C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, p. 510-511 (13 mars 1967). Série A

GÉOMÉTRIE. — *Sur une fibration de l'espace des corps convexes.* Note (*) de MM. **Paul Vincensini** et **Tudor Zamfiresco**, présentée par M. Paul Montel.

Le but de cette Note est de faire connaître un procédé de fibration, au sens de J.-P. Serre, de l'espace $\mathcal{E}$ des corps convexes de l'espace euclidien E^n.

1. $\mathcal{E}$ étant l'ensemble des corps convexes (n-dimensionnels) de l'espace euclidien E^n à n dimensions dont les hypersurfaces frontières admettent en chaque point $n-1$ rayons de courbure principaux finis et non nuls et où deux corps superposables par translation sont regardés comme identiques, désignons par $R_k(\omega, \omega')$ le rayon de courbure normale de la frontière $\mathfrak{F}k$ d'un corps quelconque $k \in \mathcal{E}$, au point d'image ω sur l'hypersphère unitaire $S = \{x \in E^n : \|x\| = 1\}$ de centre O, dans la direction $O\omega'$, ω' étant un point quelconque de la sphère à $n-2$ dimensions (S_ω) intersection de S et de l'hyperplan normal en O à $O\omega$.

On peut définir une distance d dans $\mathcal{E}$ par

$$d(k_1, k_2) = \max_{\omega \in S,\, \omega' \in S_\omega} |R_{k_1}(\omega, \omega') - R_{k_2}(\omega, \omega')|,$$

et munir $\mathcal{E}$ de la topologie τ induite par cette distance. $\mathcal{E}$ peut alors être structuré en espace fibré au sens de J.-P. Serre ([1]) et cela de la façon suivante :

2. Prenons pour espace base le sous-espace $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$ (muni de la topologie induite par τ) constitué par les corps convexes centrés (possédant un centre de symétrie), et définissons la projection $\mathcal{E} \to \mathcal{S}$ par la fonction (continue) $p(k) = k - k$ qui applique tout corps k de $\mathcal{E}$ sur le corps $k - k$ ([4]) de $\mathcal{S}$ qui en est le domaine vectoriel ([2]).

Si, I étant l'intervalle $[0, 1]$, $\mathcal{E}^I$ (resp. $\mathcal{S}^I$) représente l'espace des chemins de $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{S}$), et si

$$\Gamma(\mathcal{E}, p, \mathcal{S}) = \{(f, k) : f(0) = p(k)\} \subset \mathcal{S}^I \times \mathcal{E},$$

la possibilité de construction d'une connexion [([1]), ([5])], $C : \Gamma(\mathcal{E}, p, \mathcal{S}) \to \mathcal{E}^I$ telle que la fonction C satisfasse aux conditions suivantes :

a. elle est continue;

b. pour tout couple $(f, k) \in \Gamma(\mathcal{E}, p, \mathcal{S})$ on a $C(f, k)(0) = k$;

c. pour tout tel couple et tout $t \in I$ on a

$$p(C(f, k)(t)) = f(t),$$

assure à $\mathcal{E}$ une structure d'espace fibré.

3. On peut construire une connexion C jouissant des propriétés requises en s'appuyant sur une technique de transformation des fibres exposée en ([3]).

$H_k(\omega) = \sup_{x \in k} x.\omega$, $\omega \in S$, étant la fonction d'appui du corps convexe $k \in \mathcal{E}$, soit $[k_1, k_2]_\lambda$ le corps convexe de fonction d'appui $(H_{k_1}(\omega) - \lambda H_{k_2}(\omega))/(1-\lambda)$;

λ variant hors de l'intervalle $[\lambda^g_{k_1, k_2}, \lambda^d_{k_1, k_2}]$ déterminé par les limites gauche et droite de prolongeabilité de la série linéaire $[k_1, k_2]$, ce corps engendre [[2], [4]] l'extension $\leftarrow k^1, k_2 \rightarrow$ de la série $[k_1, k_2]$, et puisque évidemment $[k_1, k_1]_\lambda = k_1$ pour tout $\lambda \neq 1$, nous ferons la convention $[k_1, k_1]_1 = k_1$.

Soit dès lors $(f, k) \in \Gamma(\mathcal{E}, p, \mathcal{S})$, $t \in \mathrm{I}$; $p(k)$ et $f(t)$ déterminent dans $\mathcal{S}$ une série linéaire $[p(k), f(t)]$, et l'on démontre qu'on peut choisir une fonction $\lambda(k, f, t) > \lambda^d_{p(k), f(t)}$, continue et tendant vers 1 lorsque $t \rightarrow 0$, telle que

$$[p(k), f(t)]_{\lambda(k, f, t)} \in \leftarrow p(k), f(t) \rightarrow,$$

de sorte, par suite, que

$$f(t) = [p(k), [p(k), f(t)]_{\lambda(k, f, t)}]_{1-\lambda(k, f, t)}.$$

Les corps convexes k et $[p(k), f(t)]_{\lambda(k, f, t)}/2$ admettant pour domaines vectoriels respectifs $p(k)$ et $[p(k) - f(t)]_{\lambda(k, f, t)}$, le domaine vectoriel (la projection sur $\mathcal{S}$) du corps $[k, [p(k), f(t)]_{\lambda(k, f, t)}/2]_{1-\lambda(k, f, t)}$ est $f(t)$ [2].

La fonction $\mathrm{C}(f, k)(t) = [k, [p(k), f(t)]_{\lambda(k, f, t)}/2]_{1-\lambda(k, f, t)}$ vérifie par construction la condition c du n° 2, à savoir

$$p(\mathrm{C}(f, k)(t)) = f(t), \qquad t \in \mathrm{I}.$$

Elle vérifie aussi la condition b, car pour $t = 0$ on a les égalités

$$p(k) = f(0), \qquad \lambda^d_{p(k), f(0)} = 1, \qquad \lambda(k, f, 0) = 1,$$
$$[p(k), f(0)]_1 = p(k),$$

et, par suite,

$$\mathrm{C}(f, k)_0 = \left[k, \frac{p(k)}{2}\right]_0 = k.$$

Quant à la condition a relative à la continuité de $\mathrm{C}(f, k)(t)$, elle résulte de la continuité de $\lambda(k, f, t) : \Gamma(\mathcal{E}, p, \mathcal{S}) \times \mathrm{I} \rightarrow [1, \infty)$ et du fait que, de par le choix de la fonction $\lambda(k, f, t)$, la convention $[k_1, k_1]_1 = k_1$ n'altère pas la continuité de $\mathrm{C}(f, k)$ au point O.

Ces circonstances montrent que $\mathrm{C}(f, k)$ est un véritable chemin, et comme la continuité de l'application

$$\mathrm{C}(f, k)(t) : \Gamma(\mathcal{E}, p, \mathcal{S}) \times \mathrm{I} \rightarrow \mathcal{E}$$

entraîne celle de $\mathrm{C}(f, k) : \Gamma(\mathcal{E}, p, \mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{E}^{\mathrm{I}}$, C est une connexion pour $(\mathcal{E}, p, \mathcal{S})$, ce qui assure à l'espace des corps convexes la structure d'espace fibré annoncée.

(*) Séance du 6 mars 1967.

[1] J.-P. Serre, *Ann. Math.*, 54, 1951, p. 425-504.
[2] P. Vincensini, *Mém. Sc. math.*, fasc. XCIV, 1938.
[3] P. Vincensini, *Revue Roumaine math. pures et appl.*, 10, 1965, p. 875.
[4] T. Zamfiresco, *L'Enseignement mathématique*, Genève, 12, fasc. 1, 1966, p. 57.
[5] C. Teleman, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 3e série, 77, 1960, p. 195-234.

P. V. : 24, *rue de la Garderie, Marseille, 4e, Bouches-du-Rhône.*
T. Z. : *boul. Gh. Gheorghiu, Dej.* 97, *Bucarest.*)