ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Estratto dai *Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*
Serie VIII, vol. XLII, fasc. 6 – Giugno 1967

Matematica. — *Sur les familles continues de courbes.* Nota I di TUDOR ZAMFIRESCO, presentata (*) dal Corrisp. G. SCORZA DRAGONI.

RIASSUNTO. — In questa Nota è studiata la struttura di una famiglia di curve continua secondo Grünbaum [2]. Il risultato centrale assicura che se le curve di una tal famiglia $\mathfrak{L}$ non passano tutte per un medesimo punto, ogni curva di $\mathfrak{L}$, eccettuatene al più tre, contiene sottoarchi costituiti da punti per i quali passano almeno tre curve della famiglia. Fra i lemmi che conducono al risultato, il terzo caratterizza l'aspetto assunto da $\mathfrak{L}$ nel ca che su due curve di $\mathfrak{L}$ sia denso l'insieme dei punti che appartengono a una delle due curve e che appartengono soltanto a una o a due curve della famiglia.

Dans un récent travail [2], M. B. Grünbaum a défini la notion de famille continue de courbes, en découvrant aussi plusieurs de leurs propriétés. Il s'agit d'une famille $\mathfrak{L}$ d'arcs de Jordan ouverts satisfaisant aux conditions suivantes:

1° chaque courbe $L \in \mathfrak{L}$ est incluse (exceptant les extrémités) dans la composante bornée D de la complémentaire d'une courbe de Jordan fermée C, ses extrémités appartenant à C;

2° chaque point $p \in C$ est l'extrémité d'une et seulement d'une courbe $L(p)$;

3° si $L_1, L_2 \in \mathfrak{L}$ sont deux courbes différentes, alors $L_1 \cap L_2$ est un seul point;

4° la courbe $L(p)$ dépend continûment de $p \in C$.

Remarquons que chacune des courbes de $\mathfrak{L}$ est traversée par toutes les autres.

Cette notion est très féconde dans l'étude de plusieurs familles de droites associées à un corps convexe plan, comme par exemple les diamètres essentiels [3], [4], les cordes divisant l'aire en deux parties égales [6], les cordes divisant la frontière en deux arcs de longueurs égales. (Pour d'autres exemples voir [1] et [7]).

Soit $M_n(\mathfrak{L})$ l'ensemble des points de D par lesquels passent au moins n courbes de $\mathfrak{L}$ et notons par $-p$ l'extrémité de $L(p)$ différente de p. Evidemment $-(-p) = p$ (voir les notations de [5]).

M. B. Grünbaum a prouvé le résultat suivant concernant une famille continue quelconque de courbes:

Toutes les courbes de la famille, avec une exception tout au plus, rencontrent $M_3(\mathfrak{L})$.

Nous allons compléter ici ce théorème par le suivant:

Si les courbes de la famille $\mathfrak{L}$ n'ont pas toutes un point commun (ne forment pas une fascicule; voir la définition qui suit), alors sur toutes les courbes de $\mathfrak{L}$,

(*) Nella seduta del 13 maggio 1697.

avec trois exceptions au plus, il y a $\mathfrak{c}$ *points de* $M_3(\mathfrak{L})$. *Plus précisément, sur chaqune de ces courbes il existe un continu formé de* $\mathfrak{c}$ *points de* $M_3(\mathfrak{L})$.

Nous allons démontrer l'assertion ci-dessus par l'intermediaire de quatre lemmes.

Avant de présenter la suite de lemmes il faut noter que nous entendrons par *fascicule de courbes* un sous-ensemble maximal de $\mathfrak{L}$, connexe et contenant des courbes concurrentes (toutes ayant un point commun). En vertu de la condition 4° que $\mathfrak{L}$ doit satisfaire, tout fascicule est compact. La frontière d'un fascicule (dans la topologie de $\mathfrak{L}$) strictement inclus dans $\mathfrak{L}$ est constituée de deux courbes qu'on appelle *extrêmales*.

LEMME 1. – *Si* L_1 *et* L_2 *sont deux courbes de la famille* $\mathfrak{L}$ *telles que* $L_1 - M_3(\mathfrak{L})$ *et* $L_2 - M_3(\mathfrak{L})$ *soient denses, alors* L_1 *et* L_2 *appartiennent à un fascicule de* $\mathfrak{L}$.

Démonstration. – Fixons d'abord un sens sur la courbe C sur laquelle se trouvent les extrémités des arcs de $\mathfrak{L}$. Soient $p_1, -p_1$ les extrémités de L_1 et $p_2, -p_2$ celles de L_2. On peut supposer que l'ordre de ces points sur C est $p_1, p_2, -p_1, -p_2$, lorsque C est parcourue dans le sens fixé. Définissons des relations d'ordre sur L_1, sur L_2 et sur les arcs de C, notées (par abus) avec le même symbole $<$, de la manière suivante:

sur L_1, $a_1 < b_1$ si a_1 se trouve entre p_1 et b_1;

sur L_2, $a_2 < b_2$ si a_1 se trouve entre p_2 et b_2;

sur l'arc A de C, $a_3 < b_3$ si a_3 et b_3 sont rencontrés dans cet ordre lorsque A est parcouru dans le sens fixé sur C.

La notation $a \leq b$ signifiera partout $a < b$ ou $a = b$.

Soit A_i l'arc de C avec les extrémités p_i et $-p_i$ et sur lequel $p_i < -p_i$ $(i = 1,2)$.

Démontrons que la fonction

$$f: \ A_1 - \{p_1, -p_1\} \to L_1$$

définie par $f(x) = L_1 \cap L(x)$, est monotone (pas nécessairement strictement monotone). En effet, si par contre l'on pouvait trouver trois points $x < y < z$ sur $A_1 - \{p_1, -p_1\}$ tels que, par exemple, $f(x) \leq f(z) < f(y)$, alors, suivant le lemme 1 de Grünbaum [2], chaque point situé sur L_1 entre $f(z)$ et $f(y)$ appartiendrait à (au moins) deux courbes $L(u)$ et $L(v)$, avec $x < u < < y < v < z$. Par conséquent, $L_1 - M_3(\mathfrak{L})$ ne serait pas dense, ce qui est absurde.

Donc la fonction f et la fonction

$$g: \ A_2 - \{p_2, -p_2\} \to L_2$$

qui est définie de la même manière, sont monotones, disons croissantes (les autres trois situations se réduisent facilement à celle-ci).

Soit $\{q\} = L_1 \cap L_2$. Considérons le point t sur l'arc $A_1 \cap A_2 - \{p_2, -p_1\}$ et les intersections $\{r\} = L_1 \cap L(t)$ et $\{s\} = L_2 \cap L(t)$. En tenant compte du fait que les fonctions f et g sont croissantes, il suit que $q \leq r$ sur L_1 et

$s \leq q$ sur L_2. D'autre part, puisque $-t \in C - A_1 - A_2$, la courbe $L(t)$ doit traverser l'arc

$$A = \{x \in L_1 \cup L_2 \ : \ p_1 < x \leq q \quad \text{ou} \quad q \leq x < -p_2\}.$$

Soit $k \in A \cap L(t)$. Si $k \in L_1$ (le cas où $k \in L_2$ est analogue), alors, en vertu de la condition 3^o, $k = r$. Puisque $k \leq q \leq r$, on a $t = q \in L_2$, donc, de nouveau en vertu de 3^o, $q = s$ et par suite $r = s = q$.

Par conséquent, toutes les courbes $L(t)$ avec $t \in A_1 \cap A_2$ passent par q, c-à-d. que L_1 et L_2 appartienent à un fascicule ayant q comme point commun.

LEMME 2. – *Si la famille* $\mathfrak{L}$ *n'est pas elle-même un fascicule et si* L *est une courbe de* $\mathfrak{L}$ *telle que* $L - M_3(\mathfrak{L})$ *soit dense, alors* L *n'appartient pas a l'intérieur d'un fascicule de* $\mathfrak{L}$.

Démonstration. – N'oublions pas le sens déjà fixé sur C et supposons qu'on a $p < -p$ sur L (p et $-p$ étant les extrémités de L).

Supposons, par l'absurde, qu'il existe un arc A de C tel que p se trouve à l'intérieur de A et

$$\bigcap_{x \in A} L(x) \neq \Phi.$$

Considérons alors deux points a et b sur A tels que $a < p < b$ et notons par q le point commun à toutes les courbes $L(x)$, avec $x \in A$. Soit B l'arc de C ayant les extrémités p et $-p$ et sur lequel $p < -p$. Puisque $\mathfrak{L}$ n'est pas elle-même un fascicule, il existe un point c sur B tel que $b < c < -a$ et $q \notin L(c)$. Il suit que $r \neq q$, où $\{r\} = L \cap L(c)$. Donc, si h est la fonction analogue à f definie à l'aide de L et de B, alors $h(b) = h(-a) \neq h(c)$, d'où h n'est pas monotone et $L - M_3(\mathfrak{L})$ n'est pas dense, absurde.

En utilisant les lemmes 1 et 2, on obtient aussitôt le

LEMME 3. – *Si la famille* $\mathfrak{L}$ *n'est pas elle-même un fascicule et si* L_1 *et* L_2 *sont deux courbes de* $\mathfrak{L}$ *telles que* $L_1 - M_3(\mathfrak{L})$ *et* $L_2 - M_3(\mathfrak{L})$ *soient denses, alors* L_1 *et* L_2 *sont les courbes extrêmales d'un fascicule de* L.

Passons maintenant à l'étude du cas où trois courbes de $\mathfrak{L}$ ont dense l'intersection avec la complémentaire de $M_3(\mathfrak{L})$.

LEMME 4. – *Si la famille* $\mathfrak{L}$ *n'est pas elle-même un fascicule et si* L_1, L_2 *et* L_3 *sont trois courbes de* $\mathfrak{L}$ *telles que* $L_1 - M_3(\mathfrak{L})$, $L_2 - M_3(\mathfrak{L})$ *et* $L_3 - M_3(\mathfrak{L})$ *soient denses, alors* $\mathfrak{L}$ *est la réunion de trois fascicules ayant commes courbes extrêmales respectivement* L_1 *et* L_2, L_2 *et* L_3, L_3 *et* L_1.

Démonstration. – Soient $L_1 = L(p_1)$, $L_2 = L(p_2)$ et $L_3 = L(p_3)$ et supposons que $p_1, p_2, p_3, -p_1, -p_2, -p_3$ sont rencontrés dans cet ordre lorsqu'on parcourt C dans le sens fixé. Soit $p_i p_j$ l'arc de C ayant les extrémités p_i et p_j et sur lequel $p_i < p_j$.

Selon le lemme 3, $\mathfrak{L}$ contient un fascicule $\mathfrak{F}_1 = \{L(p) : p \in A\}$, où $A = p_1 p_2$ ou $A = -p_1 p_2$. Mais si $A = -p_1 p_2$, alors L_3 serait intérieur à $\mathfrak{F}_1$, ce qui n'est pas possible en vertu du lemme 2, donc $A = p_1 p_2$.

On voit ensuite que $\mathfrak{L}$ possède aussi les fascicules $\mathfrak{F}_2 = \{L(p) : p \in p_2 p_3\}$ et $\mathfrak{F}_3 = \{L(p) : p \in -p_3 p_1\}$. En ajountant ici que $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{L}$, la démonstration du lemme 4 est terminée.

Maintenant nous possédons tous les résultats qui nous sont nécessaires pour établir le théorème annoncé.

En effet, supposons par l'absurde qu'il existe quatre courbes L_1, L_2, L_3, $L_4 \in \mathfrak{L}$ telles que $L_i \cap M_3(\mathfrak{L})$ n'inclut aucun continu contenant plus d'un point, c.-à-d. que $L_i - M_3(\mathfrak{L})$ soient denses ($i = 1, 2, 3, 4$). Alors, selon le lemme 4, $\mathfrak{L}$ est formée de trois fascicules ayant L_1 et L_2, L_2 et L_3, L_3 et L_1 comme paires de courbes extrêmales. La courbe L_4 étant différente de L_1, L_2 et L_3, doit être intérieure à l'un des trois fascicules ci-dessus, ce qui contredit le lemme 2.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] GRÜNBAUM B., *Measures of symmetry for convex sets*, « Proc. Symp. Pure Math. », *7* (Convexity) 233–270 (1963).

[2] GRÜNBAUM B., *Continuous families of curves*, « Can. J. Math. », 18, 529–537 (1966).

[3] HAMMER P.C., *Convex bodies associated with a convex body*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *2*, 781–793 (1951).

[4] HAMMER P. C. et SOBCZYK A., *Planar line families* I, II, « Proc. Amer. Math. Soc. », *4*, 226–233; 341–349 (1953).

[5] ZAMFIRESCO T., *On planar continuous families of curves*, « Can. J. Math. » (à paraître).

[6] ZARANKIEWICZ K., *Bissection des ensembles plans convexes par des droites*, « Wiadom. Mat., Ser. 2 », *2*, 228–234 (1959) (en polonais).

[7] ZINDLER K., *Über konvexe Gebilde*. I, II, III, « Monatsch. Math. », *30*, 87–102 (1920); *31*, 25–56 (1921) *32*, 107–138 (1922).

ROMA, 1967 — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei