GAZETA MATEMATICĂ
SERIA A
PUBLICAŢIE PENTRU STUDIUL ŞI RĂSPÎNDIREA ŞTIINŢELOR MATEMATICE
Volumul LXXI * Nr. 11 Decembrie 1966

DOUĂ CARACTERIZĂRI ALE SIMPLEXELOR

TUDOR ZAMFIRESCU

1. Aparţinînd familiei corpurilor convexe (mulţimi convexe cu puncte interioare) mărginite, din spaţiul euclidian n-dimensional E_n, simplexele se bucură de multiple caracterizări; două dintre acestea vor fi expuse în cele ce urmează.

În [1], P. C. H a m m e r a făcut ipoteza că un corp convex mărginit este un simplex dacă centrul său de greutate divide $n-1$ corzi distincte în raportul $n/(n+1)$. De asemenea, el a demonstrat că dacă raportul critic r^*, introdus în [1], al unui corp convex mărginit este $n/(n+1)$, atunci corpul este un hipercon. V. L. K l e e a arătat în [2] că dacă pentru un corp convex mărginit, $r^* = n/(n+1)$, atunci corpul este chiar un simplex.

Vom demonstra ipoteza sus-menţionată a lui H a m m e r şi vom da o demonstraţie mai directă rezultatului obţinut de K l e e.

Notăm cu $[x, y]$ segmentul $\rho x + (1-\rho)y$, unde $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ şi cu $r(x, c)$ raportul $\max \{\|a-x\|, \|b-x\|\} / \|a-b\|$, unde $x \in c = [a,b]$.

Amintim că dacă $\mathcal{D}_x$ este fasciculul corzilor corpului convex mărginit C, care trec prin $x \in C$, atunci

$$r(x) = \max_{c \in \mathcal{D}_x} r(x, c)$$

şi

$$r^* = \min_{x \in C} r(x).$$

---

[3]) In "Buletinul Matematic al Societăţii române de ştiinţe", tom. 35–1935, pag. 5–10 (dedicat prof. D.Pompeiu şi Gh. Ţiţeica).

2. Vom demonstra acum

Teorema 1. *Corpul convex mărginit C este un simplex dacă și numai dacă există $n-1$ corzi distincte $c_1, \ldots, c_{n-1}$, astfel încît $r(g, c_i) = n/(n+1)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, unde g este centrul de greutate al lui C.*

Demonstrație. Dacă C este un simplex, atunci, evident, există cele $n-1$ corzi cu proprietatea din enunț. Reciproca este adevărată pentru $n = 1$, deoarece dacă există coarda c_1 astfel încît $r(g, c_1) = 2/3$, atunci C este un con bidimensional, adică un triunghi, conform teoremei II din [1].

Să presupunem că ea este adevărată în E_{n-1} și să o demonstrăm în E_n. Conform teoremei II din [1], dacă $r(g, [a, g']) = n/(n+1)$, unde $[a, g'] = c_{n-1}$, atunci C este un hipercon cu vîrful a și baza C'. Fie $\mathcal{F} C'$ frontiera lui C' în topologia hiperplanului său. Este clar că $c_i \cap \mathcal{F} C' \neq \emptyset$ $(i = 1, \ldots, n-2)$. Fie $x_i \in \mathcal{F} C'$ astfel încît $c_i = [x_i, y_i]$ și $z_i \in \mathcal{F} C'$ astfel încît $y_i \in [a, z_i]$ $(i = 1, \ldots, n-2)$. Să notăm $[x_i, z_i]$ cu c_i'. Este știut că g' este centrul de greutate al lui C'. Evident, corzile c_i' sînt distincte și $\bigcap_{i=1}^{n-2} c_i' = \{g'\}$.

Conform teoremei lui Menelaus,

$$\frac{\|g' - z_i\|}{\|x_i - z_i\|} \cdot \frac{\|y_i - x_i\|}{\|y_i - g\|} \cdot r(g, c_{n-1}) = 1,$$

unde $\|y_i - x_i\| / \|y_i - g\| = n + 1$ și $r(g, c_{n-1}) = n/(n+1)$, deci $\|g' - z_i\| / \|x_i - z_i\| = 1/n$ și $r(g', c_i') = (n-1)/n$. Urmează că C' este un simplex în hiperplanul său, deci C este un simplex în E_n.

3. Urmează o caracterizare a simplexelor cu ajutorul raportului critic.

Teorema 2. *Corpul convex mărginit C este un simplex dacă și numai dacă $r^* = n/(n+1)$.*

Demonstrație. Dacă C este un simplex, atunci este limpede că $r^* = n/(n+1)$.

Invers, dacă $r^* = n/(n+1)$, atunci există cel puțin o coardă c prin centrul de greutate g al lui C, astfel încît $r(g, c) = n/(n+1)$. Conform teoremei II din [1], C este un hipercon cu vîrful a și baza C'. În E_2, C este un triunghi și teorema este demonstrată. Să o presupunem adevărată în E_{n-1} și să o demonstrăm în E_n. Baza C' este o mulțime convexă $(n-1)$-dimensională. Fie k un punct interior al lui C' iar ε un număr satisfăcînd inegalitățile $(n+1)/2n \leqslant \varepsilon < 1$. Să considerăm punctul $k_\varepsilon \ni [a, k]$, astfel ca $r(k_\varepsilon, [a, k]) = \varepsilon n/(n+1)$. Există o coardă $[x_\varepsilon', y_\varepsilon'] \in k_\varepsilon$, astfel ca $\|k_\varepsilon - x_\varepsilon'\| / \|x_\varepsilon' - y_\varepsilon'\| \leqslant n/(n+1)$, deoarece $r(k_\varepsilon) \leqslant n/(n+1)$. Fie $x_\varepsilon \ni \ni \mathcal{F} C'$ astfel ca $x_\varepsilon' \in [a, x_\varepsilon]$, $y_\varepsilon \in [a, y_\varepsilon']$ astfel ca $k_\varepsilon \in d_\varepsilon = [x_\varepsilon, y]$ și $z_\varepsilon \in \mathcal{F} C'$ astfel ca $y_\varepsilon \in [a, z_\varepsilon]$. Evident, $k \in [x_\varepsilon, z_\varepsilon]$. Conform teoremei lui Menelaus,

$$\frac{\|k - z_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon - z_\varepsilon\|} \cdot \frac{\|y_\varepsilon - x_\varepsilon\|}{\|y_\varepsilon - k_\varepsilon\|} \cdot r(k_\varepsilon, [a, k]) = 1.$$

Evident,

$$r(k_\varepsilon, d_\varepsilon) = \frac{\|k_\varepsilon - x_\varepsilon\|}{\|y_\varepsilon - x_\varepsilon\|} \geqslant \frac{\|k_\varepsilon - x_\varepsilon'\|}{\|y_\varepsilon' - x_\varepsilon'\|} \geqslant \frac{n}{n+1},$$

deci $\|y_\varepsilon - x_\varepsilon\|/\|y_\varepsilon - k_\varepsilon\| \geqslant n + 1$. Prin urmare $\|k - z_\varepsilon\|/\|x_\varepsilon - z_\varepsilon\| \leqslant 1/\varepsilon n$ şi

$$r(k, d'_\varepsilon) \geqslant \frac{n - \frac{1}{\varepsilon}}{n},$$

unde $d'_\varepsilon = [x_\varepsilon, z_\varepsilon]$. Întrucît

$$\lim_{\varepsilon \to 1} \frac{n - \frac{1}{\varepsilon}}{n} = \frac{n-1}{n},$$

avem

$$\sup_{\varepsilon \in I} r(k, d'_\varepsilon) \geqslant \frac{n-1}{n}$$

unde

$$I = \left[\frac{n+1}{2n}, 1\right),$$

deci $r(k) \geqslant (n-1)/n$. Întrucît k a fost ales arbitrar în interiorul lui C', dacă r' este raportul critic al lui C', atunci $r'^{\star} \geqslant (n-1)/n$. Dar, conform tot teoremei II din [1] (pentru o generalizare la corpurile convexe nemărginite, vezi [3]), avem

$$\frac{1}{2} \leqslant r'^{\star} \leqslant \frac{n-1}{n}.$$

Prin urmare $r'^{\star} = (n-1)/n$ şi deci C' este un simplex în hiperplanul său iar C un simplex în E_n.

BIBLIOGRAFIE

1. *P. C. Hammer* ,,The centroid of a convex body'', Proc. Am. Math. Soc, vol. 2 (1951)
2. *V. L. Klee* ,,The critical set of a convex body'', Amer. J. Math, vol. 75 (1953)
3. *T. I. Zamfirescu* ,,Sur les corps associés à un corps convexe'', Revue R. Math. P. et Appl, vol. XI (1966)