ALTFEL DE PROBLEME

TUDOR ZAMFIRESCU

0. **Început.** Dacă „Euclid must go", atunci cu atît mai mult geometria triunghiului „must go". Dar poate cineva să ofere o mostră din ceva care să înlocuiască cu egal succes estetic (de care autorul crede că în învățămînt este neapărat nevoie) geometria triunghiului?

În cele ce urmează vom da cîteva definiții, vom schița cîteva proprietăți și vom rezolva cîteva probleme de geometrie metrică plană, una din pretendentele la succesiunea geometriei triunghiului în învățămîntul mediu.

Privim punctele, segmentele, pătratele, cercurile, ca mulțimi de puncte în plan. Deci elementele care compun mulțimile noastre sînt puncte din plan. Vom nota cu $E(a, b)$ segmentul care unește punctele a, b. De asemenea, notăm $F(a, b) = E(a, b) - \{a, b\}$. Cu aceste notații, de exemplu,

$$E(a, b) \cup E(b, c) \cup E(c, a)$$

este triunghiul de vîrfuri a, b, c. La fel, dacă $F(a_1, a_3) \cap F(a_2, a_4) \neq \emptyset$, atunci

$$\bigcup_{\substack{i=1 \\ (\text{mod } 4)}}^{4} E(a_i, \ a_{i+1}) = \bigcup_{i=1}^{3} E(a_j, \ a_{j+1}) \cup E(a_4, \ a_1)$$

reprezintă *patrulaterul convex* cu vîrfurile a_1, a_2, a_3, a_4.

Locuri geometrice înseamnă mulțimi de puncte desemnate nu printr-un recensămînt al lor, ci printr-o proprietate comună. Se notează cu

$$\{m : \text{relația } \mathfrak{R}\}$$

mulțimea acelor elemente m ale unui spațiu mai mare, care este subînțeles sau despre care s-a vorbit în context, pentru care relația $\mathfrak{R}$ este satisfăcută.

De pildă, în mulțimea numerelor întregi,

$$\{n : n > 0\}$$

înseamnă submulțimea numerelor naturale. Am mai putea spune că locul geometric al numerelor întregi n care verifică inegalitatea $n > 0$ este mulțimea numerelor naturale.

1. **Distanțe.** Fie $d(a, b)$ numărul care reprezintă distanța între a și b. El este un număr real pozitiv.

1) Dacă $d(a, b) = 0$, atunci $a = b$.

1') $d(a, a) = 0$, oricare ar fi punctul a în plan.

2) $d(a, b) = d(b, a)$ oricare ar fi punctele a și b în plan.

3) $d(a, b) + d(b, c) \geqslant d(a, c)$, oricare ar fi punctele a, b și c în plan.

Fie A și B două mulțimi de puncte în plan. Prin definiție, depărtarea $D(A, B)$ de la A la B este cel mai mic număr $d(a, b)$ (dacă el există) obținut cînd a și b parcurg independent mulțimile A și B, adică

$$D(A, \ B) = \min \{d(a, \ b) : \ a \in A, \ b \in B\}.$$

Cum $d(a, b)$ este totdeauna pozitiv, și $D(A, B)$ va fi un număr real pozitiv. De ce am scris în paranteză: „dacă el există"? Pentru că s-ar putea să nu existe; de exemplu, dacă $A = \{a\}$ și $B = E(b, c) - \{b\}$, a, b, c fiind puncte situate în această ordine pe o dreaptă din plan.

De acum nu vom discuta decît despre mulțimi pentru care depărtarea poate fi considerată.

Care dintre proprietățile distanței între două puncte se transmit depărtării între mulțimi?

1) $D(A, B) = 0$ nu implică $A = B$ (exemplificați).

1') $D(A, A) = 0$ (după cum observați de îndată).

2) $D(A, B) = D(B, A)$ (idem)

3) Nu avem în mod necesar $D(A, B) + D(B, C) \geqslant D(A, C)$ (exemplificați).

Proprietate. *Dacă mulțimea B este formată dintr-un singur punct b, atunci oricare ar fi mulțumile A și C în plan,*

$$D(A, B) + D(B, C) \geqslant D(A, C).$$

Demonstrație. Fie $a \in A$ și $c \in C$ astfel încît

$$D(A, B) = d(a, b)$$

și

$$D(B, C) = d(b, c).$$

Avem

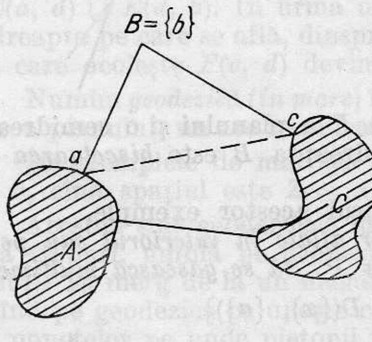
$$d(a, b) + d(b, c) \geqslant d(a, c),$$

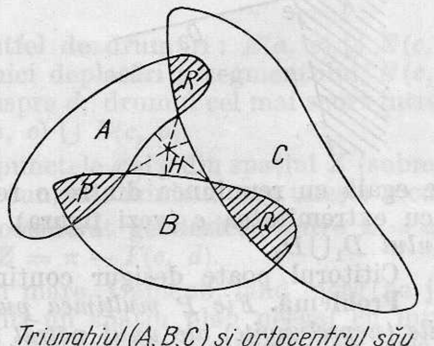
precum și

$$D(A, C) \leqslant d(a, c).$$

Rezultă inegalitatea

$$D(A, C) \leqslant D(A, B) + D(B, C).$$





Triunghiul (A, B, C) și ortocentrul său generalizat H

2. **Triunghiuri.** Fie A, B, C trei mulțimi în plan cu proprietățile

$$A \cap B = P \neq \varnothing,$$
$$B \cap C = Q \neq \varnothing,$$
$$C \cap A = R \neq \varnothing,$$
$$A \cap B \cap C = \varnothing.$$

Să numim (A, B, C) *triunghi de vîrfuri P, Q, R*. Desigur, un triunghi obișnuit nu este decît un caz particular al acestui tip generalizat de triunghi.

Pot fi centrul cercului înscris, centrul cercului circumscris, ortocentrul generalizate pentru (A, B, C)? Într-adevăr,

$$I = \{p : D(\{p\}, A) = D(\{p\}, B) = D(\{p\}, C)\}^{*}),$$
$$O = \{p : D(\{p\}, P) = D(\{p\}, Q) = D(\{p\}, R)\},$$
$$H = \{p : D(\{p\}, A) + D(\{p\}, B) + D(\{p\}, C) + D(\{p\}, P) + D(\{p\}, Q) + D(\{p\}, R) \text{ este minimă}\}$$

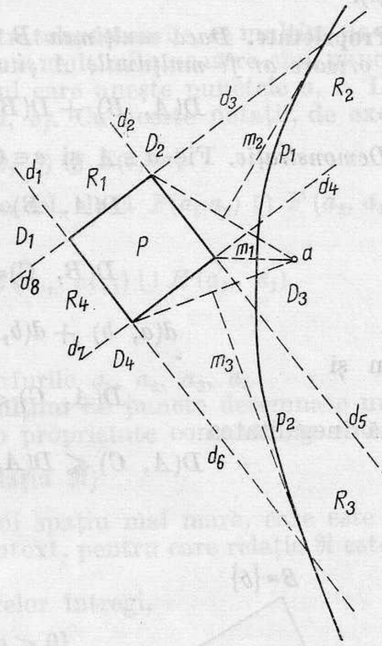
constituie generalizări potrivite.

Remarcăm însă că pentru un triunghi obtuzunghic ortocentrul astfel definit coincide cu vîrful unghiului obtuz.

3. **Locuri geometrice.** Fie a un punct şi Δ o dreaptă în plan. Atunci mulţimea plană

$$\{x : D(\{x\}, \{a\}) = D(\{x\}, \Delta)\}$$

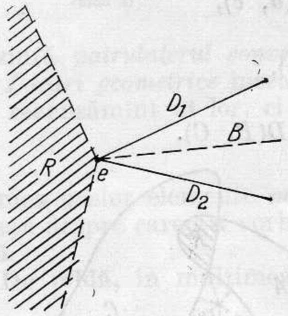
este *parabola de focar a şi directoare* Δ.



Numim *unghi* mulţimea formată din reuniunea a două semidrepte necolineare D_1, D_2, avînd aceeaşi extremitate e.

Mulţimea

$$\{x : D(\{x\}, D_1) = D(\{x\}, D_2)\}$$



este egală cu reuniunea dintre o regiune R a planului şi o semidreaptă B cu extremitatea e (vezi figura). Semidreapta B este *bisectoarea unghiului* $D_1 \cup D_2$.

Cititorul poate desigur continua şirul acestor exemple.

Problemă. *Fie P mulţimea punctelor aflate în interiorul sau pe laturile (neprelungite) ale unui pătrat şi $a \notin P$. Să se găsească mulţimea*

$$L = \{x : D(\{x\}, P) = D(\{x\}, \{a\})\}.$$

Rezolvare. Utilizînd notaţiile din figură, avem fie $a \in \bigcup_{i=1}^{4} D_i$, fie $a \in \bigcup_{i=1}^{4} R_i$, fie $a \in \bigcup_{i=1}^{8} d_i$. Să presupunem, de exemplu, că $a \in D_3$, celelalte cazuri tratîndu-se analog. Dacă $x \in D_3$, atunci x trebuie să se afle pe mediatoarea m_1 a segmentului ce uneşte a cu vîrful lui P cel mai apropiat,

* Conform cu notaţia introdusă la punctul 1, I este mulţimea punctelor p cu proprietatea că distanţele de la p la A, la B şi la C sînt egale.

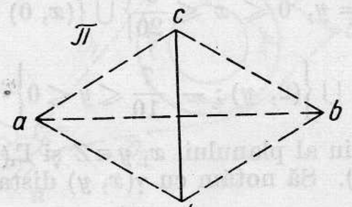
adică $d_4 \cap d_5$. În R_2, x trebuie să se găsească pe parabola p_1 de focar a şi avînd ca directoare dreapta ce conţine d_2. În D_2, x trebuie să se afle pe mediatoarea m_2 a segmentului ce uneşte a cu $d_2 \cap d_3$. În R_3, x aparţine parabolei p_2 de focar a şi avînd ca directoare dreapta ce conţine d_4, iar în D_4, $x \in m_3$, unde m_3 este mediatoarea segmentului ce uneşte a cu $d_6 \cap d_7$. Mulţimea căutată (locul geometric) este deci

$$L = (m_1 \cap D_3) \cup (p_1 \cap R_2) \cup (m_2 \cap D_2) \cup$$

$$\cup (p_2 \cap R_3) \cup (m_3 \cap D_4).$$

4. **Geodezice în mic şi în mare.** Noţiunea de geodezică este strîns legată de cea de distanţă. Vrem să dezvăluim aici în limbajul şi la nivelul învăţămîntului de liceu legătura intimă şi naturală dintre ele.

Fie în planul π două puncte a şi b. Drumul cel mai scurt (arcul de curbă rectificabil de lungime minimă) între a şi b este segmentul $E(a, b)$. Să presupunem acum că între a şi b se află un segment $E(c, d)$ perpendicular pe $E(a, b)$ astfel încît a, c, b, d sînt vîrfurile unui romb. Care este acum drumul cel mai scurt între a şi b care nu traversează interiorul



segmentului $E(c, d)$? Există două astfel de drumuri: $E(a, c) \cup E(c, b)$ şi $E(a, d) \cup E(d, b)$. În urma unei mici deplasări a segmentului $E(c, d)$ pe dreapta pe care se află, dinspre c înspre d, drumul cel mai scurt între a şi b care ocoleşte $F(c, d)$ devine $E(a, c) \cup E(c, b)$.

Numim *geodezică (în mare)* între punctele x şi y din spaţiul Z (submulţime a planului) un arc rectificabil de lungime minimă care uneşte x cu y.

În exemplele de mai sus am considerat geodezicele între $x = a$ şi $y = b$, cînd spaţiul este $Z = \pi$ sau $Z = \pi - F(c, d)$.

Acestea sînt geodezicele luate în mare. Oamenii, cînd merg (pe jos) după treburi, umblă pe geodezice (într-un spaţiu plan neegal cu întreg planul). Ei merg de la un magazin la altul, nu luînd-o drept prin case, ci călcînd pe geodezica ce uneşte cele două magazine şi este socotită în spaţiul punctelor pe unde pietonii pot călca.

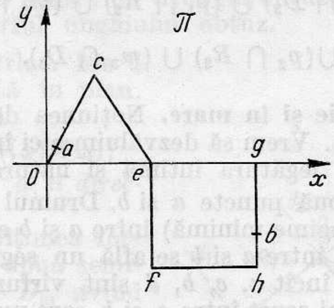
Problemă. *Fie în planul π raportat la un sistem xOy de axe rectangulare punctele $a\left(\frac{3}{20}, \frac{3\sqrt{3}}{20}\right)$ şi $b\left(2, -\frac{7}{10}\right)$, triunghiul (cu interiorul T) de vîrfuri $O(0, 0)$, $c\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $e(1, 0)$ şi patratul (cu interiorul P) de vîrfuri e, $f(1, -1)$, $g(2, 0)$, $h(2, -1)$. Să se scrie ecuaţia geodezicei (în mare) care uneşte pe a cu b în spaţiul $\pi - (T \cup P)$.*

18

Rezolvare. Calculînd

$$\alpha = d(a,\ c) + d(c,\ g) + d(g,\ b),$$
$$\beta = d(a,\ O) + d(O,\ g) + d(g,\ b),$$
$$\gamma = d(a,\ O) + d(O,\ f) + d(f,\ h) + d(h,\ b),$$

găsim că $\beta = \min\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$, deci geodezica (în mare) se scrie



$$\left\{(x,\ y) : x\sqrt{3} = y,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{20}\right\} \cup \{(x,\ 0) : 0 < x < 2\} \cup$$
$$\cup \left\{(2,\ y) : -\frac{7}{10} \leqslant y \leqslant 0\right\}.$$

Fie Z un subspaţiu al planului, $x,\ y \in Z$ şi $\Gamma_\iota(x,\ y)$ geodezicele care unesc pe x cu $y\,(\iota \in \Lambda)$*). Să notăm cu $\gamma(x,\ y)$ distanţa între x şi y măsurată pe $\Gamma_\iota(x,\ y)$.

Ca şi distanţa obişnuită $d(x,\ y)$ din plan, $\gamma(x,\ y)$ are proprietăţile:

1) dacă $\gamma(x,\ y) = 0$, atunci $x = y$,

1′) $\gamma(x,\ x) = 0$ oricare ar fi $x \in Z$,

2) $\gamma(x,\ y) = \gamma(y,\ x)$ oricare ar fi $x,\ y \in Z$,

3) $\gamma(x,\ y) + \gamma(y,\ z) \geqslant \gamma(x,\ z)$ oricare ar fi $x,\ y,\ z \in Z$.

Proprietate.

$$\{z' \in Z : \gamma(x,\ z') + \gamma(z',\ y) = \min_{z \in Z}\,(\gamma(x,\ z) + \gamma(z,\ y))\} = \bigcup_{\iota \in \Lambda} \Gamma_\iota(x,\ y).$$

Lăsăm demonstraţia în seama cititorului.

Se numeşte *sferă* de centru a şi rază r mulţimea

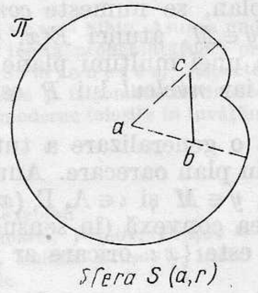
$$S(a,\ r) = \{x \in Z : \gamma(x,\ a) \leqslant r\}.$$

Dacă $a,\ b,\ c$ sînt puncte necolineare în planul π, atunci, în $Z = \pi - F(b,\ c)$, sfera $S(a,\ r)$ cu $r > \max\{d(a,\ b),\ d(a,\ c)\}$ este interiorul unui domeniu mărginit de trei arce de cerc şi, eventual, un segment (vezi figura de pe pagina din dreapta).

5. Să trecem acum la geodezicele privite în mic. Să considerăm pentru aceasta un gîndac. Deşi poate părea curios, gîndacul ne va da un aju-

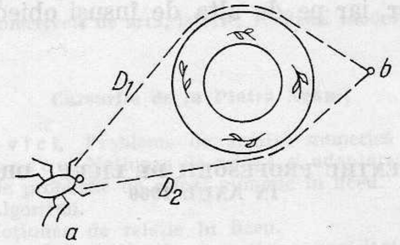
* Cu Λ am notat mulţimea din care am cules indicii ι care deosebesc între ele geodezicele.

tor prețios în înțelegerea noțiunii de geodezică în mic. Să zicem că gîndacul nu vede bine, este miop. Dar, atît cît vede, merge pe drumul cel mai scurt;



cu alte cuvinte există o vecinătate a gîndacului în care acesta merge pe o geodezică în mare.

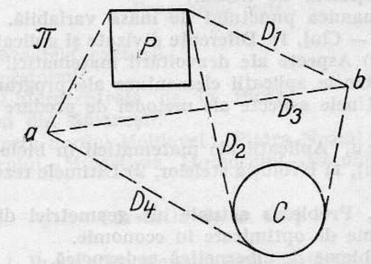
De pildă, un gîndac care merge pe figura de mai jos, dar vrea să ocolească farfuria, va putea să se deplaseze între a și b atît pe drumul



Gîndacul stă în cumpănă

D_1 cît și pe drumul D_2. În ambele cazuri el încearcă să parcurgă drumul de lungime minimă, dar posibilitățile sale vizuale pot să nu-i permită aceasta. În orice caz însă, el merge pe ceea ce vom numi geodezică în mic.

Numim *geodezică (în mic)* un arc rectificabil Γ astfel încît, oricare



ar fi $z \in \Gamma$, există o sferă de centru z, astfel ca porțiunea din arc aflată în această sferă să fie o geodezică (în mare).

Este evident acum că orice geodezică în mare este în același timp și o geodezică în mic, nu și reciproc.

Pe figura de mai sus, toate drumurile D_1, D_2, D_3, D_4 sînt geodezice în mic între a și b în $\pi - P - C$. (Acestea sînt toate? Nu, pornind pe D_4, de exemplu, putem ocoli cercul în sens trigonometric de un număr de ori şi apoi să continuăm drumul pe D_4).

6. **Convexitate.** În plan, se numeşte *convexă* orice mulţime M cu proprietatea că dacă $x, y \in M$, atunci $E(x, y) \subset M$.

Acoperirea convexă a unei mulţimi plane P este mulţimea convexă minimală care conţine P iar *nucleul* lui P este $\{x :$ pentru orice $y \in P, E(x, y) \subset P\}$*).

Se poate da imediat o generalizare a tuturor acestor noţiuni utilizînd geodezicele unui spaţiu plan oarecare. Anume, mulţimea M este convexă dacă pentru orice $x, y \in M$ şi $\iota \in \Lambda$, $\Gamma_\iota(x, y) \subset M$; acoperirea convexă a lui P este mulţimea convexă (în sensul admis) minimală care include P iar nucleul lui P este $\{x :$ oricare ar fi $y \in P, \bigcup_{\iota \in \Lambda} \Gamma_\iota(x, y) \subset P\}$.

7. **Sfîrşit.** Exemple frumoase se pot da şi foarte multe exerciţii la fel de frumoase se pot propune elevilor utilizînd acest material sau altele asemănătoare. După părerea autorului, în locul algebrizării geometriei, cerută de unii atît de insistent, dar la fel de insistent respinsă de alţii, o apropiere mai pronunţată de topologie şi în primul rînd o studiere mai îngrijită a aspectelor metrice sînt mai apropiate pe de o parte de puterea de înţelegere a elevilor, iar pe de alta de însuşi obiectul înlocuit, geometria sintetică.