REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

TOME XII, N° 7 1967

TIRAGE À PART

EDITIONS DE L'ACADEMIE DE LA REPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE

SUR QUELQUES QUESTIONS DE CONTINUITÉ LIÉES À LA RÉDUCTIBILITÉ DES CORPS CONVEXES

PAR

TUDOR ZAMFIRESCU

Dans le présent travail, on établit la semi-continuité du nombre et du corps de réductibilité d'un corps convexe compact, permettant l'introduction d'une structure d'espace fibré ayant pour base l'ensemble des corps convexes irréductibles et comme espace total l'ensemble des corps convexes compacts non symétriques, c'est-à-dire la complémentaire de la base dans une fibration due à P. Vincensini.

Envisageons l'espace euclidien à n dimensions E^n et l'espace $\mathcal{K}^n$ des corps convexes compacts n-dimensionnels. Rappelons la notion de réductibilité, due à P. C. Hammer [3].

Soient $C \in \mathcal{K}^n$ et $r \in [1/2, \infty)$. Les corps convexes

$$C(r) = \begin{cases} \bigcap_{b \in \partial C} (b + r(C - b)) & \text{si } r \leqslant 1 \\ \bigcup_{b \in \partial C} (b + r(C - b)) & \text{si } r > 1\,^{*)} \end{cases}$$

sont appelés *corps associés* à C. D'après [3], il existe un nombre r_C tel que

$$C = C(r)\,(r/(2r-1)) \qquad \text{si } r > r_C$$

et

$$C \supset C(r)\,(r/(2r-1)) \qquad \text{si } r < r_C\,^{**)}.$$

Ce nombre s'appelle *nombre de réductibilité* de C [8], il est unique et $r_C \in [1/2, 1]$; le corps $C(r_C)$ est appelé *corps de réductibilité* de C [8] ; la famille

$$\{C(r) : r \in [r_C, \infty)\}$$

est appelée *classe de réductibilité* de C [9].

*) La frontière d'un corps $K \in \mathcal{K}^n$ est notée par ∂K.

**) On utilise les signes $\subset$, $\supset$ pour les inclusions strictes et $\subseteq$, $\supseteq$ pour celles non strictes.

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., 1967, TOME XII, No 7, p. 989–998

8 – c. 5420

Le corps convexe $C \in \mathcal{K}^n$ est dit réductible si $r_C < 1$ et l'ensemble de tous ces corps est noté par $\mathcal{K}^n_R$.

La projection de $C \in \mathcal{K}^n$ sur une variété linéaire V sera notée par C_V.

Soit $\mathcal{K}^n_S$ l'espace des corps de $\mathcal{K}^n$ admettant un centre de symétrie.

Le signe „ $\sim$ " désigne la différence d'ensembles.

Désignons par $[x, y]$ le segment

$$\{\rho x + (1 - \rho) y : \rho \in [0, 1]\}$$

et par (x, y) la droite

$$\{\rho x + (1 - \rho) y : \rho \in (-\infty, +\infty)\};$$

aussi

$$r(x, [y, z]) = \frac{\max \{|x - y|, |x - z|\}}{|y - z|}.$$

Soient $C \in \mathcal{K}^n$ et $c = [a, b]$ une corde de C. Le nombre

$$r_C^* = \inf_{x \in C} \sup_{c \ni x} r(x, c)$$

est appelé *rapport critique* de C [2]; il est dérivé de la mesure d'asymétrie de Minkowski [1]. Des inégalités intéressantes concernant le rapport critique ont été établies par B. H. Neumann [5], W. Süss [6], P. C. Hammer [2], T. Zamfirescu [10].

RELATIONS ENTRE LE NOMBRE DE RÉDUCTIBILITÉ ET LE RAPPORT CRITIQUE

Il est connu que $C(r)$ est un corps convexe si $r \geqslant r_C$ et $C(r) = \emptyset$ si $r < r_C$ [3]. On a donc $r_C \geqslant r_C^*$. Quant au corps associé $C^* = C(r_C^*)$, il est convexe et sa dimension vérifie l'inégalité

$$\dim C^* \leqslant n - 2,$$

établie par V. L. Klee [4]. Evidemment, $C(r) \in \mathcal{K}^n$ pour tout $r > r_C^*$.

On voit sans difficulté que si $C \in \mathcal{K}^n$, alors une condition nécessaire est suffisante pour que $r_C = 1/2$ et que C soit symétrique.

La question qui se pose est de voir s'il est possible que C ne soit pas symétrique et $r_C = r_C^*$.

THÉORÈME 1. *Si* $C \in \mathcal{K}^n$, *alors* $r_C = r_C^*$ *si et seulement si* C *est symétrique.*

Démonstration. Supposons que $r_C = r_C^*$. Si C^* est un point, alors une démonstration tout à fait analogue à celle du théorème 6 de [3] nous conduit à la symétrie de C, donc à $r_C = r_C^* = 1/2$.

Supposons que C^* n'est pas un point. Soit δ_1 une droite orthogonale à la variété linéaire engendrée par C^* et δ_2 une droite incluse dans cette variété. Considérons un nombre $r \gg r_C$ et deux diamètres de $C(r)$, $[a_r^1, b_r^1]$ et $[a_r^2, b_r^2]$ parallèles à δ_1 et δ_2. Alors *)

$$\lim_{r \to r_C} |a_r^1 - b_r^1| = 0 ; \quad \lim_{r \to r_C} |a_r^2 - b_r^2| = |a_{r_C}^2 - b_{r_C}^2| > 0,$$

d'où

$$\lim_{r \to r_C} \frac{|a_r^1 - b_r^1|}{|a_r^2 - b_r^2|} = 0.$$

En vertu de la propriété 8 du théorème 5 de [3], si $r > 1$, alors

$$\frac{|a_r^i - b_r^i|}{|a_1^i - b_1^i|} = 2r - 1 \quad (i = 1, 2).$$

Il est très facile à voir que cette égalité se maintient pour $r \in (r_C, 1]$. Donc pour tout $r > r_C$,

$$\frac{|a_r^1 - b_r^1|}{|a_r^2 - b_r^2|} = \frac{|a_1^1 - b_1^1|}{|a_1^2 - b_1^2|},$$

d'où

$$\lim_{r \to r_C} \frac{|a_r^1 - b_r^1|}{|a_r^2 - b_r^2|} = \frac{|a_1^1 - b_1^1|}{|a_1^2 - b_1^2|} > 0,$$

absurde, donc C^* est nécessairement un point et C est symétrique.

Réciproquement, on voit aisément que si C est symétrique, alors $r_C = r_C^* = 1/2$.

THÉORÈME 2. *Si* $C \in \mathcal{K}^n$, *alors*

$$C \supseteq C(r_C)\,(r_C/(2r_C - 1)).$$

Si le membre droit a un sens, c'est-à-dire si C n'est pas symétrique.

Remarque. Si la relation de l'énoncé n'a pas de sens, c'est-à-dire si $r_C = 1/2$, alors C est symétrique, $r_C^* = 1/2$ et $C(r_C) = C^*$ est un point, donc le corps $C^*(s)$ associé à C^* est un point quel que soit s.

Démonstration. Puisque C n'est pas symétrique, $r_C > r_C^*$ d'après le théorème 1, donc $C(r_C) \in \mathcal{K}^n$. Selon la propriété 8 du théorème 5 de [3], pour tout point $a \in \partial C$, il y a un diamètre $[a, b]$ de C, tel qu'on peut trouver un autre diamètre $[a_r, b_r]$ de $C(r)$ $(r > r_C)$ satisfaisant aux relations

$$(a_r, b_r) = (a, b) ; \quad a_r + b_r = a + b.$$

Mais

$$\lim_{r \to r_C} \frac{|a_r - b_r|}{|a - b|} = 2r_C - 1,$$

$$\lim_{r \to r_C} a_r = a_{r_C} \text{ et } \lim_{r \to r_C} b_r = b_{r_C},$$

*) La norme euclidienne de E^n est notée par « $|\ |$ ».

donc

$$|a_{r_C} - b_{r_C}| / |a - b| = 2r_C - 1$$

et

$$C = C(r_C)(r_C / (2r_C - 1)).$$

LA SEMI-CONTINUITÉ DU NOMBRE ET DU CORPS DE RÉDUCTIBILITÉ

Considérons l'espace $\mathcal{K}^n$ muni de la structure métrique de Hausdorff et de celle d'ordre par inclusion.

THÉORÈME 3. *La fonction*

$$r_C : \mathcal{K}^n \to R\ ^{*})$$

est inférieurement semi-continue.

Démonstration. Soit $B = \{x : |x| \leqslant 1\}$. L'application

$$C(r) : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n \cup \mathcal{K}^0$$

est, pour un r fixé, continue, parce que si

$$C_1 \subset C_2 + (q/4r)\, B, \quad C_2 \subset C_1 + (q/4r)\, B,$$

alors

$$b + r(C_1 - b) \subset b + r(C_2 + (q/4r)\, B - b);$$

mais pour chaque point $b \in \partial C_1$, il y a $c \in \partial C_2$ tel que $|b - c| < q/4r$, et réciproquement; alors

$$b \subset c + (q/4r)\, B$$

et

$$b + r(C_2 + (q/4r)\, B - b) \subset c + (q/4r)\, B + r(C_2 + (q/4r)\, B - c -$$
$$- (q/4r)\, B) \subseteq c + 2r(q/4r)\, B + r(C_2 + (q/2r)\, B - c) =$$
$$= c + r(C_2 - c) + qB,$$

donc

$$\bigcap_{b \in \partial C_1} (b + r(C_1 - b)) \subset \bigcap_{c \in \partial C_2} (c + r(C_2 - c) + qB)$$

et

$$\bigcup_{b \in \partial C_1} (b + r(C_1 - b)) \subset \bigcup_{c \in \partial C_2} (c + r(C_2 - c) + qB),$$

d'où il résulte que

$$C_1(r) \subset C_2(r) + qB.$$

---

*) On désigne par R l'ensemble des nombres réels.

Par analogie, on obtient

$$C_2(r) \subset C_1(r) + qB$$

et notre assertion est démontrée.

Aussi, l'application

$$C(r) : [1/2, \infty) \to \mathcal{K}^n \cup \mathcal{K}^0$$

est, pour C fixé, continue, parce que si

$$|r_1 - r_2| < \frac{q}{2p},$$

où p est tel que $C \subset pB$, alors

$$C \subset \frac{q}{2|r_1 - r_2|} B,$$

$$C - b \subset C - C \subset \frac{q}{|r_1 - r_2|} B,$$

donc

$$b + r_1(C - b) \subseteq b + (r_2 + |r_1 - r_2|)(C - b) = b + r_2(C - b) +$$
$$+ |r_1 - r_2|(C - b) \subset b + r_2(C - b) + qB,$$

d'où

$$C(r_1) \subset C(r_2) + qB$$

et, analogiquement,

$$C(r_2) \subset C(r_1) + qB.$$

Donc l'application

$$C(r) : \mathcal{K}^n \times [1/2, \infty) \to \mathcal{K}^n \cup \mathcal{K}^0$$

étant continue en chaque variable, est elle-même continue.

Soit $\{C_t\}$ une suite de corps convexes de $\mathcal{K}^n$ convergente vers un corps $C \in \mathcal{K}^n$. Extrayons la suite partielle $\{C_{t_m}\}$ telle que $\{r_{C_{t_m}}\}$ soit convergente et posons $\bar{r} = \lim\limits_{m\to\infty} r_{C_{t_m}}$. Selon les remarques précédentes, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{m\to\infty} C_{t_m}(r_{C_{t_m}} + \varepsilon) = C(\bar{r} + \varepsilon).$$

Nous avons aussi

$$\lim_{m\to\infty} (r_{C_{t_m}} + \varepsilon)/(2r_{C_{t_m}} + 2\varepsilon - 1) = (\bar{r} + \varepsilon)/(2\bar{r} + 2\varepsilon - 1)$$

et

$$C_{t_m}(r_{C_{t_m}} + \varepsilon)((r_{C_{t_m}} + \varepsilon)/(2r_{C_{t_m}} + 2\varepsilon - 1)) = C_{t_m}.$$

En prenant la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient

$$C(\bar{r}+\varepsilon)((\bar{r}+\varepsilon)/(2\bar{r}+2\varepsilon-1))=C,$$

d'où $r_C \leqslant \bar{r}+\varepsilon$, c'est-à-dire que

$$r_C \leqslant \liminf_{C_\iota \to C} r_{C_\iota} \quad (C_\iota \in \mathcal{K}^n)$$

et le théorème est démontré.

THÉORÈME 4. *La fonction*

$$C(r_C): \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n \cup \mathcal{K}^0$$

est inférieurement semi-continue.

Démonstration. Soit $\{C'_i\}$ une suite de corps convexes de $\mathcal{K}^n$ convergente vers $C \in \mathcal{K}^n$, telle que

$$\liminf_{C_\iota \to C} r_{C_\iota} = \lim_{i\to\infty} r_{C'_i}.$$

Pour toute autre suite $\{C_m\}$ avec $C_m \in \mathcal{K}^n$ et $C_m \to C$,

$$\lim_{m\to\infty} r_{C_m} \geqslant \lim_{i\to\infty} r_{C'_i}.$$

Mais

$$\lim_{i\to\infty} C'_i(r_{C'_i}) = C(\lim_{i\to\infty} r_{C'_i})$$

et

$$\lim_{m\to\infty} C_m(r_{C_m}) = C(\lim_{m\to\infty} r_{C_m}),$$

donc

$$C(\lim_{m\to\infty} r_{C_m}) \supseteq C(\lim_{i\to\infty} r_{C'_i}).$$

D'après le théorème 3,

$$r_C \leqslant \lim_{i\to\infty} r_{C'_i},$$

donc pour toute suite $\{C_m\}$, où $C_m \in \mathcal{K}^n$ et $C_m \to C$,

$$C(r_C) \subseteq C(\lim_{i\to\infty} r_{C'_i}) \subseteq C(\lim_{m\to\infty} r_{C_m}) = \lim_{m\to\infty} C_m(r_{C_m}),$$

ce qui achève la démonstration.

PROPRIÉTÉS DE CONTINUITÉ CONCERNANT LES PROJECTIONS

Soit $\mathcal{V}^m$ la famille des sous-espaces m-dimensionnels de E^n, munie de sa structure métrique habituelle.

THÉORÈME 5. *Si* $C \in \mathcal{K}^n$, *alors les fonctions*

$$r_{C_V} : \mathcal{V}^m \to R\,; \quad C_V(r_{C_V}) : \mathcal{V}^m \to \mathcal{K}^m \cup \mathcal{K}^0 \quad (V \in \mathcal{V}^m)$$

sont inférieurement semi-continues.

Démonstration : Remarquons d'abord que la fonction

$$C_V : \mathcal{V}^m \to \mathcal{K}^m$$

est continue. Il suit alors, d'après les théorèmes 3 et 4, que les fonctions de l'énoncé sont, toutes les deux, inférieurement semi-continues.

Ce théorème explique pourquoi dans l'énoncé du théorème 2 de [12], on a

$$r_C = \sup_{V \in \mathcal{V}^m} r_{C_V},$$

sans préciser que le suprêmum est atteint.

Considérons maintenant le cas où $C \in \mathcal{K}_2^n$ *). Les théorèmes 3 et 4 gardent entièrement leur valabilité et r_C et $C(r_C)$ ne sont pas continues, $\mathcal{K}_2^n$ étant métrisé avec la distance de Hausdorff. Mais le théorème 5 peut être précisé de la façon suivante :

THÉOREME 6. *Si* $C \in \mathcal{K}_2^n$, *alors les fonctions*

$$r_{C_V} : \mathcal{V}^m \to R\,; \quad C_V(r_{C_V}) : \mathcal{V}^m \to \mathcal{K}^m \cup \mathcal{K}^0 \quad (V \in \mathcal{V}^m)$$

sont continues.

Démonstration. Soient $R_C^1(\omega), \ldots, R_C^{n-1}(\omega)$ les rayons de courbure principaux de ∂C dans l'image inverse de ω [8], [10] et $D_C^1(\omega), \ldots, D_C^{n-1}(\omega)$ les directions principales. Ces $2n-2$ fonctions de $\omega \in S^{n-1}$ **) sont continues, d'où les fonctions

$$R^1_{C_W}(\omega) : S^{n-1} \cap W \to R \qquad (W \in \mathcal{V}^2)$$

sont aussi continues et

$$r_{C_W} = \max_{\omega \in S^{n-1} \cap W} \frac{R_C^1(\omega)}{R^1_{C_W}(\omega) + R^1_{C_W}(-\omega)} \qquad [9]$$

est une fonction continue de W. Si $m = 2$, alors le théorème est démontré. Si $m > 2$,

$$r_{C_V} = \sup_{W \subset V} r_{C_W} \qquad [12]$$

*) On désigne par $\mathcal{K}_2^n$ l'ensemble des corps de $\mathcal{K}^n$ dont les frontières sont douées en chaque point de $n-1$ rayons de courbure principaux finis et non nuls.

**) On utilise la notation $S^p = \partial B$, où $B = \{x : |x| \leqslant 1\} \in \mathcal{K}^{p+1}$.

est une fonction continue de V. Si $V_t \to V$, alors

$$C_{V_t} \to C_V\,; \quad r_{C_{V_t}} \to r_{C_V}\,; \quad C_{V_t}\,(r_{V_t}) \to C\,(r_C)$$

et

$$C_V\,(r_{C_V}) : \mathcal{V}^m \to \mathcal{K}^m \cup \mathcal{K}^0$$

est aussi continue.

Le théorème 6 donne une explication pour l'usage du « maximum » dans le théorème 8 de [11]. En effet, on peut maintenant énoncer le théorème plus général qui suit.

THÉORÈME 7. *Si* $C \in \mathcal{K}^n_2$, *alors*

$$r_C = \max_{V \in \mathcal{V}^m} r_{C_V} \qquad (1 < m < n).$$

Démonstration. Selon le théorème 6,

$$r_{C_V} : \mathcal{V}^m \to R$$

est une fonction continue, donc elle atteint son maximum, lorsque V varie dans $\mathcal{V}^m$. Comme

$$r_C = \sup_{V \in \mathcal{V}^m} r_{C_V},$$

d'après le théorème 2 de [12], la démonstration est terminée.

L'ESPACE $\mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_S$ ORGANISÉ COMME ESPACE FIBRÉ

L'idée d'organisation de $\mathcal{K}^n$ comme espace fibré remonte à P. Vincensini [7] qui a fait attacher à tout corps convexe symétrique Δ sa fibre

$$e_\Delta = \{C : C \quad C = \Delta\}$$

tel qu'on ait

$$\mathcal{K}^n = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{K}^n_S} e_\Delta.$$

Pour plus de détails, voir [13].

Nous allons considérer ici une autre fibration, envisageant seulement les corps convexes qui n'appartiennent pas à la base $\mathcal{K}^n_S$.

Cela aide à éclaircir la structure des fibres dans la fibration de Vincensini et met en évidence l'importance de la famille des corps convexes irréductibles de $\mathcal{K}^n$.

Considérons $\mathcal{K}^n$ muni d'une topologie τ dans laquelle les éléments d'une base de voisinages de $C \in \mathcal{K}^n$ sont formés par tous les corps convexes inclus dans les corps convexes d'une sphère de centre C, relative à la distance de Hausdorff.

Evidemment, cette topologie est moins fine que celle induite par la métrique de Hausdorff.

Considérons la fonction

$$p : \mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_S \to \mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_R$$

définie par

$$p\,(C) = C\,(r_C).$$

THÉORÈME 8. *Si on considère l'espace $\mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_S$ muni de la métrique de Hausdorff, la fonction p introduite ci-dessus et l'espace $\mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_R$ muni de la topologie τ, alors $(\mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_S,\ p,\ \mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_R)$ est un espace fibré à espace total $\mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_S$, projection p et base $\mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_R$.*

Démonstration. Selon le théorème 1, $r_C > r_C^*$ pour tout $C \in \mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_S$, donc $C(r_C) \in \mathcal{K}^n$; évidemment $C(r_C) \notin \mathcal{K}^n_R$. Donc la fonction p est bien définie.

D'après le théorème 4, pour toute suite $\{C_m\}$ $(C_m \in \mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_S)$ convergente vers C, relative à la métrique de Hausdorff,

$$C\,(r_C) \subseteq \lim_{m\to\infty} C_m\,(r_{C_m}),$$

donc $C\,(r_C)$ est une limite de $\{C_m\,(r_{C_m})\}$ relative à la topologie τ de $\mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}_R$ (notons que doué de cette topologie, l'espace $\mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_R$ n'est pas séparé (Hausdorff)). Il suit que p est une application continue.

Si on considère l'intervalle $I = [1, \infty)$ muni de sa topologie habituelle ε, la fonction

$$\varphi : (\mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_R) \times I \to \mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_S$$

définie par

$$\varphi\,(C,\ r) = C\,(r)$$

est (voir la démonstration du théorème 3) continue, relative à la structure métrique de Hausdorff de $\mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_R$ et $\mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_S$ et à la topologie ε de I. D'après une propriété très simple des corps associés d'une même classe de réductibilité, φ est une application bijective, donc un homéomorphisme.

Il est prouvé que $(\mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_S,\ p,\ \mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_R)$ est un espace fibré trivial, dont les fibres sont les classes de réductibilité des éléments de la base.

Puisque les éléments d'une classe de réductibilité ont leurs domaines vectoriels homothétiques, il suit que la connaissance de Δ et de $e_\Delta \sim \mathcal{K}^n_R$ suffit pour connaître tous les corps de e_Δ.

Remarquons que le cardinal de $e_\Delta \sim \mathcal{K}^n_R$ n'est pas fixe lorsque Δ varie dans $\mathcal{K}^n_S$. Par exemple, si Δ est un carré, alors $e_\Delta \sim \mathcal{K}^n_R = \varnothing$ et $e_\Delta = \{\Delta/2\}$, mais si Δ est un cercle de rayon ρ, alors $e_\Delta \sim \mathcal{K}^n_R$ contient tous les polygones de Reuleaux de largeur ρ.

Soit s_r une section de notre espace fibré, définie par $s_r(C) = C\,(r)$. Remarquons qu'il existe $\Delta \in \mathcal{K}^n_S$, tel que

$$C_1,\ C_2 \in e_\Delta \sim \mathcal{K}^n_R \quad (C_1,\ C_2 \in \mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_R)$$

si et seulement si pour tout $r > 1$ il existe $\Delta_r \in \mathcal{K}^n_S$, tel que

$$s_r(C_1),\ s_r(C_2) \in e_{\Delta_r}.$$

Faisons, en fin, quelques considérations sur l'aspect des images sphériques ν_C des frontières des corps C de $\mathcal{K}^n$ sur S^{n-1}.

Posons $C_1 \equiv C_2$ (mod $\boxed{1}$) si les corps $C_1, C_2 \in \mathcal{K}^n$ sont homothétiques. Evidemment, il y a $p_i \in \partial C_i$, tels que

$$\omega \in \nu_{C_1}(p_1) = \nu_{C_2}(p_2),$$

quel que soit $\omega \in S^{n-1}$.

En vertu du théorème 4 de [10] il y a $p_1, p_2 \in \partial C$ tels que $\nu_C(p_1) = - \nu_C(p_2)$ si $C \in \mathcal{K}^n_R$.

Notons $C_1 \equiv C_2$ (mod. $\boxed{2}$) s'il y a $p_i \in \partial C_i$ tels que

$$\omega \in \nu_{C_1}(p_1) = \nu_{C_2}(p_2)$$

pour tout $\omega \in S^{n-1} \cap E^n_+$, où E^n_+ est un semi-espace borné par un sous-espace $(n-1)$-dimensionnel de E^n.

En vertu du théorème 5 de [10], il y a $p_i \in \partial s_{r_i}(C)$, tels que

$$\nu_{s_{r_1}(C)}(p_1) = \nu_{s_{r_2}(C)}(p_2),$$

quels que soient

$$C \in \mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_R \text{ et } r_1, r_2 > 1.$$

Notons $C_1 \equiv C_2$ (mod. $\boxed{3}$) si l'un est le corps associé de l'autre.

Il résulte que la connaissance de l'aspect de l'image sphérique d'un élément de chaque classe de

$$((\mathcal{K}^n \sim \mathcal{K}^n_R)/\boxed{1}) \cup (\mathcal{K}^n_S/(\boxed{1} \vee \boxed{2})) \cup ((\mathcal{K}^n_R \sim \mathcal{K}^n_S)/(\boxed{1} \vee \boxed{2} \vee \boxed{3}))$$

suffit pour connaître les images sphériques de tous les corps de $\mathcal{K}^n$.

Reçu le 5 mai 1966

Faculté de Mathématiques et Mécanique de l'Université de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. B. Grünbaum, *Measures of symmetry for convex sets.* Proc. Symposia Pure Math., vol. VII, Convexity, Amer. Math. Soc., 1963.
2. P. C. Hammer, *The centroid of a convex body.* Proc. Amer. Math. Soc., 1951, **2**, *4*.
3. — *Convex bodies associated with a convex body.* Proc. Amer. Math. Soc., 1951, **2**, *5*.
4. V. L. Klee, *The critical set of a convex body.* Amer. J. Math., 1953, **75**, *1–2*.
5. B. H. Neumann, *On some affine invariants of closed convex regions.* J. London Math. Soc., 1939, **14**.
6. W. Süss, *Über eine Affininvariante von Eibereichen.* Archiv der Math., 1948, **1**, *2*.
7. P. Vincensini, *Questions liées à la notion de géométrie différentielle globale.* Rev. Roum. Math. Pures Appl., 1965, **10**, *7*.
8. T. Zamfirescu, *Reducibility of convex bodies.* Proc. London Math. Soc., 1967.
9. — *Réductibilité et séries linéaires de corps convexes,* L'Enseignement Math., Genève, 1966, **12**, *1*.
10. — *Sur les corps associés à un corps convexe.* Rev. Roum. Math. Pures Appl., 1966, **11**, *6*.
11. — *Sur les séries linéaires de corps convexes à frontières non différentiables et applications à la réductibilité.* Rev. Roum. Math. Pures Appl., 1966, **11**, *8*.
12. — *Sur la réductibilité des corps convexes.* Math. Zeitschr., 1967, **95**, *1*.
13. P. Vincensini, T. Zamfirescu, *Sur une fibration de l'espace des corps convexes.* C. R. Acad. Sci. Paris, 1967, 264 (13 mars).