation précédente a lieu quel que soit ψ, donc

$$\min_{c \ni 0} \Gamma_K (c) = \operatorname{arctg} a.$$

Soit $q \in K - \{0\}$ choisi arbitrairement. Il faut étudier 4 cas d'après les valeurs de l'angle directeur φ_q de q.

1°. Si $\varphi_q \in [\pi/4, 3\pi/4)$, alors il y a un point $q' \in \partial K$ d'angle directeur $\varphi_{q'} \in \mathcal{E}$, $\varphi_{q'} > \varphi_q$. On a

$$\mu ((q, q'), t_q) < \operatorname{arctg} a,$$

où t_q est la tangente en q' à ∂K.

2°. Si $\varphi_q \in [0, \pi/4) \cup [7\pi/4, 2\pi)$, alors la relation ci-dessus est valable pour $\varphi_{q'} = \pi/4$.

3°. Si $\varphi_q \in (3\pi/4, 7\pi/4)$, alors la même relation a lieu pour un certain point $q' = \partial K$ en vertu de la symétrie de K.

4°. Si $\varphi_q = 3\pi/4$, alors

$$\mu ((q, x_0], [x_0, y_0)) < \operatorname{arctg} a,$$

en tenant compte d'une propriété demandée à l'arc $B(\varphi)$ dans $\varphi = \varphi_0$.

Il s'ensuit que

$$\min_{c \ni q} \Gamma_K (c) < \operatorname{arctg} a$$

pour tout point $q \neq 0$ de K. Donc

$$K^+ = \{0\} \quad \text{et} \quad \arccos k_K^+ = \operatorname{arctg} a.$$

On a vu déjà que

$$\Gamma_K (c_\psi) = \operatorname{arctg} a$$

pour tout $\psi \in \mathcal{E}$. La mesure de $\mathcal{E}$ étant $\pi/4$ [1], on conclut que

$$\cos \Gamma_K (c_\psi) = k_K^+$$

pour une infinité non dénombrable de cordes c_ψ.

Reçu le 25.XII.1966

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. S. Besicovich and T. Zamfirescu, *On Pencils of Diameters in Convex Bodies*, Rev. Roum. Math. P. Appl., XI, 6 (1966).

[2] T. Zamfirescu, *Sur quelques questions de continuité liées à la réductibilité des corps convexes*, Rev. Roum. Math. P. Appl., XII, 7 (1967).