SUR LES CORPS ASSOCIÉS À UN CORPS CONVEXE

PAR

TUDOR ZAMFIRESCU

Nous allons faire dans cet ouvrage quelques précisions sur les corps associés de Hammer ainsi qu'une généralisation de l'inégalité de Neumann et de la notion de réductibilité aux corps convexes non bornés.

§ 1. INTRODUCTION

Envisageons l'espace euclidien à n dimensions E^n et le corps convexe n-dimensionnel borné et topologiquement fermé $C \subset E^n$. Considérons le corps $C_b(r)$ homothétique à C, le rapport d'homothétie étant r et le centre un point b sur la frontière B de C. M. Preston C. Hammer a introduit, en 1951, les corps associés

$$C(r) = \begin{cases} \bigcap\limits_{b \in B} C_b(r) & \text{si} \quad r \leqslant 1, \\ \bigcup\limits_{b \in B} C_b(r) & \text{si} \quad r > 1, \end{cases}$$

dont il a démontré la convexité (la propriété 1 du théorème 5 de [4]). M. Hammer a trouvé aussi (le théorème 7 de [4]) qu'il existe un nombre $r_i \in [1/2, 1]$ tel que

$$C = (C(r))\,(r/(2r-1)) \quad \text{si } r \geqslant r_i,$$

mais

$$C \supset (C(r))\,(r/(2r-1))\,^{1)} \text{ si } r < r_i.$$

On dit [4] que C est réductible (jusqu'à $C(r_i)$) si $r_i < 1$, complètement réductible si $r_i = 1/2$ et irréductible si $r_i = 1$. Le nombre r_i

---

[1]) Nous utilisons les signes $\subseteq$, $\supseteq$ pour les inclusions non strictes et $\subset$, $\supset$ pour celles strictes.

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., 1966, TOME XI, N° 6, p. 727–735

et le corps associé $C(r_i)$ sont appelés [7] respectivement le nombre et le corps de réductibilité du corps convexe C.

On définit une relation d'équivalence entre les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$ des corps convexes bornés de E^n, ainsi que l'on partage $\mathcal{E}$ en classes d'équivalence dénommées classes de réductibilité [8]. A savoir, deux corps convexes sont équivalents si chacun d'entre eux est un corps associé de l'autre.

On a aussi introduit, pour un corps convexe borné le rapport critique, noté par r^*. Nous allons indiquer ici comment on peut définir ce nombre pour un corps convexe quelconque. Considérons donc un tel corps C. Désignons par $E(x, y)$ le segment $\lambda x + \mu y$ $(\lambda + \mu = 1\,;\ \lambda, \mu \geqslant 0)$ et par $L(x, y)$ la droite contenant $E(x, y)$ [1]. Pour chaque corde $c = E(a, b)$ de C et point $x \in L(a, b)$, soient

$$r(x, c) = \frac{\max\{\|a - x\|, \|b - x\|\}}{\|a - b\|},$$

$$r(x) = \begin{cases} \sup\limits_c r(x, c) & \text{si } x \in C, \\ \inf\limits_c r(x, c) & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

et

$$r^* = \inf_{x \in E^n} r(x).$$

Donc le nombre $r(x)$ est, lui aussi, introduit pour tous les points x de l'espace et non seulement pour ceux intérieurs à C.

Nous comprendrons par $\nu(p)$ l'image sphérique sur la sphère unitaire $S = \{x\,;\ \|x\| = 1\}$ d'un point p de la frontière d'un corps convexe [1] et par $\mu(q)$ l'image inverse sur cette frontière du point $q \in S$ [7]. Si $M \subset S$ alors $\mathcal{J}M$ désigne l'intérieur de M relatif à la topologie de la sphère de la plus petite dimension contenant M.

§ 2. CARACTÉRISATIONS DES CORPS ASSOCIÉS

Nous avons déjà rappelé que les corps $C(r)$ associés à un corps convexe C sont tous convexes. Mais la démonstration donnée en [4] pour le cas du plan emploie des diamètres essentiels, définis seulement dans le plan. Donc la généralisation pour l'espace euclidien n-dimensionnel n'est pas évidente et nous allons la faire ici.

THÉORÈME 1. *Les corps $C(r)$ associés à un corps convexe borné n-dimensionnel C sont, pour $r \geqslant r^*$, bornés et convexes.*

Démonstration. Si $r \leqslant 1$, $C(r)$ est convexe et borné, comme intersection de corps convexes et bornés. Soit $r > 1$. Considérons la famille $\mathcal{D}$ des diamètres de C et l'ensemble

$$C_r = \{x\,;\ r(x, c) \leqslant r\,,\ c \in \mathcal{D}\}.$$

Les ensembles C_r et $C(r)$ sont égaux ; en effet, si $x \in C_r$, soit $E(a, b)$ le diamètre donné par la définition de C_r ; alors l'un des corps $C_a(r)$ et $C_b(r)$ homothétiques à C contient x, donc $x \in C(r)$ et $C_r \subseteq C(r)$. Si $x \in C(r)$, alors il existe le corps $C_b(r)$ tel que $x \in C_b(r)$. Supposons que $x \notin C$. Soit $d = E(b, x) \cap C$. On a $r \geqslant r(x, d) \geqslant r(x)$. Il existe un diamètre δ de C tel que $r(x) = r(x, \delta)$ (voir la démonstration du théorème 1 de [4]), d'où $r(x, \delta) \leqslant r$, donc $x \in C_r$. Si $x \in C$ alors évidemment $x \in C_r$. En tout cas, $C(r) \subseteq C_r$. Il suit que $C_r = C(r)$. Selon le lemme 1 de [4] qui s'étend immédiatement pour E^n, il y a pour chaque point y de la frontière de $C(r)$ le plan d'appui $H_y \ni y$. Donc, en vertu du théorème 9 de [2], $C(r)$ est convexe. C_r est borné, donc $C(r)$ l'est également.

Dans la démonstration ci-dessus, on a prouvé aussi, dans le cas de l'espace n-dimensionnel, que $C_r = C(r)$, c.-à-d. la propriété 8 du théorème 5 de [4], démontrée elle aussi seulement pour le plan dans [4], en utilisant des diamètres essentiels.

Démontrons maintenant une généralisation naturelle de la propriété 6 du théorème 5 de [4], pour $r \geqslant 1$.

THÉORÈME 2. *Si $r \geqslant r^*$, alors l'intérieur, la frontière et l'extérieur de $C(r)$ contiennent précisément les points x pour lesquels $r(x) < r$, $r(x) = r$ et, respectivement, $r(x) > r$.*

Démonstration. Démontrons, par exemple, que la frontière de $C(r)$ et l'ensemble $B_r = \{x ; r(x) = r\}$ coïncident. En effet, pour $r < 1$, l'affirmation est vraie (la propriété 6 du théorème 5 de [4]). Si $r \geqslant 1$, soit x un point sur la frontière de $C(r)$. Selon la propriété 8 du théorème 5 de [4] dont nous venons de parler, il existe un diamètre d de C, tel que $r(x, d) = r$. Mais $r(x) = r(x, d)$ (voir la démonstration du théorème 1 de [4]), donc $x \in B_r$. Inversement, si $x \in B_r$, alors il existe le diamètre d de C, dont le prolongement passe par x, tel que $r(x) = r(x, d)$, donc $r(x, d) = r$ et x appartient à la frontière de $C(r)$. Les autres assertions du théorème se déduisent maintenant facilement.

Soient $d \in \mathcal{D}$ et x_1, x_2 les deux points pour lesquels $r(x_i, d) = r$ $(i = 1,2)$. Considérons les hyperplans H_ι qui passent par x_1 ou x_2 et sont parallèles aux plans d'appui menés par l'extrémité de d plus proche de x_1, respectivement x_2, où $\iota \in I_d$ et card $I_d = 2$ ou $\mathfrak{c}$. Soit R_ι le demi-espace topologiquement fermé, contenant le milieu de d et dont la frontière est H_ι.

THÉORÈME 3. *Si $r \geqslant r^*$, alors*

$$C(r) = \bigcap_{\substack{\iota \in I_d \\ d \in \mathcal{D}}} R_\iota.$$

Démonstration. Soient H_ι la frontière d'un demi-espace R_ι et $E(a, b)$ le diamètre indiqué à la définition de H_ι, tel que $\|x_1 - a\| / \|a - b\| = r$, où $x_1 \in E(a, b) \cap H_\iota$. L'hyperplan parallèle à H_ι qui passe par b étant un plan d'appui pour C, H_ι l'est aussi pour $C_a(r)$. Donc $C_a(r) \subset R_\iota$. Il résulte que, si $x \in C(r)$, alors $x \in C_a(r)$ et $x \in R_\iota$. Donc

$$C(r) \subseteq \bigcap_{\substack{\iota \in I_d \\ d \in \mathcal{D}}} R_\iota.$$

Réciproquement, selon le théorème 2, la frontière de $C(r)$ est l'ensemble $\{x; r(x) = r\}$. Pour chaque point x de cet ensemble, il y a au moins un diamètre d, tel que $r(x, d) = r$. Selon la propriété 7 du théorème 5 et le lemme 1 de [4], à chaque paire de plans d'appui parallèles passant par les extrémités de d il y a un plan d'appui de $C(r)$ passant par x. Soit I_d^* l'ensemble des indices ι des hyperplans ainsi obtenus. On constate que $I_d^* \subseteq I_d$ et card $I_d^* \in \{0, 1, 2, \mathfrak{c}\}$. Alors, il est bien connu que

$$C(r) = \bigcap_{\substack{\iota \in I_d^* \\ d \in \mathcal{D}}} R_\iota .$$

Mais

$$\bigcap_{\substack{\iota \in I_d^* \\ d \in \mathcal{D}}} R_\iota \supseteq \bigcap_{\substack{\iota \in I_d \\ d \in \mathcal{D}}} R_\iota ,$$

donc

$$C(r) \supseteq \bigcap_{\substack{\iota \in I_d \\ d \in \mathcal{D}}} R_\iota .$$

En remarquant que nous avons aussi trouvé l'inclusion contraire, le théorème est démontré.

§ 3. LES IMAGES SPHÉRIQUES DES HYPERSURFACES FRONTIÈRES

Démontrons d'abord une propriété de la frontière d'un corps convexe réductible, qui aide à mieux connaître l'aspect de ces corps.

THÉORÈME 4. *Pour chaque point de la frontière d'un corps convexe réductible, on y trouve un autre tel que leurs images sphériques soient symétriques.*

Démonstration. Soient B la frontière d'un corps convexe réductible et $p \in B$. Trouvons le point p' satisfaisant à la propriété demandée. Considérons l'image sphérique $\nu(p)$ de p, le point $q \in \mathcal{J}(-\nu(p))$ et l'image inverse $\mu(q)$ de q. On peut choisir arbitrairement p' parmi les points de $\mu(q)$.

En effet, nous avons $\nu(p') \ni q$. L'ensemble $\nu(p') \subset S$ est convexe (le théorème 4.4 de [1]). Soit $x \in \mathcal{J}\nu(p')$. Alors tous les points de Γ, l'arc de cercle de longueur minimum joignant q et x, exceptant éventuellement l'extrémité q, appartiennent à $\mathcal{J}\nu(p')$ (le théorème 3 de [2]). Soit $V \subset \mathcal{J}(-\nu(p))$ un voisinage de q. Évidemment, $V \cap \mathcal{J}\Gamma \neq \emptyset$. Mais $\mathcal{J}\Gamma \subset \mathcal{J}\nu(p')$, donc

$$\mathcal{J}(-\nu(p)) \cap \mathcal{J}\nu(p') \neq \emptyset.$$

Selon le théorème 4 de [7], $-\nu(p) = \nu(p')$ c.-à-d. les images sphériques $\nu(p)$ et $\nu(p')$ des points $p, p' \in B$ sont symétriques.

En particulier, si B est différentiable en p, elle l'est aussi en p'.

Donc, la représentation sphérique d'une hypersurface convexe, frontière d'un corps réductible, jouit d'une symétrie remarquable, à savoir l'hypersphère S est partagée en paires d'ensembles convexes (la convexité conçue sur S) symétriques, éventuellement réduits à des points — les images sphériques des points diamétralement opposés de l'hypersurface convexe envisagée.

THÉORÈME 5. *Si deux corps convexes réductibles appartiennent à une même classe de réductibilité, alors il y a une application bijective entre leurs frontières telle que, pour chaque paire de points correspondants p_1, p_2, on ait $\nu(p_1) = \nu(p_2)$.*

Démonstration. Soient C et $C(r)$ $(r > 1)$ les deux corps équivalents. D'après la propriété 8 du théorème 5 de [4], si $E(a, b)$ est un diamètre de C, alors $L(a, b) \cap C = E(a_r, b_r)$ est un diamètre de $C(r)$, $\|a_r - b_r\| = (2r-1)\|a - b\|$ et $a_r + b_r = a + b$. En outre, on obtient ainsi tous les diamètres de $C(r)$. Considérons, pour chaque telle paire de diamètres, que l'inégalité $\|a_r - a\| < \|a - b_r\|$ est satisfaite. Si a_r correspond à un seul point a, soit $\varphi(a) = a_r$. Dans le cas contraire, les cardinaux des ensembles maximaux A et A_r, contenant respectivement a et a_r, tels que chaque $b_r \in A_r$ correspond à plusieurs points de A, sont égaux ; soit $\psi : A \to A_r$ une application bijective et choisissons $\varphi(a) = \psi(a)$. Alors φ est l'application bijective cherchée. En effet, si φ est définie à l'aide des applications ψ, l'assertion est évidente. Dans l'autre cas, selon le lemme 1 de [4], $\nu(a) \subseteq \nu(a_r)$. Considérons les ensembles R_ι, I_d et $\mathcal{D}$ de $C(r)$. Puisque $r > 1$, $C = (C(r))\,(r/(2r-1))$. Alors, on peut utiliser le théorème 3 :

$$C = \bigcap_{\substack{\iota \in I_d \\ d \in \mathcal{D}}} R_\iota .$$

Donc $C \subset \bigcap\limits_{\iota \in I_{E(a_r,\, b_r)}} R_\iota$, c.-à-d. $\nu(a) \supseteq \nu(a_r)$.

Par conséquent,

$$\nu(a) = \nu(a_r)$$

et le théorème est prouvé.

En particulier, si la frontière d'un corps convexe réductible est différentiable, alors les frontières de tous les corps réductibles de sa classe de réductibilité sont différentiables.

On remarque aussi, à l'aide des théorèmes 4 et 5, que la connaissance d'une hémisphère de l'image sphérique de la frontière d'un corps réductible appartenant à une certaine classe de réductibilité suffit pour connaître les images sphériques des frontières de tous les corps réductibles de la classe.

Nous laisserons la démonstration du théorème suivant à la charge du lecteur, car elle suit le modèle des raisonnements précédents.

THÉORÈME 6. *Si $r < 1$, alors pour chaque point p de la frontière de C il y a sur la frontière de $C(r)$ un autre point p' tel que $\nu(p) \subseteq \nu(p')$.*

Maintenant, présentons la généralisation pour l'espace euclidien à n dimensions du théorème 9 de [7].

THÉORÈME 7. *Si on considère un corps convexe réductible, alors* $\mu(p)$ *et* $\mu(-p)$ *ont le même cardinal, pour tout point* $p \in S$.

Démonstration. Supposons que $\mu(p)$ est un point, mais $\mu(-p)$ contient un segment non dégénéré s. Soient H et H' deux plans d'appui parallèles contenant respectivement $\mu(p)$ et $\mu(-p)$, $V \subset H'$ une variété linéaire à $n-2$ dimensions non parallèle à s, Π un plan orthogonal sur V et C_V^1 la projection de C sur Π. Selon le théorème 3 de [7], C_V^1 est réductible. La projection du segment s est un segment σ non dégénéré appartenant à la frontière de C_V^1 et la projection de $\mu(p)$ est un point π sur cette frontière. Si on considère la représentation circulaire de la frontière de C_V^1 sur le grand cercle Γ de S dont le plan est parallèle à Π et les images inverses $\mu'(q)$ des points $q \in \Gamma$ sur la frontière de C_V^1, alors p, $-p \in \Gamma$; $\mu'(p) = \{\pi\}$; $\mu'(-p) \supseteq \sigma$. Mais cela est impossible en vertu du théorème 9 de [7]. Donc les cardinaux de $\mu(p)$ et $\mu(-p)$ sont égaux.

§ 4. GÉNÉRALISATION DE L'INÉGALITÉ DE NEUMANN AU CORPS CONVEXES NON BORNÉS

L'inégalité établie par B. H. Neumann [5] pour les corps convexes plans ayant pour frontières des courbes fermées et étendues par W. Süss [6] et P. Hammer [3][1]) pour les corps convexes de E^n ayant pour frontières des hypersurfaces fermées peut être encore généralisée en envisageant tous les corps convexes de E^n.

Soit $\sum^m$ la sphère m-dimensionnelle $\{x ; \|x\| = 1\} \subset E^{m+1}$. L'hypersurface frontière B d'un corps convexe C arbitraire est soit fermée (homéomorphe à $\sum^{n-1}$), soit ouverte (homéomorphe à E^{n-1}), soit cylindrique (homéomorphe à $E^r \times \sum^{n-r-1}$, où $1 \leqslant r \leqslant n-2$), soit formée de deux hyperplans parallèles [1].

Nous allons considérer dans ce paragraphe, ainsi que dans le reste du travail, des corps convexes topologiquement fermés.

THÉORÈME 8. *Si l'hypersurface convexe* B *est cylindrique et homéomorphe à* $E^r \times \sum^{n-r-1}$, *alors*

$$\frac{1}{2} \leqslant r^* \leqslant \frac{n-r}{n-r+1}.$$

Démonstration. Il est connu que $\nu(B)$ est une sphère $(n-r-1)$-dimensionnelle S' sur S. Soit V la variété linéaire à $n-r$ dimensions contenant S'. La variété courbe $B' = V \cap B$ est homéomorphe à $\sum^{n-r-1}$.

Soit $x \in E^n$ et $E(a, b)$ un diamètre du corps convexe considéré, tel que $x \in L(a, b)$. Soit x', a', b' les projections de x, a, b sur V. On a

$$r(x, E(a, b)) = r(x', E(a', b'))$$

---

[1]) A. Pliś et A. Turowicz ont retrouvé dans leur travail « On Chords of Convex Bodies », *Colloq. Math.*, vol. XII. 1964, fasc. 1, des résultats de [3].

et a', $b' \in B'$. Puisque B' est une variété courbe fermée, l'inégalité de Neumann nous donne

$$r^* = r_V^* \in \left[\frac{1}{2}, \frac{n-r}{n-r+1}\right],$$

où r_V^* est le rapport critique du corps convexe de V borné par B' [6], [3].

THÉORÈME 9. *Pour un corps convexe arbitraire de E^n,*

$$r \in \left[\frac{1}{1}, \frac{n}{n+1}\right] \cup \{1\}.$$

Démonstration. Si la frontière B du corps convexe C envisagé est fermée, alors, évidemment, r^* appartient à l'intervalle fermé $\left[\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}\right]$ [6], [3]. Si B est une hypersurface cylindrique, alors, selon le théorème 8,

$$\frac{1}{2} \leqslant r^* \leqslant \frac{n-r}{n-r+1} < \frac{n}{n+1}$$

$(n \geqslant 3\,;\ 1 \leqslant r \leqslant n-2)$. Si B est ouverte, alors il y a, pour chaque point $x \in C$, une droite qui ne rencontre B qu'une seule fois et encore une qui la rencontre en deux points. Il suit que

$$r(x) = \sup_c r(x, c) = 1$$

pour chaque $x \in C$. Si $x \notin C$, alors $r(x, c) > 1$, quel que soit c, donc $r(x) \geqslant 1$. Par conséquent, $r^* = 1$. Enfin, si C est borné par deux hyperplans parallèles, alors il est complètement réductible et la démonstration est achevée.

§ 5. LA RÉDUCTIBILITÉ DES CORPS CONVEXES NON BORNÉS

Considérons maintenant la question de la réductibilité des corps convexes non bornés. Définissons d'abord les corps associés et le nombre de réductibilité par les mêmes relations que pour les corps bornés. Il est très facile de voir que les deux notions ont un sens bien clair pour les corps convexes admettant comme frontières des hypersurfaces cylindriques.

Quant aux autres corps convexes non bornés, ont peut établir le

THÉORÈME 10. *Soit C un corps convexe de E^n avec l'hypersurface frontière ouverte. Si $r < 1$, alors $C(r) = \varnothing$; $C(1) = C$; si $r > 1$ alors $C(r)$ est soit l'espace entier E^n, soit connexe et borné par deux hyperplans parallèles, soit un corps convexe à hypersurface cylindrique.*

Démonstration. On constate facilement que les raisonnements qui établissent les égalités $C(1) = C$ et $C(r) = \emptyset$ pour $r < r^*$ (la propriété 3 du théorème 5 de [4]) pour un corps convexe borné, subsistent pour un corps convexe arbitraire. En remarquant que $r^* = 1$ si l'hypersurface frontière de C est ouverte (voir § 4), le théorème est démontré pour $r \leqslant 1$.

Soit $r > 1$. Supposons qu'il n'existe pas un corps convexe à frontière cylindrique qui contienne C à l'intérieur ou deux hyperplans parallèles tels que C se trouve entre eux. Alors, pour chaque $x \notin C$, $r(x) = 1$. Donc, il y a une corde $E(a, b)$ de C telle que $x \in L(a, b)$ et $x \in C_a(r)$, quel que soit $r > 1$, donc $x \in C(r)$ et, par suite, $C(r) = E^n$.

S'il existe des corps convexes à frontières cylindriques qui contiennent C à l'intérieur, soit K leur intersection, dont l'hypersurface frontière est aussi cylindrique. Considérons le corps associé $K(r)$. On constate aisément que $\overline{C(r)} = K(r)$, où $\overline{C(r)}$ désigne la fermeture topologique de $C(r)$, donc la frontière de $C(r)$ est une hypersurface cylindrique. On prouve de la même manière que, s'il existe deux hyperplans parallèles tels que C se trouve entre eux, mais sans l'existence de corps convexes à frontières cylindriques qui incluent C, alors $C(r)$ est un ensemble connexe borné par deux autres hyperplans parallèles.

De ce théorème, il suit immédiatement le suivant

COROLLAIRE 1. *Une condition nécessaire, mais non suffisante, pour la réductibilité d'un corps convexe non borné est que la courbure intégrale de sa frontière soit nulle.*

En effet, une condition nécessaire pour la réductibilité d'un corps convexe est, d'après le théorème 10, que sa frontière ne soit pas une hypersurface ouverte, donc si un corps réductible n'est pas borné, alors il a comme frontière deux hyperplans parallèles ou une hypersurface cylindrique et la courbure intégrale d'une telle frontière est vraiment nulle.

COROLLAIRE 2. *Si C est un corps convexe arbitraire et $r \geqslant 1$, alors*

$$C \subseteq (C(r))(r/(2r-1)),$$

l'inclusion stricte ayant lieu si et seulement si $r > 1$ et l'hypersurface frontière de C est ouverte.

La démonstration de ce corollaire résulte des raisonnements faits au théorème 10.

On observe que le corollaire 2 fournit une simple condition nécessaire et suffisante pour qu'une hypersurface convexe soit ouverte, à l'aide des corps associés aux corps convexes non bornés.

Remarquons enfin que les corps convexes à hypersurfaces ouvertes ne possèdent par de nombre de réductibilité. Donc, ils sont caractérisés par l'égalité $r^* = 1$ et par l'absence de r_i.

Reçu le 18 février 1965

Faculté de Mathématiques et Mécanique de l'Université de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Busemann, *Convex Surfaces*. Intersc. Tracts in Pure and Applied Math., 1958, *6*.
2. H. G. Eggleston, *Convexity*. Cambridge University Press, 1958.
3. P. C. Hammer, *The Centroid of a Convex Body*. Proc. of the Amer. Math. Soc., 1951, **2**, *4*.
4. — *Convex Bodies Associated with a Convex Body*. Proc. of the Amer. Math. Soc., 1951, **2**, *5*.
5. B. H. Neumann, *On Some Affine Invariants of Closed Convex Regions*. Journ. London Math. Soc., 1939, **14**.
6. W. Süss, *Über eine Affininvariante von Eibereichen*. Archiv der Math., 1948, **1**, *2*.
7. T. Zamfirescu, *Reducibility of Convex Bodies* (à paraître dans Proc. London Math. Soc.).
8. — *Réductibilité et séries linéaires de corps convexes*. L'enseign. Math., Genève, 1965, **11**, *4*.