SUR LES SÉRIES LINÉAIRES DE CORPS CONVEXES À FRONTIÈRES NON DIFFÉRENTIABLES ET APPLICATIONS À LA RÉDUCTIBILITÉ

PAR

TUDOR ZAMFIRESCU

On étudie des liaisons entre les classes de réductibilité et les séries linéaires de corps convexes. On voit que le nombre de rédutibilité et une certaine limite de prolongeabilité s'expriment l'un par l'autre d'une manière très simple. Aussi on obtient des évaluations du nombre de réductibilité à l'aide d'une congruence de droites et à l'aide des projections planes.

1. *Introduction.* Les recherches sur les séries linéaires de corps convexes ont habituellement envisagé dans l'espace euclidien à n dimensions des corps convexes à frontières différentiables et les principaux résultats ont été obtenus pour ceux à frontières non seulement différentiables, mais possédant partout $n-1$ rayons de courbure principaux, finis et non nuls. Nous allons aborder ici des cas beaucoup plus généraux regardant les séries linéaires et puis, comme une application des mêmes méthodes, nous allons donner deux expressions du nombre de réductibilité pour les corps convexes 3-dimensionnels, dont les frontières sont douées de deux courbures principales, finies et non nulles.

2. *Définitions et notations.* Soit E^n l'espace euclidien à n dimensions. Si $a, b \in E^n$, notons le segment joignant a et b et la droite qui les contient par $E(a, b)$ et $L(a, b)$. Soit S l'hypersphère unitaire $\{x;\ \|x\| = 1\}$.

Désignons par $\mathfrak{P}(M)$ la famille des parties de l'ensemble M. Si C est un corps convexe quelconque et B sa frontière, désignons par $\nu : \mathfrak{P}(B) \to \to \mathfrak{P}(S)$ la fonction « *image sphérique* » et par $\mu : \mathfrak{P}(\nu(B)) \to \mathfrak{P}(B)$ la fonction « *image inverse* » [1], [7], [9].

On identifiera dorénavant $a \in E^n$ avec $\{a\}$.

Soit $\mathfrak{S}$ la famille des corps convexes bornés de E^n, $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}$ la sous-famille des corps pour lesquels $\mu(\omega)$ est un point pour chaque $\omega \in S$ et $\mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_1$ la sous-famille des corps de $\mathfrak{S}_1$ dont les hypersurfaces frontières sont douées en chaque point de $n-1$ rayons de courbure principaux, finis et non nuls [1]).

Soit $H_C(\omega)$, où $\omega \in S$, la fonction d'appui de $C \in \mathfrak{S}$.

Considérons C_0, $C_\infty \in \mathfrak{S}$. La fonction

$$H_{C_\lambda}(\omega) = \frac{H_{C_0}(\omega) - \lambda H_{C_\infty}(\omega)}{1-\lambda}$$

est, pour chaque $\lambda < 0$, la fonction d'appui d'un certain corps convexe C_λ, générateur de la série linéaire $[C_0, C_\infty]$. Le plus grand nombre $\lambda_0 \leqslant 1$ et le plus petit $\lambda_\infty \geqslant 1$, tels que $H_{C_\lambda}(\omega)$ soit une véritable fonction d'appui d'un corps convexe pour chaque $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_\infty]$, s'appellent la *limite gauche et*, respectivement, *droite de prolongeabilité* de la série linéaire $[C_0, C_\infty]$ [6], [8].

Soit C un corps convexe n-dimensionnel, $C_b(r)$ un corps homothétique à C, le rapport d'homothétie étant r et le centre un point b sur la frontière B de C. Les ensembles

$$C(r) = \begin{cases} \bigcap\limits_{b \in B} C_b(r) & \text{si } r \leqslant 1, \\ \bigcup\limits_{b \in B} C_b(r) & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

sont appelés *corps associés* à C [2], [8]. On connaît [2] que les corps associés sont convexes et qu'il existe un nombre r_i tel que

$$C = (C(r))(r/(2r-1)) \quad \text{si} \quad r \geqslant r_i,$$

mais

$$C \supset (C(r))(r/(2r-1)) \quad \text{si} \quad r < r_i$$

et qui s'appelle *nombre de réductibilité* de C [7].

On désignera par $\overline{M}$ la fermeture topologique de M et par $mM + nN$ l'ensemble $\{mx + my;\ x \in M,\ y \in N\}$ où m, n sont des nombres réels et $M, N \subset E^n$.

Nous utiliserons aussi les *classes de réductibilité*, récemment introduites [8], qui réalisent une partition de $\mathfrak{S}$ en classes d'équivalence; deux corps convexes font partie d'une même classe de réductibilité si chacun d'entre eux est un corps associé de l'autre.

[1]) On utilise les signes $\subset$, $\supset$ pour les inclusions strictes et $\subseteq$, $\supseteq$ pour celles non trictes.

3. *Précision des frontières des corps d'une série linéaire prolongée.* Soit dans E^n les corps C_0, $C_\infty \in \mathfrak{S}$. Considérons l'ensemble

$$B_\lambda = \begin{cases} \{x;\ x \in E(a, b),\ \|x-a\|/\|x-b\| = -\lambda, \\ \qquad a \in \mu_0(\omega),\ b \in \mu_\infty(\omega),\ \omega \in S\} \quad \text{si } -\infty \leqslant \lambda \leqslant 0, \\ \{x;\ \forall\ b \in \mu_\infty(\omega),\ \varnothing \neq E(b, x) \cap \mu_0(\omega) = a, \\ \qquad \|x-a\|/\|x-b\| = \lambda,\ \omega \in S\} \quad \text{si } 0 < \lambda < 1, \\ \{x;\ \forall\ a \in \mu_0(\omega),\ \varnothing \neq E(a, x) \cap \mu_\infty(\omega) = b, \\ \qquad \|x-a\|/\|x-b\| = \lambda,\quad \omega \in S\} \quad \text{si } 1 < \lambda < \infty, \end{cases}$$

où μ_0 et μ_∞ sont les images inverses définies pour C_0 et C_∞.

THÉORÈME 1. *La frontière du corps C_λ de la série linéaire $[C_0, C_\infty]$ prolongée est l'ensemble B_λ.*

En effet, si $\lambda = 0$ ou $\pm\infty$, l'assertion est évidente. Si $-\infty < \lambda < 0$, soit $x \in B_\lambda$. Notons par $P(\omega)$, $P_0(\omega)$ et $P_\infty(\omega)$ les plans d'appui de C_λ, C_0 et C_∞ qui correspondent à $\omega \in S$ et par $R(\omega)$ le demi-espace fermé déterminé par $P(\omega)$ et contenant C_λ. Nous savons que $x \in E(a, b)$, $a \in \mu_0(\omega)$, $b \in \mu_\infty(\omega)$ et $\omega \in S$. Puisque $C_\lambda = \bigcap_{\omega' \in S} R(\omega')$, il faut prouver que $x \in P(\omega) \cap \bigcap_{\omega' \in S} R(\omega')$. L'appartenance de x à $P(\omega)$ est évidente car $\|x-a\|/\|x-b\| = |\lambda|$ et

$$P(\omega) = \frac{P_0(\omega) - \lambda P_\infty(\omega)}{1-\lambda}.$$

Aussi, $x \in R(\omega')$ quelle que soit $\omega' \in S$, car les translations superposant les hyperplans $P_0(\omega')$, $P_\infty(\omega')$ et $P(\omega')$ sur un même hyperplan Π, ramènent a, b et par suite x également d'un même côté de Π.

Si $a' \notin \mu_0(\omega)$, mais $a' \in \mu_0(\omega')$ et $b' \in \mu_\infty(\omega')$ pour un autre $\omega' \in S$, alors le point $x' = (a - \lambda b)/(1 - \lambda)$ se trouve à l'extérieur de $P(\omega)$, mais sur la frontière de C_λ. Alors on en déduit que $P(\omega) \cap B_\lambda = P(\omega) \cap C_\lambda$. Soit maintenant y un point de la frontière de C_λ. Choisissons $\omega \in \nu(y)$, où ν est la fonction « image sphérique » attachée à C_λ et considérons le plan d'appui $P(\omega)$. Alors $y \in P(\omega) \cap C_\lambda \subset B_\lambda$.

Si $0 < \lambda < 1$, alors on constate que B_λ est la frontière de C_λ en remarquant que C_0 est un élément de la série linéaire $[C_\lambda, C_\infty]$, pour lequel le théorème est applicable car à C_0 il correspond dans la nouvelle série un nombre λ négatif. Pour $1 < \lambda < \infty$ le raisonnement est similaire.

On déduit de la définition de B_λ, que, pour chaque $C_\lambda \in [C_0, C_\infty]$, l'image sphérique du point $\omega \in S$ sur la frontière de C_λ est

$$\mu_\lambda(\omega) = \frac{\mu_0(\omega) - \lambda \mu_\infty(\omega)}{1-\lambda}$$

et la frontière de C_λ est

$$B_\lambda = \bigcup_{\omega \in S} \mu_\lambda(\omega).$$

Supposons maintenant que C_0, $C_\infty \in \mathfrak{S}_1$. Alors l'expression de B_λ (la frontière du corps C_λ de la série prolongée) se simplifie et devient

$$B_\lambda = \left\{ \frac{\mu_0(\omega) - \lambda \mu_\infty(\omega)}{1 - \lambda}\ ;\ \omega \in S \right\}.$$

4. *La liaison entre les classes de réductibilité et les séries linéaires de corps convexes de* $\mathfrak{S}_1$. Dans [8] on a étudié ce sujet à l'égard des corps de $\mathfrak{S}_2$. Maintenant nous étendons le principal résultat de [8], à savoir le théorème 5, pour les corps de $\mathfrak{S}_1$ en employant une méthode toute différente.

THÉORÈME 2. *Le corps associé* $C(r)$ *de la classe de réductibilité du corps* $C \in \mathfrak{S}_1$ *et l'élément* $C_{-\lambda}$ *de la série linéaire* $[C, -C]$ *prolongée, où* $r = 1/(1-\lambda)$ et $-1 < \lambda < 1$, *coïncident à une homothétie près.*

Rappelons, pour une démonstration, que la frontière de $C_{-\lambda}$ coïncide à $B_{-\lambda}$ et que la frontière de $C(r)$ coïncide à

$$\gamma(r) = \left\{ \frac{\mu(\omega) - \lambda\mu(-\omega)}{1 - \lambda};\ \omega \in S,\ r = \frac{1}{1-\lambda} \right\},$$

en tenant compte de l'inégalité $r \geqslant r_i$ et du théorème 6 de [7]. On a désigné par μ la fonction « image inverse » attachée à C. Evidemment, l'image inverse de $\omega \in S$ sur la frontière de $-C$ est $-\mu(-\omega)$.

Démontrons que $B_{-\lambda}$ et $\gamma(r)$, où $r = 1/(1-\lambda)$ et $-1 < \lambda < 1$, sont homothétiques. Soit $\omega \in S$; les points correspondants situés sur $B_{-\lambda}$ et $\gamma(r)$ sont

$$\alpha = \frac{\mu(\omega) - (-\lambda)(-\mu(-\omega))}{1 - (-\lambda)} = \frac{\mu(\omega) - \lambda\mu(\omega)}{1 + \lambda}$$

sur $B_{-\lambda}$ et

$$\beta = \frac{\mu(\omega) - \lambda\mu(-\omega)}{1 - \lambda}$$

sur $\gamma(r)$. Donc $\alpha = \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\beta$ et on a vraiment

$$B_{-\lambda} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\gamma(r),$$

d'où il résulte que $C_{-\lambda}$ et $C(r)$ coïncident à une homothétie près et le théorème est démontré.

Considérons les limites de prolongeabilité λ_0 et λ_∞ de $[C, -C]$. Si $B_{-\lambda}$ borne un corps convexe, alors $\gamma(r)$ borne aussi un tel corps et $r \geqslant r_i$ d'après le théorème 2 de [8]. Si on ajoute ici que $-\lambda_0$ est la borne supérieure des valeurs de λ pour lesquelles $B_{-\lambda}$ borne un corps convexe, donc r_i

est simultanément la borne inférieure des valeurs correspondantes de r, on arrive à l'égalité

$$r_i = \frac{1}{1+\lambda_0}.$$

Les résultats de la section 2 de [8] s'étendent immédiatement aux corps de $\mathcal{S}_1$, donc $\lambda_0 \lambda_\infty = 1$ et on obtient aussi

$$r_i = \frac{\lambda_\infty}{1+\lambda_\infty}.$$

5. *Les classes de réductibilité et les séries linéaires de corps convexes plans quelconques.* Pour le plan, le problème de l'établissement de l'homothétie entre les éléments de la classe de réductibilité du corps convexe C et ceux de la série linéaire $[C, -C]$ sera résolu dans le cas le plus général.

THÉORÈME 3. *L'énoncé du théorème 2 reste valable pour tout corps plan* $C \in \mathcal{S}$.

En effet, considérons le point $\alpha \in B_{-\lambda}$. S'il appartient à un segment non dégénéré de $B_{-\lambda}$, soit $E(p, q)$ et $E(p', q')$ les ensembles des points dont les images sphériques contiennent $\nu(\alpha)$ et sont situés sur les frontières de C et $-C$, tels que $s = L(p, p') \cap L(q, q')$ ne se trouve pas entre $L(p, q)$ et $L(p', q')$, mais peut être à l'infini. Soient $m = L(s, \alpha) \cap E(p, q)$ et $m' = L(s, \alpha) \cap E(p', q')$. Si α n'appartient pas à un segment non dégénéré de $B_{-\lambda}$, désignons par m et m' les points situés sur les frontières de C et $-C$, tels que $\nu(\alpha) \cap \nu(m) \cap \nu(m') \neq \emptyset$. Considérons le point

$$\beta = \frac{m - \lambda(-m')}{1-\lambda} = \frac{m + \lambda m'}{1-\lambda}.$$

On peut constater que ce point engendre, lorsque α varie sur $B_{-\lambda}$, la courbe $\varepsilon(r)$, où $r = 1/(1-\lambda)$, définie dans [7]. Les segments $E(m, -m')$ ne sont d'ailleurs que les diamètres essentiels de C [2]. Puisque

$$\alpha = \frac{m + \lambda m'}{1+\lambda},$$

nous avons prouvé que $\alpha = \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\beta$ et $B_{-\lambda} = \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\varepsilon(r)$. Selon le théorème 7 de [7], $\varepsilon(r)$ est la frontière de $C(r)$, car $r \geqslant r_i$. On obtient donc que $C_{-\lambda}$ et $C(r)$ sont homothétiques et la démonstration est finie.

6. *Les limites de prolongeabilité de certaines séries linéaires et quelques évaluations du nombre de réductibilité à l'aide des domaines vectoriels.* Envisageons un corps convexe plan borné et fermé C, dont la frontière B est douée d'une courbure continue qui peut devenir dans certains points nulle ou infinie. Soit $\omega \in S$ et $\Gamma(\omega)$ le rayon de courbure de B dans $\mu(\omega)$ si c'est un point ou, dans l'autre cas, la longueur du segment $\mu(\omega)$.

THÉORÈME 4. *Les limites gauche et droite de prolongeabilité de la série linéaire* $[C, -C]$ *sont*

$$\lambda_0 = \inf_{\omega \in \widetilde{S}} \frac{\Gamma(\omega)}{\Gamma(-\omega)}, \quad \lambda_\infty = \sup_{\omega \in \widetilde{S}} \frac{\Gamma(\omega)}{\Gamma(-\omega)},$$

où $\widetilde{S}$ *est l'ensemble des points de* S *où les rapports ont un sens.*

Il faut rappeler, pour démontrer le théorème, que le nombre de réductibilité de C s'écrit, selon le théorème 16 de [7]*),

$$r_i = \sup_{\omega \in \widetilde{S}} \frac{\Gamma(\omega)}{\Gamma(\omega) + \Gamma(-\omega)}.$$

Il est facile à voir qu'on a, même dans les conditions de la section 5, $r_i = 1/(1 + \lambda_0)$. Alors

$$\lambda_0 = \frac{1 - r_i}{r_i} = \inf_{\omega \in \widetilde{S}} \frac{\Gamma(-\omega)}{\Gamma(\omega)}.$$

En tenant compte de la relation $\lambda_0 \lambda_\infty = 1$, on obtient les égalités de l'énoncé.

Soit Δ le domaine vectoriel du corps convexe C considéré plus haut.

THÉORÈME 5. *Le nombre de réductibilité de* C *s'écrit*

$$r_i = \sup_{\omega \in \widetilde{S}} \frac{\Gamma_C(\omega)}{\Gamma_\Delta(\omega)},$$

où Γ_C *et* Γ_Δ *sont les fonctions* Γ *définies pour* C *et* Δ.

Il ne reste qu'à établir que $\Gamma_C(\omega) + \Gamma_C(-\omega) = \Gamma_\Delta(\omega)$ si $\mu_C(\omega)$ n'est pas un point, car s'il l'est, alors le rayon de courbure de Δ dans $\mu_\Delta(\omega)$ est égal à la somme des rayons de courbure de C dans $\mu_C(\omega)$ et $\mu_C(-\omega)$ [5] (on a noté par μ_C et μ_Δ les images inverses sur les frontières de C et Δ).

En effet, si $a \in \mu_C(\omega)$ et $b \in \mu_C(-\omega)$, alors $E(a, b)$ est le plus grand segment dans sa direction, avec les extrémités dans C, donc $a - b$ appartient à la frontière de Δ, à savoir $a - b \in \mu_\Delta(\omega)$; évidemment la longueur du segment $\{a - b\,;\ a \in \mu_C(\omega),\ b \in \mu_C(-\omega)\}$ est égale à la somme des longueurs de $\mu_C(\omega)$ et $\mu_C(-\omega)$.

Si $C \in \mathfrak{S}_2$ et $R_C(\omega)$ est le rayon de courbure de la frontière de C dans $\mu_C(\omega)$, alors $\Delta \in \mathfrak{S}_2$ [3] et on arrive au résultat connu [8] :

$$r_i = \max_{\omega \in S} \frac{R_C(\omega)}{R_\Delta(\omega)} = \frac{1}{2} \max_{\omega \in S} \frac{R_C(\omega)}{R_{\frac{\Delta}{2}}(\omega)}.$$

Mais la limite droite de prolongeabilité de la série linéaire $[C_0, C_\infty]$, où $C_0, C_\infty \in \mathfrak{S}_2$ est [6] :

$$\lambda_\infty = \max\left\{ \max_{\omega \in S} \frac{R_{C_0}(\omega)}{R_{C_\infty}(\omega)},\ 1 \right\}.$$

Donc nous pouvons énoncer le

*) La fonction Γ était définie autrement dans [7], mais l'expression à laquelle arrive le théorème 16 est la même.

THÉORÈME 6. *Le nombre de réductibilité d'un corps de* $\mathcal{S}_2$ *est la moitié de la limite droite de prolongeabilité de la série linéaire déterminée par ce corps et la moitié de son domaine vectoriel.*

7. *Congruence de droites attachée à un corps convexe tridimensionnel de* $\mathcal{S}_2$. Considérons dans l'espace euclidien E^3 la série linéaire $[C_0, C_\infty]$, où $C_0, C_\infty \in \mathcal{S}_2$. M. *P. Vincensini* a attaché [4] à cette série la congruence des droites $L(\mu_0(\omega), \mu_\infty(\omega))$, où μ_0 et μ_∞ sont les fonctions «images inverses» de C_0 et C_∞, ω variant sur S. Il est aussi connu que les deux nappes N_1 et N_2 de la surface focale de la congruence ne rencontrent pas les éléments de $[C_0, C_\infty]$ [4]. Mais cette série linéaire est prolongeable dans les deux sens [6]; soit λ_0, λ_∞ les limites de prolongeabilité. Alors

$$\bigcup_{i=1}^{2} N_i \cap \bigcup_{\lambda \notin [\lambda_0, \lambda_\infty]} C_\lambda = \emptyset,$$

mais

$$\bigcup_{i=1}^{2} N_i \cap \overline{\bigcup_{\lambda \notin [\lambda_0, \lambda_\infty]} C_\lambda} \neq \emptyset$$

[4], [8].

Soit maintenant $-C_\infty = C_0 = C$ et $\mathcal{C}^*$ la congruence attachée à $[C, -C]$. Alors, les nappes N_1 et N_2 sont, évidemment, symétriques : $-N_2 = N_1 = N^*$.

Attachons au corps C la congruence $\mathcal{C}$ des droites $L(\mu(\omega), \mu(-\omega))$, μ étant l'«image inverse» attachée à C. On voit que les droites des congruences $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^*$ se correspondent par une projection de centre 0. En outre, la correspondance se maintient entre N^* et la surface focale N de $\mathcal{C}$, telle que, si $f^* \in N^*$ et $f \in N$ sont deux foyers correspondants, alors il y a $\omega \in S$ pour lequel $f^* \in L(\mu(\omega), -\mu(-\omega))$, $f \in E(\mu(\omega), \mu(-\omega))$, $\|f^* - \mu(\omega)\| / \|f^* + \mu(-\omega)\| = \|f - \mu(\omega)\| / \|f - \mu(-\omega)\|$ (voir la démonstration du théorème 2).

Soient $\omega \in S, f_1^* \in N^* \cap L(\mu(\omega), -\mu(-\omega)), f_2^* \in -N^* \cap L(\mu(\omega), -\mu(-\omega))$ et $\Theta_\omega(\lambda) = 0$ l'équation du deuxième degré ayant comme racines $\lambda_i = \| f_i^* - \mu(\omega)\| / \|f_i^* + \mu(-\omega)\| \, (i = 1, 2)$. On a $\lambda_0 = \min \mathcal{R}$, où $\mathcal{R} = \{\bar{\lambda} ; \Theta_\omega(\bar{\lambda}) = 0, \omega \in S\}$ (voir [4] et la section 7 de [8]). Selon un résultat précédent, l'ensemble $\mathcal{R}$ peut aussi être écrit $\mathcal{R} = \{\|f - \mu(\omega)\| / \|f - \mu(-\omega)\| ; f \in N \cap E(\mu(\omega), \mu(-\omega)), \omega \in S\}$.

THÉORÈME 7. *Si le corps convexe tridimensionnel C appartient à* $\mathcal{S}_2$, *alors*

$$r_i = \min \{r ; C(r) \supseteq N\}.$$

En effet, soit $r \geqslant r_i$. Alors, sur chaque diamètre de C, N coupe un segment inclus dans le segment coupé par $\gamma(r)$ sur le même diamètre. Mais d'après le théorème 6 de [7], $\gamma(r)$ est la frontière de $C(r)$, donc $N \subseteq C(r)$.

Soit $r < r_i$. Il existe alors le point $p \in N$, tel que $p \in E(\mu(\omega), \mu(-\omega))$ pour un certain $\omega \in S$ et $\|p - \mu(\omega)\| / \|\mu(\omega) - \mu(-\omega)\| = r_i$. Considérons aussi sur $E(\mu(\omega), \mu(-\omega))$ le point q tel que $\|q - \mu(\omega)\| / \|\mu(\omega) - \mu(-\omega)\| = r$. Alors $q \in \gamma(r)$ et, selon le théorème 2 de [7], q

n'est pas situé à l'intérieur de $C(r)$. Par conséquent, p se trouve à l'extérieur de $C(r)$ et $N \not\subseteq C(r)$.

8. *Evaluation de r_i à l'aide des nombres de réductibilité des projections planes.* Soit C le corps convexe considéré à la section précédente, Π un plan arbitraire et C_Π la projection de C sur Π.

THÉORÈME 8. *Si r_i^Π est le nombre de réductibilité de C_Π, alors*

$$r_i = \max_{\Pi \subset E^3} r_i^\Pi.$$

En effet, notons m_Π la projection sur Π d'un point $m \in C$. Évidemment, le rapport déterminé par un foyer f de la congruence $\mathcal{C}$ sur un diamètre de C dont la projection est aussi un diamètre d de C_Π, et celui déterminé par f_Π sur d sont égaux. D'autre part, f_Π est le point limite des intersections de deux diamètres de C_Π, lorsque l'un tend vers l'autre et on obtient ainsi tous ces points limites, donc, si on utilise le théorème 12 de [7], on obtient $r_i^\Pi \leqslant r_i$.

Soit f' un foyer de $\mathcal{C}$ situé sur le diamètre $E(a, b)$, tel que $\|f' - a\| / \|a - b\| = r_i$. Choisissons le plan Π' parallèle à $L(0, \nu(a))$. Alors $f'_{\Pi'} \in E(a_{\Pi'}, b_{\Pi'})$ et $\|f'_{\Pi'} - a_{\Pi'}\| / \|a_{\Pi'} - b_{\Pi'}\| = r_i$, donc $r_i \leqslant r_i^{\Pi'}$. On conclut que $r_i = r_i^{\Pi'}$ et $r_i = \max\limits_{\Pi} r_i^\Pi$.

Il est possible que les résultats des dernières deux sections se généralisent pour des espaces à plusieurs dimensions et pour des corps à hypersurfaces moins régulières.

Reçu le 12 juillet 1965

Faculté de Mathématiques et
Mécanique de l'Université
de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. H. BUSEMANN, *Convex Surfaces.* Intersc. Tracts in Pure and Applied Math., 1958, **6**.
2. P. C. HAMMER, *Convex Bodies Associated with a Convex Body.* Proc. of the Amer. Math. Soc., 1951, **2**, *5*.
3. P. VINCENSINI, *Sur les domaines vectoriels des corps convexes.* Journ. de Math., publié par H. Villat, 1936, **15**.
4. — *Sur le prolongement des séries linéaires de corps convexes. Applications.* Rendic. del Circolo mat. di Palermo, 1936, **60**.
5. — *Sur une propriété des corps convexes de l'espace euclidien à n dimensions.* Comptes rendus de l'Acad. des Sc., 3 mai 1937.
6. — *Corps convexes. Séries linéaires. Domaines vectoriels.* Mémorial des Sc. Math., 1938, **94**.
7. T. ZAMFIRESCU, *Reducibility of Convex Bodies.* Proc. of the London Math. Soc. (à paraître).
8. — *Réductibilité et séries linéaires de corps convexes.* L'Enseignement math., 1966, **12**.
9. — *Sur les corps associés à un corps convexe.* Revue Roum. de math. pures et appl., 1966, **11**, *6*.