ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Estratto dai *Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*
Serie VIII, vol. XLIII, fasc. 1-2 Luglio-Agosto – Ferie 1967

Matematica. — *Sur les familles continues de courbes.* Nota II di TUDOR ZAMFIRESCO, presentata (*) dal Corrisp. G. SCORZA DRAGONI.

RIASSUNTO. — In questa Nota viene proseguito uno studio sulla struttura delle famiglie continue secondo Grünbaum di curve. Data una tal famiglia $\mathfrak{L}$, detto $M_n(\mathfrak{L})$ l'insieme dei punti per i quali passano almeno n curve della famiglia e supposto che l'intersezione degli insiemi $M_n(\mathfrak{L})$ sia vuota, viene dimostrato che nella famiglia esiste al massimo una curva L siffatta, che per ogni punto interno ai sottoarchi di L riempiti da $M_2(\mathfrak{L})$ passano esattamente 4 curve della famiglia.

Rappelons d'abord que la notion de famille continue de courbes est due à M. B. Grünbaum, qui l'a introduit dans un travail récent en liaison avec l'étude faite par plusieurs auteurs sur quelques familles de segments de droite attachées à un corps convexe plan. Une définition peut être trouvée dans ce travail [1] de M. B. Grünbaum, ou bien dans ma note I sur le même sujet [3], où je l'avais rappelée.

Notations: $\mathfrak{L}$ sera toujours une famille continue de courbes ayant les extrémités sur la courbe de Jordan fermée C. $L(p)$ est la courbe de $\mathfrak{L}$ qui a p comme une extrémité. Le point $-p$ et l'extrémité de $L(p)$ différente de p. $M_n(\mathfrak{L})$ désigne l'ensemble des points par lesquels passent au moins n courbes de L.

Maintenant, voici quelques résultats:

Sur toutes les courbes de la famille $\mathfrak{L}$, avec une exception au plus, il y a un point de $M_3(\mathfrak{L})$.

Ce théorème est du à M. B. Grünbaum [1]. Il est complété par le suivant, contenu dans la note I:

Sur toutes les courbes de la famille $\mathfrak{L}$, avec trois exceptions au plus, il y a un continu formé de $\mathfrak{C}$ points de $M_3(\mathfrak{L})$ *(si l'on suppose qu'il n'y a pas de point commun à toutes les courbes de $\mathfrak{L}$).*

Dans la présente note nous voulons trouver le nombre maximum de courbes L_i de la famille $\mathfrak{L}$, telles que par chaque point intérieur (sur L_i) à $L_i \cap M_2(\mathfrak{L})$ passent exactement quatre courbes de $\mathfrak{L}$. A savoir nous démontrerons à la fin d'une suite de lemmes le suivant résultat:

Si $M_\infty(\mathfrak{L}) = \varnothing$, *alors sur une courbe* $L \in \mathfrak{L}$ *au plus*, $\operatorname{int}(L \cap M_2(\mathfrak{L})) = L \cap M_4(\mathfrak{L}) - M_5(\mathfrak{L})$.

Il est bon de remarquer que le résultat ci-dessus continue les investigations sur les relations réciproques entre $\mathfrak{L}$ et les ensembles $M_n(\mathfrak{L})$. Pour d'autres propriétés des ensembles $M_n(\mathfrak{L})$, voir [1] et [2].

Nous sommes conduits à une succincte étude des fonctions continues dont tous les ensembles de niveau (sauf les niveaux extrêmes, s'ils existent) ont la cardinalité 3.

(*) Nella seduta del 21 giugno 1967.

Soit

$$f:(a\,,b)\to \mathrm{R}$$

une fonction continue bornée telle que pour chaque $\lambda \in \operatorname{int} f((a\,,b))$ on ait card $f^{-1}(\lambda)=3$, et pour chaque $\mu \in \operatorname{fr} f((a\,,b))$, on ait card $f^{-1}(\mu)<\aleph_0$.

LEMMA 1. – *La fonction f a des limites dans a et b.*

Démonstration. – Puisque f est bornée, $\liminf\limits_{x\to a} f(x)$ et $\limsup\limits_{x\to a} f(x)$ sont finies. Supposons qu'elles ne sont pas égales; soit alors

$$u \in (\liminf_{x\to a} f(x)\quad,\quad \limsup_{x\to a} f(x)).$$

En vertu de la propriété de Darboux, card $f^{-1}(u)\geq\aleph_0$, absurde.

LEMME 2. – *Tout point $x\in(a\,,b)$ est un extrêmum relatif stricte des restrictions de la fonction f aux intervalles $(a\,,x]$ et $[x\,,b)$.*

Démonstration. – Supposons le contraire à l'égard de $f\,|\,(a\,,x]$; alors, dans l'intervalle $(a\,,x)$ il y a deux points $c_1\,,c_2$ tels que $f(c_1)\leq f(x)$ et $f(c_2)\geq f(x)$, dans l'intervalle $(\max\{c_1\,,c_2\}\,,x)$ il y a deux autres points $c_3\,,c_4$ tels que $f(c_3)\leq f(x)$ et $f(c_4)\geq f(x)$, etc. Par conséquent, dans chacun des intervalles $[c_1\,,c_2]\,,[c_3\,,c_4]\,,\cdots$ il y a un point y_i tel que $f(y_i)=f(x)$, d'où card $f^{-1}(f(x))\geq\aleph_0$, absurde.

Appelons point du type $(+\,,+)$ (résp. $(+\,,-)$, $(-\,,+)$, $(-\,,-)$) tout point x de $(a\,,b)$ tel que x soit un maximum (résp. maximum, minimum, minimum) relatif stricte de $f\,|\,(a\,,x]$ et, simultanément, un maximum (résp. minimum, maximum, minimum) relatif stricte de $f\,|\,[x\,,b)$ et soit $[+\,,+)$ (résp $[+\,,-]$, etc) la classe des points du type $(+\,,+)$ (résp $(+\,,-)$, etc).

LEMME 3. – *Si $a<x_1<x_2<x_3<b$ et $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)\in \operatorname{int} f((a\,,b))$, alors se présente l'une des situations suivantes*:

1) $x_1\in[+\,,-]\quad,\quad x_2\in[-\,,+]\quad,\quad x_3\in[+\,,-]$;

2) $x_1\in[-\,,+]\quad,\quad x_2\in[+\,,-]\quad,\quad x_3\in[-\,,+]$;

3) $x_1\in[+\,,+]\quad,\quad x_2\in[+\,,-]\quad,\quad x_3\in[-\,,-]$;

4) $x_1\in[-\,,-]\quad,\quad x_2\in[-\,,+]\quad,\quad x_3\in[+\,,+]$.

Démonstration. – Puisque le deuxième signe de la classe à laquelle appartient l'un des trois points coincide au premier signe de la classe à laquelle appartient le point suivant, on peut se présenter seulement 2^4 situations. Toutes les 12 situations qui ne figurent pas dans l'énoncé sont en fait impossibles parce que pour tout point $\lambda\in\operatorname{int} f((a\,,b))$, card $f^{-1}(\lambda)=3$. En effet, supposons par exemple que $x_1\in[+\,,+]\,,x_2\in[+\,,-]\,,x_3\in[-\,,+]$. Alors, soient $y_1\in(a\,,x_1)\,,y_2\in(x_1\,,x_2)\,,y_3\in(x_3\,,b)$ tels que

$$y=\max\{f(y_1)\,,f(y_2)\,,f(y_3)\}<f(x_1)\,.$$

Evidemment, si $z\in(y\,,f(x_1))$, alors $z\in\operatorname{int} f((a\,,b))$. Mais en vertu de la propriété de Darboux, $f^{-1}(z)\geq 4$, absurde.

LEMME 4. – *Soit* $\lim_{x \to a} f(x) = \inf f((a, b))$ *et* $\lim_{x \to b} f(x) = \sup f((a, b))$, *soit* $\lim_{x \to a} f(x) = \sup f((a, b))$ *et* $\lim_{x \to b} f(x) = \inf f((a, b))$.

Démonstration. – Soient $\lambda \in \operatorname{int} f((a, b))$ et $x_1 < x_2 < x_3$ les trois points de $f^{-1}(\lambda)$. Suivant le lemme 3, le premier signe de la classe de x_1 et le deuxième signe de la classe de x_3 ne coincident pas, d'où il suit que

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lambda \leq \lim_{x \to b} f(x)$$

ou

$$\lim_{x \to b} f(x) \leq \lambda \leq \lim_{x \to a} f(x),$$

quelque soit le point λ.

Donc $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$ forment la frontière de $f((a, b))$.

Les lemmes 1 et 4 ne seront pas utilisés dans la suite et ont été établis seulement pour leur intérêt qui sera mieux compris lorsqu'on verra la liaison avec la structure de $\mathfrak{L}$.

LEMME 5. – *Si* $\mu \in \operatorname{fr} f((a, b))$, *alors* $\operatorname{card} f^{-1}(\mu) \leq 1$.

Démonstration. – Supposons qu'il y a deux points différents x_1, x_2 dans $f^{-1}(\mu)$; alors, naturellement, $x_1, x_2 \in [+, +]$ ou $x_1, x_2 \in [-, -]$. On voit alors aisément qu'on peut trouver un intervalle $I \subset \operatorname{int} f((a, b))$ ayant une extrémité dans μ, tel que $f^{-1}(\lambda)$ ait au moins quatre points différents, pour tout $\lambda \in I$, absurde.

Revenons maintenant au problème annoncé concernant la famille continue de courbes $\mathfrak{L}$.

Soit $L(p)$ une courbe de $\mathfrak{L}$ telle que

$$\operatorname{int} (L(p) \cap M_2(\mathfrak{L})) = L(p) \cap M_4(\mathfrak{L}) - M_5(\mathfrak{L}).$$

Il est facile d'établir la possibilité de l'existence d'une telle courbe dans $\mathfrak{L}$.

Désignons par A l'un des deux arcs de C ayant les extrémités p et $-p$.

Soient

$$\varphi : [a, b] \to A \quad , \quad \psi : [c, d] \to L(p)$$

deux homéomorphismes réalisant des représentations paramétriques des arcs A et $L(p)$. Evidemment l'application

$$f: \ (a, b) \to (c, d)$$

définie par $f(x) = \psi^{-1}(L(\varphi(x)) \cap L(p))$ est continue.

L'ensemble $\psi^{-1}(L(p) \cap M_2(\mathfrak{L}))$ coincide à $f((a, b))$ et

$$\psi^{-1}(L(p) \cap M_4(\mathfrak{L}) - M_5(\mathfrak{L})) = \{\lambda \in f((a, b)) : \ \operatorname{card} f^{-1}(\lambda) = 3\}.$$

En ajoutant ici que $M_\infty(\mathfrak{L}) = \varnothing$, il s'ensuit que la fonction f appartient au type étudié et les résultats des lemmes précédents seront applicables.

LEMME 6. – *Si* L *est une courbe différente de* $L(p)$ *intersectant* $L(p) \cap \cap M_4(\mathfrak{L}) - M_5(\mathfrak{L})$, *alors* $L \cap M_5(\mathfrak{L}) \neq \varnothing$.

Démonstration. – Soit $\varphi(x_1)$ l'extrémité de L située sur A. Alors il y a encore deux points $x_2, x_3 \in (a, b)$ tels que

$$L(\varphi(x_2)) \cap L(\varphi(x_3)) \cap L \cap L(p) \neq \varnothing.$$

Supposons que $x_1 < x_2 < x_3$ (les autres cas sont analogues). D'après le lemme 3, quatre situations sont possibles en ce qui concerne les classes auxquelles appartiennent x_1, x_2, x_3. Nous allons considérer seulement le cas 1) de l'énoncé du lemme cité, car les autres sont similaires.

Soit z le point de concurrence des quatre courbes et supposons par exemple que $\varphi(a) = \psi(c) = p$, $\varphi(b) = \psi(d) = -p$.

Il y a trois points $y_1 \in (a, x_1)$, $y_2 \in (x_1, x_2)$, $y_3 \in (x_3, b)$ tels que $L(p) \cap \cap L(\varphi(y_1))$ soit entre p et z sur $L(p)$, $L(p) \cap (\varphi(y_2))$ et $L(p) \cap L(\varphi(y_3))$ soient entre z et $-p$ sur $L(p)$. Alors $L \cap L(\varphi(y_1))$, $L \cap L(\varphi(y_2))$ et $L \cap L(\varphi(y_3))$ se trouvent entre z et $-\varphi(x_1)$ sur L.

Soit z' un point de L situé simultanément entre z et $L \cap L(\varphi(y_i))$ $(i = 1, 2, 3)$. D'après le lemme 1 de [1], il s'ensuit qu'il y a quatre points $p_1 \in (a, y_1)$, $p_2 \in (y_2, x_2)$, $p_3 \in (x_3, y_3)$, $p_4 \in (y_3, b)$, tels que $z' \in L(\varphi(p_i))$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Donc $z' \in L \cap M_5(\mathfrak{L})$.

LEMME 7. – *Si* L *est une courbe différente de* $L(p)$ *intersectant* fr $(L(p) \cap \cap M_2(\mathfrak{L}))$, *alors*

$$\operatorname{int}(L \cap M_2(\mathfrak{L})) - M_3(\mathfrak{L}) \neq \varnothing.$$

Démonstration. – Soit z le point commun à $L = L(x_0)$ et $L(p)$. Puisque $\psi^{-1}(z) \in \operatorname{fr} f((a, b))$, il résulte en vertu du lemme 5, qu'on a card $f^{-1}(\psi^{-1}(z)) = 1$. Donc $z \in M_2(\mathfrak{L}) - M_3(\mathfrak{L})$.

Supposons que tous les points intérieurs à $L(p) \cap M_2(\mathfrak{L})$ se trouvent entre z et $-p$ sur $L(p)$. Alors, si $x_1 \in (a, x_0)$ et $x_2 \in (x_0, b)$, le point z se trouve entre $L \cap L(\varphi(x_1))$ et $L \cap L(\varphi(x_2))$ sur L, c.-à-d. que $z \in \operatorname{int}(L \cap M_2(\mathfrak{L}))$. Par conséquent,

$$z \in \operatorname{int}(L \cap M_2(\mathfrak{L})) - M_3(\mathfrak{L}).$$

Passons à la démonstration du théorème annoncé au début de la note. En effet, si L est une courbe de $\mathfrak{L}$ différente de $L(p)$, alors soit elle contient un point de $M_5(\mathfrak{L})$, selon le lemme 6, soit elle contient un point intérieur à $L \cap M_2(\mathfrak{L})$ et par lequel passent exactement deux courbes de $\mathfrak{L}$, selon le lemme 7.

Mais, dans l'hypothèse que

$$\operatorname{int}(L \cap M_2(\mathfrak{L})) = L \cap M_4(\mathfrak{L}) - M_5(\mathfrak{L}),$$

nous aurions, selon le lemme 5,

$$\operatorname{fr}(L \cap M_2(\mathfrak{L})) \cap M_3(\mathfrak{L}) = \varnothing$$

et, évidemment,

$$\operatorname{int}\,(L \cap M_2(\mathfrak{L})) - M_3(\mathfrak{L}) = \varnothing\,,$$

en contradiction avec nos conclusions. Donc cette hypothèse faite sur L est inadmissible puisque sur une autre courbe de $\mathfrak{L}$, à savoir sur $L(p)$, la même hypothèse avait été faite.

La démonstration du théorème est achevée.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] B. GRÜNBAUM, *Continuous families of curves*, « Can. J. Math. », *18*, 529–537 (1966).
[2] T. ZAMFIRESCO, *On planar continuous families of curves*, « Can. J. Math. » (à paraître).
[3] T. ZAMFIRESCO, *Sur les familles continues de courbes* (Note I) « Rend. Lincei » (à paraître).

ROMA, 1967 — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei