ZAMFIRESCO, T.
Math. Zeitschr. 95, 20–33 (1967)

Sur la réductibilité des corps convexes

TUDOR ZAMFIRESCO

Reçu le 17 Mai 1966

§ 1. Introduction

En 1951, HAMMER a défini les corps associés à un corps convexe et la notion de réductibilité [*4*]. C'est de cette notion que traite le travail actuel.

Après les rappels du § 2, le § 3 donne une étude aussi complète que possible de la frontière des corps associés réductibles.

Dans [*11*] nous avons établi des conditions nécessaires pour qu'un corps convexe soit réductible, conditions concernant ses projections. Nous allons ici (§ 4) améliorer ces résultats, en établissant de telles conditions – à la fois nécessaires et suffisantes.

Dans [*12*] nous avons observé le caractère commun de la réductibilité d'un corps convexe et la prolongeabilité d'une certaine série linéaire. Mais les méthodes différentielles utilisées dans [*12*] ont imposé des restrictions assez sévères sur les frontières des corps envisagés. Une grande amélioration a été apportée à cet égard dans [*14*], où cependant la convexité stricte pour les corps au moins tri-dimensionnels était encore exigée. Le but du § 5 est de donner une démonstration dans le cas le plus général.

Le § 6, en envisageant les dimensions des images inverses sur les hypersurfaces réductibles, donne une amélioration d'un théorème de [*13*].

Les deux derniers paragraphes concernent la réductibilité de deux classes spéciales de corps convexes: les polyèdres convexes et les voisinages des corps convexes.

Le travail embrasse des domaines assez différents, qui se trouvent liés entre eux par la notion de réductibilité, qui se manifeste partout.

Ayant surtout en vue l'aspect géométrique des problèmes qui nous intéressent, les méthodes de la géométrie différentielle ne seront pas applicables, et cela explique le caractère, parfois un peu compliqué, des raisonnements qui seront faits.

§ 2. Définitions et notations

Soient E^n l'espace euclidien à n dimensions, $\mathscr{K}^n$ la famille des corps convexes compacts n-dimensionnels, S^n l'hypersphère unitaire n-dimensionnelle de E^{n+1}.

Désignons ([*2*], p. 2):

$$E(a,b)=(1-\rho)\,a+\rho\,b \qquad (0\leqq\rho\leqq 1),$$
$$R(a,b)=(1-\rho)\,a+\rho\,b \qquad (0\leqq\rho<\infty),$$
$$L(a,b)=(1-\rho)\,a+\rho\,b \qquad (-\infty<\rho<\infty).$$

Les signes « + » et « − » désignent la somme et la différence conçues comme dans un espace vectoriel, « ∼ » signifiant « $\cap \complement$ ».

Les signes « $\subset$ » et « $\supset$ » concernent l'inclusion stricte tandis que « $\subseteq$ » et « $\supseteq$ » incluent la possibilité de l'égalité.

Si $C \in \mathscr{K}^n$, alors $\tilde{C}$ signifie la frontière, $\ddot{C}$ le profil ([*1*], p. 159), $\dot{C}$ l'ensemble des points exposés et $\|C\|$ la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle de C.

Si $M \subset E^n$, alors $[M]$ désigne l'enveloppe convexe de M et $\overline{M}$ sa fermeture; tout ensemble

$$K(M, \rho) = \{x;\ \inf_{y \in M} \|E(x, y)\| \leqq \rho\},$$

où $\rho > 0$, est appelé voisinage de M ([*3*], p. 2).

Soient $C \in \mathscr{K}^n$ et r un nombre réel. Les ensembles

$$C(r) = \begin{cases} \bigcap_{b \in \tilde{C}} b + r(C - b) & \text{si } r \leqq 1, \\ \bigcup_{b \in \tilde{C}} b + r(C - b) & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

sont appelés corps associés à C ([*4*], p. 782).

Il est connu que ces corps ne sont pas vides si r dépasse suffisamment $\frac{1}{2}$ et qu'ils sont convexes [*4*], [*13*]. Il existe aussi [*4*] un nombre r_C tel que

$$C = \big(C(r)\big)\big(r/(2r-1)\big) \quad \text{si } r > r_C,$$

et

$$C \supset \big(C(r)\big)\big(r/(2r-1)\big) \quad \text{si } r < r_C;$$

ce nombre s'appelle nombre de réductibilité de C [*11*].

On dit que C et $\tilde{C}$ sont réductibles si $r_C < 1$, complètement réductibles si $r_C = \frac{1}{2}$ et irréductibles si $r_C = 1$ ([*4*], p. 791).

Les hypersurfaces $\gamma(r)$ et $\delta(r)$ attachées au corps convexe $C \in \mathscr{K}^n$ dans [*11*], seront ici notées par $\gamma_C(r)$ et $\delta_C(r)$.

ν_C et μ_C désigneront les fonctions «image sphérique» et «image inverse» correspondant à $\tilde{C}$ ([*2*], p. 25, [*11*], [*13*]).

Soit $V \subset E^n$ une variété linéaire. Alors x_V signifie la projection de $x \in E^n$ sur V,

$$A_V = \{x_V;\ x \in A \subset E^n\}, \quad b^V = \{x \in E^n;\ x_V = b \in V\} \quad \text{et} \quad B^V = \{b^V;\ b \in B \subset V\}.$$

Si C_0, $C_\infty \in \mathscr{K}^n$, alors le générateur C_λ de la série linéaire $[C_0, C_\infty]$ s'écrit ([*3*], p. 80):

$$C_\lambda = \frac{C_0 - \lambda C_\infty}{1 - \lambda}.$$

Les lettres λ_0 et λ_∞ signifient les limites gauche et, respectivement, droite de prolongeabilité de la série linéaire $[C_0, C_\infty]$ [*9*], [*12*].

La série linéaire $[C, -C]$ sera appelée série attachée au corps convexe C.

Nous allons nous appuyer dans les §§ 3, 4 sur le résultat suivant de STRASZEWICZ [7] (voir aussi [5]):

Si C est un corps convexe compact de E^n, alors $\ddot{C} \subset \bar{\dot{C}}$ et $C = \overline{[\dot{C}]}$.

§ 3. Hypersurface associée

Soient $C \in \mathscr{K}^n$ et $r > \frac{1}{2}$. Alors

$$\varepsilon_C(r) = \begin{cases} \bigcup\limits_{\omega \in S^{n-1}} \bigcap\limits_{p \in \mu_C(\omega)} (p + r(\mu_C(-\omega) - p)) & \text{si } r \leqq 1, \\ \bigcup\limits_{\substack{\omega \in S^{n-1} \\ p \in \mu_C(\omega)}} (p + r(\mu_C(-\omega) - p)) & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

est une hypersurface associée à C, généralisant la courbe $\varepsilon(r)$ introduite pour les corps plans dans [11]. HAMMER annonce dans [4] qu'il généralise les diamètres essentiels dans E^3. Si d était un tel diamètre alors $\varepsilon_d(r)$ devrait être situé sur $\varepsilon_C(r)$.

Théorème 1. *On a $r \geqq r_C$ si et seulement si $\varepsilon_C(r) = \widetilde{C(r)}$.*

Démonstration. Si $r \geqq 1$, alors, évidemment,

$$\bigcup_{p \in \mu_C(\omega)} (p + r(\mu_C(-\omega) - p)) \subset \widetilde{C(r)},$$

pour tout $\omega \in S^{n-1}$, d'où $\varepsilon_C(r) \subseteq \widetilde{C(r)}$.

Le théorème 1 de [11] précise que $\gamma_C(r) \supseteq \widetilde{C(r)}$. Mais, si $r \geqq 1$, $\varepsilon_C(r) = \gamma_C(r)$, donc l'inclusion contraire est vraie et

$$\varepsilon_C(r) = \widetilde{C(r)}.$$

Démontrons que $r_C \leqq r < 1$ implique $\varepsilon_C(r) = \widetilde{C(r)}$. Certainement, $\widetilde{C(r)} \subseteq \varepsilon_C(r)$, donc il nous reste à prouver l'inclusion contraire. Supposons que $x \notin \widetilde{C(r)}$. Si $x \notin \gamma_C(r)$, la démonstration est immédiate, car $\varepsilon_C(r) \subseteq \gamma_C(r)$ implique $x \notin \varepsilon_C(r)$; la démonstration est moins simple si $x \in \gamma_C(r)$. Dans ce dernier cas, d'après le théorème 5 de [11], $r \geqq r_C$ implique $\gamma_C(r) = \delta_C(r)$, donc x appartient à un G_D^i (renoté $G_D^i(r)$ pour souligner la dépendance de r), dont l'intersection avec $\widetilde{C(r)}$ n'est pas vide (voir les notations de [11]). Soient H_1 et H_2 deux hyperplans tels que

a) H_1 soit parallèle à un hyperplan d'appui contenant D,

b) $x \in H_1$ et

c) x et $C(r)$ soient séparés par H_2.

Les hyperplans H_1 et H_2 ne sont pas parallèles car

$$G_D^i(r) \cap \widetilde{C(r)} \neq \emptyset.$$

Soit Π un plan orthogonal à la variété linéaire $(n-2)$-dimensionnelle $H_1 \cap H_2$. La réductibilité de C implique la réductibilité de C_Π, en vertu du théorème 3 de [11]. En outre, on déduit de la démonstration de ce même théorème que

$$C_\Pi(r) = C(r)_\Pi$$

pour tout $r \geqq r_C$. Ainsi, le point x_Π se trouve à l'extérieur de $C_\Pi(r)$.

Considérons $\omega \in S^{n-1}$ tel que $L(0, \omega)$ soit orthogonale à H_1 et que C et S^{n-1} soient également situés par rapport à H_1 et à l'hyperplan tangent à S^{n-1} en ω.

Soit $d = H_1 \cap C_\Pi(r)$. Il est connu [11] que $\varepsilon_{C_\Pi}(r)$ coïncide à la frontière de $C_\Pi(r)$. Donc

$$d = H_1 \cap \varepsilon_{C_\Pi}(r).$$

Mais la courbe $\varepsilon_{C_\Pi}(r)$, dont l'étude a été faite dans [11], mais dont l'introduction avait été fortement suggérée par [4], contient d comme un segment maximal, donc

$$d = \bigcap_{p \in \mu_{C_\Pi}(\omega)} (p + r(\mu_{C_\Pi}(-\omega) - p)).$$

Comme $d^\Pi = \{x;\, x_\Pi \in d\}$, on a

$$d^\Pi = \bigcap_{p \in (\mu_{C_\Pi}(\omega))^\Pi} (p + r((\mu_{C_\Pi}(-\omega))^\Pi - p)) = \bigcap_{p \in \mu_C(\omega)} (p + r((\mu_{C_\Pi}(-\omega))^\Pi - p)).$$

Mais $(\mu_{C_\Pi}(-\omega))^\Pi \supset \mu_C(-\omega)$, donc, si nous posons

$$s_C^\omega(r) = \bigcap_{p \in \mu_C(\omega)} (p + r(\mu_C(-\omega) - p)),$$

$$d^\Pi \supset s_C^\omega(r).$$

Nous avons trouvé que $x_\Pi \notin C_\Pi(r)$, donc $x_\Pi \notin d$ et $x \notin d^\Pi$. Alors, l'inclusion ci-dessus montre que $x \notin s_C^\omega(r)$.

On a

$$s_C^\omega(r) \subset \gamma_C(r) = \delta_C(r),$$

d'où on déduit facilement que chaque droite $L(0, \omega)$, telle que $\omega \in S^{n-1}$ et $x \in s_C^\omega(r)$, est orthogonale à la variété linéaire déterminée par un ensemble $G_D^i(r)$ contenant x. Donc

$$x \notin \bigcup_{\omega \in S^{n-1}} s_C^\omega(r) = \varepsilon_C(r)$$

et

$$\varepsilon_C(r) = \widetilde{C(r)}.$$

Supposons maintenant que $\varepsilon_C(r) = \widetilde{C(r)}$. Le cas $r \geqq 1$ est banal, car $1 \geqq r_C$; il reste donc à étudier le cas $r < 1$. Soit x un point exposé de C. Choisissons $u \in \nu_C(x)$ tel que $\mu_C(u) = x$. Désignons par y un point extrêmal de $\mu_C(-u)$. Si $y \in \dot{C}$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il y a $\alpha_\varepsilon \in \nu_C(y)$ tel que $\| E(\alpha_\varepsilon, -u) \| < \varepsilon$. Evidemment, si $\varepsilon\to 0$, alors $q(\alpha_\varepsilon)\to x$, pour tout $q(\alpha_\varepsilon)\in\mu_C(-\alpha_\varepsilon)$. Mais

$$y+r\big(\mu_C(-\alpha_\varepsilon)-y\big)\subset\varepsilon_C(r)=\widetilde{C(r)}$$

pour tout $\varepsilon>0$; aussi, lorsque $\varepsilon\to 0$,

$$y+r\big(q(\alpha_\varepsilon)-y\big)\to y+r(x-y),$$

d'où $y+r(x-y)\in\widetilde{C(r)}$, $\widetilde{C(r)}$ étant topologiquement fermé.

Si $y\notin\dot{C}$, alors, pour tout $\varepsilon>0$, il y en a un point $z_\varepsilon\in\dot{C}$, tel que $\|E(\beta_\varepsilon, -u)\|<\varepsilon$ pour un $\beta_\varepsilon\in\nu_C(z_\varepsilon)$ convenable. Evidemment, $\varepsilon\to 0$ implique $q(\beta_\varepsilon)\to x$, pour tout $q(\beta_\varepsilon)\in\mu_C(-\beta_\varepsilon)$ et on arrive de façon analogue à

$$y+r(x-y)\in\widetilde{C(r)}.$$

D'après la définition de $\varepsilon_C(r)$,

$$\bigcap_{p\in\mu_C(u)}\big(p+r(\mu_C(-u)-p)\big)\subset\varepsilon_C(r)=\widetilde{C(r)},$$

donc

$$x+r(y-x)\in x+r\big(\mu_C(-u)-x\big)\subset\widetilde{C(r)}.$$

Mais

$$\{x+r(y-x), y+r(x-y)\}\subset\widetilde{C(r)}$$

implique

$$x\in\big(C(r)\big)\big(r/(2r-1)\big).$$

Comme $(C(r))(r/(2r-1))$ est convexe et fermé, il résulte que

$$C=\big[\overline{\dot{C}}\big]\subseteq\big(C(r)\big)\big(r/(2r-1)\big),$$

c.-à-d. que $r\geqq r_C$.

§ 4. Condition nécessaire et suffisante pour la réductibilité, satisfaite par les projections

Soient $C\in\mathscr{K}^n$ et m un nombre entier tel que $1<m<n$.

Théorème 2. *Le nombre de réductibilité r_C de C satisfait à l'égalité*

$$r_C=\sup_{\iota\in A} r_{C_{V_\iota}},$$

où $V_\iota(\iota\in A)$ sont les sous-espaces à m dimensions de E^n.

Démonstration. Soit $p\in\dot{C}$. Dans un hyperplan d'appui H de C, dont le contact avec C est formé du seul point p, soient $W_1,\ldots,W_\nu$ des variétés linéaires à $n-m$ dimensions qui déterminent p. Pour que le point p soit bien déterminé il faut que

$$\nu(n-m)-(\nu-1)(n-1)\leqq 0,$$

donc $\nu\geqq(n-1)/(m-1)$.

Soit V_i un sous-espace linéaire m-dimensionnel orthogonal à W_i ($i=1, \ldots, \nu$). Évidemment, p_{V_i} est un point exposé de C_{V_i}. D'après les théorèmes 4 et 7 de [13], $p_i' = \mu_{C_{V_i}}(-\nu_{C_{V_i}}(p_{Vi}))$ est un point exposé de C_{Vi}. L'hyperplan d'appui H', parallèle à H, mais situé de l'autre côté de C, se projète sur V_i d'après une variété linéaire $(m-1)$-dimensionnelle contenant p_i'. Donc,

$$C \cap H' \subset p_i'^{V_i};$$

comme

$$C \cap H \neq \emptyset$$

et $\bigcap_{i=1}^{\nu} p_i'^{V_i}$ est au plus un point p',

$$C \cap H' = p',$$

donc p' est lui aussi un point exposé de C. Notons $a = p + r(p' - p)$ et $a' = p' + r(p - p')$.

Soit

$$r = \sup_{i \in A} r_{C_{V_i}}.$$

Démontrons que

$$a \in x + r(C - x)$$

pour tout $x \in \tilde{C}$. Supposons le contraire, par absurde. Alors, il y a un point $x' \in \tilde{C}$ et un hyperplan Π tels que a et $x' + r(C - x')$ soient séparés par Π. Soit Π' l'hyperplan contenant a, parallèle à H. Considérons une variété linéaire m-dimensionnelle V orthogonale à H et Π', c.à-d. contenant un plan orthogonal à $H \cap \Pi'$. Evidemment,

$$a_V \in x_V' + r(C_V - x_V')$$

et $x_V' \in C_V$. Soit

$$b = R(a_V, x_V') \cap \widetilde{C_V}.$$

On a certainement,

$$a_V \notin b + r(C_V - b).$$

Mais,

$$a_V = p_V' + r(p_V - p_V') \in \varepsilon_{C_V}(r),$$

d'où

$$\varepsilon_{C_V}(r) \neq \widetilde{C_V(r)},$$

donc, d'après le théorème 1, $r < r_{C_V}$, inégalité qui vient en contradiction avec notre choix de r.

Par conséquent $a \in C(r)$. Comme p' est, lui aussi, un point exposé, $a' \in C(r)$, donc

$$p \in E(a, a')\big(r/(2r-1)\big) \subset C(r)\big(r/(2r-1)\big).$$

Il résulte donc

$$\dot{C} \subseteq C(r)\big(r/(2r-1)\big),$$

d'où

$$C = C(r)\big(r/(2r-1)\big).$$

Cette relation démontre l'inégalité

$$r_C \leqq \sup_{\iota \in A} r_{C_{V_\iota}}.$$

Supposons que

$$r_C < \sup_{\iota \in A} r_{C_{V_\iota}}.$$

Choisissons alors un sous-espace V_α à m dimensions, tel que

$$r_C < r_{C_{V_\alpha}} < \sup_{\iota \in A} r_{C_{V_\iota}}.$$

D'après le théorème 3 de [*11*], la réductibilité de $C(r_{C_{V_\alpha}})$ implique la réductibilité de sa projection sur V_α; de la démonstration de ce même théorème on déduit que

$$C(r_{C_{V_\alpha}})_{V_\alpha} = C_{V_\alpha}(r_{C_{V_\alpha}}).$$

On obtient ainsi une contradiction, puisque $C_{V_\alpha}(r_{C_{V_\alpha}})$ est irréductible. La démonstration est terminée.

Soulignons qu'il est nécessaire, mais non pas suffisant pour la réductibilité de C que toutes ses projections C_{V_ι} soient réductibles. Pour assurer la suffisance il faut donc ajouter que

$$\sup_{\iota \in A} r_{C_{V_\iota}} < 1.$$

§ 5. La liaison entre la classe de réductibilité et la série linéaire attachée

Les recherches sur les séries linéaires, introduites par BRÜNN en 1877, ont en grande partie porté sur des inégalités entre volumes. Mais par la suite on a aussi envisagé des problèmes très intéressants concernant la prolongeabilité de ces mêmes séries. Sur ce sujet, de complets et bien originaux résultats se trouvent dans les travaux de VINCENSINI [*8*], [*9*].

Du point de vue de la géométrie différentielle, l'homothétie entre les éléments de la classe de réductibilité et ceux de la série linéaire attachée, a été déjà complètement établie dans [*12*]; la même question, posée d'une manière non différentielle, va reçevoir ici une solution complète.

Théorème 3. *Le corps associé $C(r)$ de la classe de réductibilité du corps $C \in \mathscr{K}^n$ et l'élément $C_{(1-r)/r}$ de la série linéaire attachée prolongée coïncident à une homothétie près, le rapport d'homothétie étant $2r-1$.*

Démonstration. Considérons le cas $r \geqq 1$. On déduit du théorème 3 de [*10*] que

$$C(r) = (1-r)\,C + r\,C = r\,C + (r-1)(-C)$$

ou

$$C(r) = (2r-1)\big((r/(2r-1))\,C + ((r-1)/(2r-1))(-C)\big).$$

Mais

$$(r/(2r-1))\,C + \big((r-1)/(2r-1)\big)(-C) = C_{(1-r)/r},$$

d'où

$$C(r)=(2r-1)\,C_{(1-r)/r}.$$

Etudions le cas $r<1$. Puisque $C(r)$ appartient à la classe de réductibilité de C,

$$C(r)\big(r/(2r-1)\big)=C.$$

Mais $r/(2r-1)>1$, donc [10]:

$$\big(1-r/(2r-1)\big)\,C(r)+\big(r/(2r-1)\big)\,C(r)=C,$$

ce qui s'écrit encore

$$\big(1/(2r-1)\big)\big(r\,C(r)+(1-r)\,(-C(r))\big)=C,$$

ou bien, puisque

$$r\,C(r)+(1-r)\big(-C(r)\big)=C(r)_{(r-1)/r},$$

$$C(r)_{(r-1)/r}=(2r-1)\,C.$$

Donc

$$C(r)=\big(C(r)_{(r-1)/r}\big)_{-(r-1)/r}=\big((2r-1)\,C\big)_{-(r-1)/r}=(2r-1)\,C_{(1-r)/r}$$

achève la démonstration.

On peut faire noter la relation, de déduction aisée, entre r_C et λ_0 ou λ_∞ (les limites gauche et droite de prolongeabilité de la série linéaire attachée) exprimée par:

$$r_C=\frac{1}{1+\lambda_0}=\frac{\lambda_\infty}{1+\lambda_\infty}.$$

Soit Δ le domaine vectoriel $C-C$ de C. Alors Δ est aussi le domaine vectoriel de $C_{(1-r)/r}$ ([9], p. 47) et, en vertu de l'inégalité bien connue de Brünn-Minkowski, on a ([3], p. 101):

$$2^n\,\|C_{(1-r)/r}\|\leqq\|\Delta\|,$$

avec égalité si C est symétrique. Mais, d'après un résultat de Rogers et Shephard [6],

$$\|\Delta\|\leqq\binom{2n}{n}\,\|C\|,$$

avec égalité si C est un simplexe, donc

$$\|C(r)\|<(r-\tfrac{1}{2})^n\binom{2n}{n}\,\|C\|.$$

§ 6. Les images inverses sur les hypersurfaces réductibles

Le théorème 9 de [11], qui exprime l'égalité des cardinaux des images inverses $\mu_C(p)$ et $\mu_C(-p)$ si $C\in\mathscr{K}^2$ et $p\in S^1$ a été généralisé pour tout corps $C\in\mathscr{K}^n$ par le théorème 7 de [13]. Démontrons un résultat immédiat améliorant ce dernier théorème.

Théorème 4. *Si $C \in \mathscr{K}^n$ est un corps convexe réductible, alors $\mu_C(p)$ et $\mu_C(-p)$ ont la même dimension pour tout point $p \in S^{n-1}$.*

Démonstration. Supposons que $0 < \dim \mu_C(p) < \dim \mu_C(-p) < n$. Il en résulte que $\dim \mu_C(p) \leqq n-2$. Soit V un sous-espace à $n - \dim \mu_C(p)$ dimensions orthogonal à la variété linéaire engendrée par $\mu_C(p)$. Alors $\mu_{C_V}(p) = \mu_C(p)_V$ est un point et $\mu_{C_V}(-p) = \mu_C(-p)_V$ contient un segment non-dégénéré. En vertu du théorème 7 de [*13*], C_V n'est donc pas réductible, et C est lui aussi irréductible, d'après le théorème 3 de [*11*]. Par conséquent, $\dim \mu_C(p) = \dim \mu_C(-p)$.

§ 7. La réductibilité des polyèdres

Un simplexe est évidemment un corps convexe irréductible, quelle que soit sa dimension. Par contre, les polyèdres convexes sont susceptibles d'être réductibles, et c'est le cas si les faces $(n-1)$-dimensionnelles sont deux à deux parallèles. Donc, les polyèdres réductibles ont nécessairement un nombre pair de faces à m dimensions $(0 \leqq m \leqq n-1)$, qui sont, en outre, parallèles deux à deux.

Soient $F^1, F^2, \ldots, F^p$ les faces à une dimension d'un polyèdre réductible C et j une permutation de $\{1, \ldots, p\}$, telle que F^i et $F^{j(i)}$ soient parallèles $(j^2(i) = i)$. La longueur de F^i est $\| F^i \|$ (voir le § 2).

Théorème 5. *Le nombre de réductibilité du polyèdre réductible C est*

$$r_C = \max_{i \leqq p} \frac{\| F^i \|}{\| F^i \| + \| F^{j(i)} \|}.$$

Démonstration. Nous allons prouver que

$$\sup_{\iota \in A} r_{C_{V_\iota}} = \max_{i \leqq p} \frac{\| F^i \|}{\| F^i \| + \| F^{j(i)} \|},$$

où V_ι $(\iota \in A)$ sont tous les plans de E^n contenant l'origine.

Evidemment, C_{V_ι} est un polygône convexe aux arêtes parallèles deux à deux et il y a $i_\iota \leqq p$ tel que

$$r_{C_{V_\iota}} = \frac{\| F^{i_\iota}_{V_\iota} \|}{\| F^{i_\iota}_{V_\iota} \| + \| F^{j(i_\iota)}_{V_\iota} \|} = \frac{\| F^{i_\iota} \|}{\| F^{i_\iota} \| + \| F^{j(i_\iota)} \|}$$

selon le théorème 14 de [*11*]. Mais $i_\iota \leqq p$, donc

$$\sup_{\iota \in A} r_{C_{V_\iota}} = \max_{\iota \in A} \frac{\| F^{i_\iota} \|}{\| F^{i_\iota} \| + \| F^{j(i_\iota)} \|},$$

d'où

$$\sup_{\iota \in A} r_{C_{V_\iota}} \leqq \max_{i \leqq p} \frac{\| F^i \|}{\| F^i \| + \| F^{j(i)} \|}.$$

Soient $i \leqq p$, H_i un plan d'appui tel que $H_i \cap C = F^i$, V_i un sous-espace bi-dimensionnel orthogonal à H_i et non orthogonal à F_i. Alors $F^i_{V_i}$ et $F^{j(i)}_{V_i}$ sont des arêtes parallèles de C_{V_i}, d'où

$$\frac{\|F^i\|}{\|F^i\|+\|F^{j(i)}\|}=\frac{\|F^i_{V_i}\|}{\|F^i_{V_i}\|+\|F^{j(i)}_{V_i}\|}\leqq r_{C_{V_i}},$$

donc

$$\max_{i\leqq p}\frac{\|F^i\|}{\|F^i\|+\|F^{j(i)}\|}\leqq\max_{i\leqq p} r_{C_{V_i}}\leqq\sup_{\iota\in A} r_{C_{V_\iota}}$$

et la démonstration est achevée.

Nous avons considéré seulement des polyèdres à un nombre fini de faces. Si, en général, F_α ($\alpha\in A$) sont les faces 1-dimensionnelles d'un polyèdre C et il existe une application involutive j: $A\to A$, telle que F^α et $F^{(j)\alpha}$ soient parallèles, alors

$$r_C=\sup_{\alpha\in A}\frac{\|F^\alpha\|}{\|F^\alpha\|+\|F^{j(\alpha)}\|}.$$

§ 8. La réductibilité des voisinages

Dans ce paragraphe seront étudiés les voisinages des corps convexes en ce qui concerne la réductibilité. On a vu dans le paragraphe précédent que la classe des polyèdres réductibles est très restreinte; par contre, les voisinages de corps convexes fournissent une assez large classe de corps réductibles, et, étendus à l'infini, prennent des formes spéciales remarquables.

Théorème 6. *Tout voisinage $K(C,\rho)$ d'un corps convexe C réductible est, lui aussi, réductible et $r_{K(C,\rho)}$ est une fonction décroissante de ρ.*

Démonstration. Soit V un plan arbitraire; alors

$$K(C,\rho)_V=K(C_V,\rho).$$

Suivant [*11*], considérons dans V un système cartésien orthogonal de coordonnées, tel que

$$C_{L((0,0),(1,0))}=E\big((0,0),(l,0)\big).$$

Soient les fonctions f convexe et g concave, telles que

$$\{(x,f(x));x\in[0,l]\}\cup\{(x,g(x));x\in[0,l]\}=\widetilde{C_V}.$$

Considérons $x\in[0,l]$, $x+h\in[0,l]$ où $f'(x+h)$ existe et m la pente maximum (minimum) d'une droite d'appui si h est positif (négatif). La normale en $(x+h,f(x+h))$ à $\widetilde{C_V}$ et la droite menée par $(x,f(x))$ de pente $-m^{-1}$ se coupent (si ne sont pas parallèles) en un point dont la distance à $(x,f(x))$ est égale à $R^f_h(x)$. On définit de la même façon $R^g_h(x)$.

Soient

$$f^*\colon\ [-\rho,l+\rho]\to f([0,l])+[-\rho,0]$$

et

$$g^*: [-\rho, l+\rho] \to g([0,l]) + [0,\rho]$$ [1]

les fonctions analogues à f et g, à l'aide desquelles s'écrit $\widetilde{K(C_V, \rho)}$.

Pour chaque $x \in [0,l]$, considérons le point $y_x \in [0,l]$ tel que $E((x, f(x)), (y_x, g(y_x)))$ soit un diamètre essentiel de C_V et pour chaque $x \in [-\rho, l+\rho]$, considérons le point y_x^* tel que $E((x, f^*(x)), (y_x^*, g^*(y_x^*)))$ soit un diamètre essentiel de $K(C_V, \rho)$.

Notons $l_h = y_{x+h} - y_x$ et $l_h^* = y_{x+h}^* - y_x^*$.

Soient I_x^f l'intervalle fermé maximal contenant x (réduit peut-être à ce point), où f est linéaire et I_x^g l'intervalle analogue défini à l'aide de g. Enfin, toujours d'après [*11*], désignons

$$M = \{x; I_x^f = \{x\}\} \cap \{x; I_{y_x}^g = \{y_x\}\}; \qquad N = [0,l] \sim M;$$
$$M^* = \{x; I_x^{f^*} = \{x\}\} \cap \{x; I_{y_x^*}^{g^*} = \{y_x^*\}\}; \qquad N^* = [-\rho, l+\rho] \sim M^*.$$

D'après la réductibilité de C, $r_C < 1$. Démontrons que $r_{K(C_V,\rho)} \leqq r_{C_V}$.

Evidemment, la normale en $(x, f(x))$ à une droite d'appui de C_V passant par $(x, f(x))$ est aussi normale à $\widetilde{K(C_V, \rho)}$ en un point dont la distance à $(x, f(x))$ est égale à ρ. Inversement, toute normale à $\widetilde{K(C_V, \rho)}$ en $(x^*, f^*(x^*)) \in \widetilde{K(C_V, \rho)}$ est aussi normale à une droite d'appui de C_V dans son point de contact $(x, f(x))$ avec $\widetilde{C_V}$ et $(x - x^*)^2 + (f(x) - f^*(x))^2 = \rho^2$. Il en résulte, sans difficultés spéciales, qu'on peut faire correspondre à chaque couple (x,h) un autre couple (x^*, h^*) tel que $R_h^f(x) + \rho = R_{h^*}^{f^*}(x^*)$ si $I_x^f = \{x\}$; inversément, on peut faire correspondre à chaque couple (x^*, h^*) un autre couple (x,h), où h peut devenir zéro, tel que $R_h^f(x) + \rho = R_{h^*}^{f^*}(x^*)$. On va exclure les nombres h^* pour lesquels il n'y a pas de nombres h satisfaisant à l'égalité ci-dessus et tels que $f'(x+h)$ existe; on peut aisément vérifier pourquoi celà est possible, et que l'on peut faire correspondre de manière biunivoque, à chaque point x un autre point x^* tel que $\| I_x^f \| = \| I_{x^*}^{f^*} \|$ si $I_x^f \supset \{x\}$ ou $I_{x^*}^{f^*} \supset \{x^*\}$. En tenant compte de ces considérations et des analogues à l'égard de $R_h^g(x)$ et $\| I_x^g \|$, on a, d'après le théorème 13 de [*11*],

$$r_{K(C_V,\rho)} = \max \left\{ \sup_{x \in M^*} \limsup_{h \to 0} \frac{\max\{R_h^{f^*}(x), R_{l_h^*}^{g^*}(y_x^*)\}}{R_h^{f^*}(x)\, R_{l_h^*}^{g^*}(y_x^*)}, \sup_{x \in N^*} \frac{\max\{\| I_x^{f^*} \|, \| I_{y_x^*}^{g^*} \|\}}{\| I_x^{f^*} \| + \| I_{y_x^*}^{g^*} \|} \right\}$$

$$= \max \left\{ \sup_{x \in M} \limsup_{h \to 0} \frac{\max\{R_h^f(x), R_{l_h}^g(y_x)\} + \rho}{R_h^f(x) + R_{l_h}^g(y_x) + 2\rho}, \right.$$

$$\left. \sup_{x \in N} \frac{\max\{\| I_x^f \|, \| I_{y_x}^g \|\}}{\| I_x^f \| + \| I_{y_x}^g \|} \right\}.$$

[1] Sommes d'ensembles sur la droite numérique regardée comme espace vectoriel.

Mais
$$\frac{\max\{R_h^f(x), R_{l_h}^g(y_x)\}+\rho}{R_h^f(x)+R_{l_h}^g(y_x)+2\rho} \leqq \frac{\max\{R_h^f(x), R_{l_h}^g(y_x)\}}{R_h^f(x)+R_{l_h}^g(y_x)};$$
par suite $r_{K(C_V,\rho)} \leqq r_{C_V}$ et, d'après le théorème 2,
$$r_{K(C,\rho)} = \sup_\iota r_{K(C_{V_\iota},\rho)} \leqq \sup_\iota r_{C_{V_\iota}} = r_C < 1.$$
Si $0<\rho_1<\rho_2$, alors
$$r_{K(C,\rho_2)} = r_{K(K(C,\rho_1),\rho_2-\rho_1)} \leqq r_{K(C,\rho_1)},$$
d'où $r_{K(C,\rho)}$, regardé comme fonction de ρ, est décroissant.

Le théorème précédent admet aussi une démonstration moins géométrique, utilisant le théorème 5 de [*10*]; nous ne l'avons pas choisi parcequ'elle ne s'applique plus aux théorèmes suivants.

Démontrons maintenant une géneralisation du théorème précédent.

Considérons $C\in\mathscr{K}^n$, $\rho>0$, V un plan arbitraire de E^n. Soient f_V, g_V et M_V, N_V les fonctions et les ensembles introduits plus haut et déterminant $\widetilde{C_V}$; soit encore $(x_V, f(x_V))\in\widetilde{C_V}$.

Théorème 7. *S'il existe $\eta<1$, tel que*
$$\left\{\limsup_{h\to 0}\left(R_h^{f_V}(x_V)+R_{l_h}^{g_V}(y_{x_V})\right);\ \limsup_{h\to 0}\frac{\max\{R_h^{f_V}(x_V), R_{l_h}^{g_V}(y_{x_V})\}}{R_h^{f_V}(x_V)+R_{l_h}^{g_V}(y_{x_V})}\geqq\eta\right\}$$
soit borné et
$$\frac{\max\{\|I_{x_V}^{f_V}\|, \|I_{y_{x_V}}^{g_V}\|\}}{\|I_{x_V}^{f_V}\|+\|I_{y_{x_V}}^{g_V}\|}\leqq\eta$$
lorsque x_V et V varient, alors $K(C,\rho)$ est réductible.

Démonstration. Soit x_V tel que
$$\limsup_{h\to 0}\frac{\max\{R_h^{f_V}(x_V), R_{l_h}^{g_V}(y_{x_V})\}}{R_h^{f_V}(x_V)+R_{l_h}^{g_V}(y_{x_V})}<\eta.$$
Dans ce cas, le rapport ci-dessus est plus grand que
$$\frac{\max\{R_h^{f_V}(x_V), R_{l_h}^{g_V}(y_{x_V})\}+\rho}{R_h^{f_V}(x_V)+R_{l_h}^{g_V}(y_{x_V})+2\rho},$$
dont la limite supérieure, lorsque $h\to 0$, est, donc, elle aussi, plus petite que η.

Si $x_V\in M_V$, et si on n'est pas dans le cas déjà étudié, soit m un majorant de
$$\left\{\limsup_{h\to 0}\left(R_h^{f_V}(x_V)+R_{l_h}^{g_V}(y_{x_V})\right);\ \limsup_{h\to 0}\frac{\max\{R_h^{f_V}(x_V), R_{l_h}^{g_V}(y_{x_V})\}}{R_h^{f_V}(x_V)+R_{l_h}^{g_V}(y_{x_V})}\geqq\eta\right\},$$
valable pour tout plan V. Soit $\lambda>0$. On a, pour $|h|$ assez petit,
$$\frac{\max\{R_h^{f_V}(x_V), R_{l_h}^{g_V}(y_{x_V})\}+\rho}{R_h^{f_V}(x_V)+R_{l_h}^{g_V}(y_{x_V})+2\rho}\leqq\frac{R_h^{f_V}(x_V)+R_{l_h}^{g_V}(y_{x_V})+\rho}{R_h^{f_V}(x_V)+R_{l_h}^{g_V}(y_{x_V})+2\rho}\leqq\frac{m+\rho+\lambda}{m+2\rho+\lambda}.$$

La deuxième inégalité de l'énoncé et les deux ci-dessus se conservent à la limite, x_V parcourant les abscisses des points de C_V. Donc,

$$r_{K(C_V,\rho)} \leqq \max\left\{\eta, \frac{m+\rho+\lambda}{m+2\rho+\lambda}\right\} < 1.$$

Le terme central ne dépend pas de V, donc, d'après le théorème 2, $r_{K(C,\rho)} < 1$, ce qui achève la démonstration.

Conservons les notations du théorème précédent et posons

$$\mu = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \ddot{C} = \tilde{C}, \\ \sup\limits_{\substack{x_V \in N_V \\ V \subset E^n}} \dfrac{\max\{\| I^{f_V}_{x_V} \|, \| I^{g_V}_{y_{x_V}} \|\}}{\| I^{f_V}_{x_V} \| + \| I^{g_V}_{y_{x_V}} \|} & \text{si } \ddot{C} \subset \tilde{C}. \end{cases}$$

Théorème 8. *Si*

$$\left\{\limsup_{h\to 0} (R^{f_V}_h(x_V) + R^{g_V}_{l_h}(y_{x_V}));\ \limsup_{h\to 0} \frac{\max\{R^{f_V}_h(x_V), R^{g_V}_{l_h}(y_{x_V})\}}{R^{f_V}_h(x_V) + R^{g_V}_{l_h}(y_{x_V})} > \mu\right\}$$

est borné lorsque x_V et V varient, alors

$$\lim_{\rho\to\infty} r_{K(C,\rho)} = \mu.$$

Démonstration. Si x_V est tel que

$$\limsup_{h\to 0} \frac{\max\{R^{f_V}_h(x_V), R^{g_V}_{l_h}(y_{x_V})\}}{R^{f_V}_h(x_V) + R^{g_V}_{l_h}(y_{x_V})} \leqq \mu,$$

alors on a aussi

$$\limsup_{h\to 0} \frac{\max\{R^{f_V}_h(x_V), R^{g_V}_{l_h}(y_{x_V})\} + \rho}{R^{f_V}_h(x_V) + R^{g_V}_{l_h}(y_{x_V}) + 2\rho} \leqq \mu.$$

Supposons maintenant que M_V^+ est l'ensemble des points $x_V \in M_V$ tels que la première inégalité de cette démonstration ne soit pas satisfaite. Notons

$$m = \sup_{\substack{x_V \in M_V^+ \\ V \subset E^n}} \limsup_{h\to 0} (R^{f_V}_h(x_V) + R^{g_V}_{l_h}(y_{x_V})).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si $\lambda > 0$ et

$$\rho > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}(m+\lambda),$$

alors, pour $|h|$ assez petit,

$$\rho > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}(R^{f_V}_h(x_V) + R^{g_V}_{l_h}(y_{x_V}))$$
$$> \frac{2\max\{R^{f_V}_h(x_V), R^{g_V}_{l_h}(y_{x_V})\} - (1+2\varepsilon)(R^{f_V}_h(x_V) + R^{g_V}_{l_h}(y_{x_V}))}{4\varepsilon},$$

ou

$$\frac{\max\{R^{f_V}_h(x_V), R^{g_V}_{l_h}(y_{x_V})\} + \rho}{R^{f_V}_h(x_V) + R^{g_V}_{l_h}(y_{x_V}) + 2\rho} < \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

Il en résulte le théorème énoncé et, de même, l'assertion suivante précisant le théorème dans le cas où $\mu \neq \frac{1}{2}$.

Si $\mu > \frac{1}{2}$ et si la condition du théorème 8 est remplie, alors il existe un nombre P tel que $r_{K(C,\rho)} = \mu$ si $\rho \geqq P$.

Soit $\mu = \frac{1}{2}$; pour qu'il existe un nombre P tel que

$$r_{K(C,\rho)} = \tfrac{1}{2}$$

si $\rho \geqq P$, il est nécessaire et suffisant que C soit symétrique, parce que $r_{K(C,\rho)} = \frac{1}{2}$ si et seulement si $K(C,\rho)$ est symétrique, en vertu du théorème 6 de [*4*].

Il résulte du théorème 8 que, si $\limsup_{h \to 0} R_h^{f_V}(x_V)$ et $\limsup_{h \to 0} R_h^{g_V}(x_V)$ sont bornés lorsque x_V et V varient et si $\mu = \frac{1}{2}$, alors

$$\lim_{\rho \to \infty} r_{K(C,\rho)} = \tfrac{1}{2}.$$

Evidemment, ces conditions sont, toutes les deux, remplies si $\tilde{C}$ possède en chaque point $n-1$ rayons de courbure principaux finis.

Bibliographie

[*1*] Berge, C.: Espaces topologiques-fonctions multivoques. Paris: Dunod 1959.

[*2*] Busemann, H.: Convex surfaces. New York: Interscience Publ. 1958.

[*3*] Eggleston, H. G.: Convexity. Cambridge: Cambridge University Press 1963.

[*4*] Hammer, P. C.: Convex bodies associated with a convex body. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 781–793 (1951).

[*5*] Klee jr., V. L.: Extremal structure of convex sets. II. Math. Zeitschr. **69**, 90–104 (1958).

[*6*] Rogers, C. A., and G. C. Shephard: The difference body of a convex body. Arch. Math. **8**, 220–233 (1957).

[*7*] Straszewicz, S.: Über exponierte Punkte abgeschlossener Punktmengen. Fund. Math. **24**, 139–143 (1935).

[*8*] Vincensini, P.: Sur le prolongement des séries linéaires de corps convexes. Applications. Rend. Circ. Mat. Palermo **60**, 361–372 (1936).

[*9*] — Corps convexes. Séries linéaires. Domaines vectoriels. Mémorial des Sc. Math., fasc. **94**, (1938).

[*10*] Voiculescu, D.: O ecuaţie privind corpurile convexe şi aplicaţii la corpurile asociate unui corp convex. Stud. Cerc. Mat. **18**, 741–745 (1966).

[*11*] Zamfiresco, T.: Reducibility of convex bodies. Proc. London Math. Soc. à paraître (1967).

[*12*] — Réductibilité et séries linéaires de corps convexes. L'Enseign. Math. **12**, 57–67 (1966).

[*13*] — Sur les corps associés à un corps convexe. Rev. Roum. Math. P. et Appl., **11**, 727–735 (1966).

[*14*] — Sur les séries linéaires de corps convexes à frontières non différentiables et applications à la réductibilité. Rev. Roum. Math. P. et Appl. **11**, 1015–1022 (1966).

Faculté de Mathématiques et Mécanique de l'Université de Bucarest