REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

TIRAGE À PART

10

TOME XII

1967

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE

CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES POUR LA RÉDUCTIBILITÉ DES VOISINAGES DES CORPS CONVEXES

PAR

TUDOR ZAMFIRESCU

On étudie la réductibilité des voisinages des corps convexes. Le corollaire 2 et le théorème 3 constituent les principaux résultats obtenus.

1. Parmi les problèmes non triviaux posés par l'étude de la réductibilité dans la théorie des corps convexes, on peut noter celui d'établir la réductibilité (ou l'irréductibilité) des voisinages des corps convexes.

Pour la définition de la réductibilité, due à Preston C. Hammer, nous renvoyons à [2]. Le terme de «voisinage» est utilisé au sens de H. G. Eggleston [1].

Soit E^n l'espace euclidien à n dimensions. On voit aisément que l'ensemble $\mathcal{N}$ des voisinages de corps convexes est un idéal du monoïde de tous les corps convexes de E^n [5]. Il est connu aussi que l'ensemble $\mathcal{R}$ de tous les corps convexes réductibles est un monoïde [6]. Il suit immédiatement que l'ensemble

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{N}$$

dont nous parlerons dans le présent travail est un monoïde. Puisque tout élément $K \in \mathcal{N}$ s'écrit

$$K = L + C,$$

où L est convexe et C est une sphère $\{x : \|x\| \leqslant r\}$, on a évidemment $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ est la famille des ensembles convexes S-réductibles. Mais, la sphère C étant le domaine vectoriel de tous les corps convexes à largeur constante r, et non seulement de $(1/2)C$, on a même $\mathcal{N} \subset \mathcal{AS}$, où $\mathcal{AS}$ désigne la famille des ensembles convexes AS-réductible. Pour les définitions de l'S et de l'AS-réductibilité nous renvoyons à [5].

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., 1967, TOME XII, No 10, p. 1522–1527

2. Si le corps convexe L est réductible, alors le voisinage $K = L + C$ de L est lui aussi réductible, car $C \in \mathcal{R}$ et $\mathcal{R}$ est un monoïde. Mais l'assertion réciproque n'est pas vraie : prenons, par exemple, $n = 2$ et pour L un triangle de Reuleaux. Il résulte d'ici notre intérêt pour la recherche de conditions nécessaires et suffisantes pour la réductibilité des voisinages.

Commençons par deux résultats sur les corps convexes S-réductibles.

THÉORÈME 1. *La somme d'un corps convexe S admettant l'origine comme centre de symétrie avec un corps convexe quelconque K est réductible si et seulement s'il y a les nombres réels $\lambda \in (0,1)$, $\mu \in (0,\infty)$ et le corps convexe L tels que*

$$\lambda S + K = L - \mu K .$$

Démonstration. Supposons que l'égalité ci-dessus est vérifiée. Alors

$$S + K = L - \mu K - (1 - \lambda) S .$$

Si $\nu = \min \{\mu, 1 - \lambda\}$, alors

$$S + K = L - \nu (S + K) - (\mu - \nu) K - (1 - \lambda - \nu) S,$$

donc $S + K$ est de la forme

$$M - \nu (S + K) \qquad (\nu > 0) .$$

En vertu du théorème 2 de [5], $S + K$ est réductible.

Réciproquement, si $S + K$ est réductible, alors, selon le même théorème,

$$S + K = M - \nu (S + K) ,$$

où M est un corps convexe et ν un nombre positif. Si $\omega = \min \{1/2, \nu\}$, alors

$$\omega S + (1 - \omega) S + K = M - \omega (S + K) - (\nu - \omega) (S + K) ,$$

d'où

$$(1 - \omega) S + K = M - (\nu - \omega) (S + K) - \omega K .$$

THÉORÈME 2. *Soient S un corps convexe admettant l'origine comme centre de symétrie et K un corps convexe quelconque. La famille*

$$\mathfrak{S} (K) = \{\lambda S + K : \lambda \in (0,\infty)\}$$

contient soit seulement des corps réductibles, soit seulement des corps irréductibles.

Démonstration. Le théorème sera démontré si nous pourrons prouver que la réductibilité de $S + K$ implique la réductibilité de tous les corps de $\mathfrak{S} (K)$. Soit $S_1 + K \in \mathfrak{S} (K)$, avec $S \subset S_1$. Alors il y a $\mu > 1$, tel que $S_1 + K = \mu S + K$; donc

$$(\mu - 1) S \in \mathcal{R} ; \quad S + K \in \mathcal{R} ;$$
$$S_1 + K = (\mu - 1) S + S + K ,$$

d'où $S_1 + K \in \mathcal{R}$. Soit $S_2 + K \in \mathfrak{S} (K)$, avec $S_2 \subset S$. Alors il y a $\nu > 1$, tel que $S + K = \nu S_2 + K$. D'après le théorème 2 de [5],

$$\nu S_2 + K = M - r \nu S_2 - r K \qquad (r > 0)$$

ou

$$S_2 + (1/\nu) K = (1/\nu) M - r S_2 - (r/\nu) K ,$$

d'où

$$S_2 + K = (1/\nu) M - (r - (r/\nu)) S_2 + (1 - (1/\nu)) K - (r/\nu)(S_2 + K)$$

et, par conséquent, $S_2 + K \in \mathcal{R}$.

Corollaire 1. *Soit $\mathfrak{N}(K)$ la famille des voisinages du corps convexe K. L'élément $V \in \mathfrak{N}(K)$ est réductible si et seulement s'il y a un autre élément $W \in \mathfrak{N}(K)$, $W \subset V$, qui est de la forme $L - \mu K$ (L convexe, $\mu > 0$).*

Corollaire 2. *Les éléments de $\mathfrak{N}(K)$ sont tous soit réductibles, soit irréductibles.*

Les corollaires 1 et 2 sont des conséquences immédiates des théorèmes 1 et 2.

3. Dans la section précédente on a montré que la réductibilité ou l'irréductibilité des voisinages d'un corps convexe C ne dépend pas de la distance (au sens de Hausdorff) entre eux et C, mais seulement de la forme du corps C. Quelles sont donc les conditions nécessaires et suffisantes que ce corps C doit remplir, telles que les voisinages de C soient réductibles?

Les théorèmes 6 et 7 de [4] viennent d'apporter des conditions suffisantes pour la réductibilité des voisinages. Nous allons montrer ici que le théorème 7 de [4], légèrement modifié, représente aussi une condition nécessaire, en constituant donc le résultat cherché par nous.

Nous utiliserons les notations des dernières sections de [3] et [4].

Théorème 3. *Les voisinages de C sont réductibles si et seulement s'il existe $\eta < 1$ tel que*

$$\left\{\limsup_{i\to\infty}\left(R_{h_i}^{f_V}(x_V) + R_{l_{h_i}}^{g_V}(y_{x_V})\right);\ \lim_{h_i\to 0}\frac{\max\left\{R_{h_i}^{f_V}(x_V),\ R_{l_{h_i}}^{g_V}(y_{x_V})\right\}}{R_{h_i}^{f_V}(x_V) + R_{l_{h_i}}^{g_V}(y_{x_V})} \geqslant \eta\right\}$$

soit borné et

$$\frac{\max\left\{\left\|I_{x_V}^{f_V}\right\|,\ \left\|I_{y_{x_V}}^{g_v}\right\|\right\}}{\left\|I_{x_V}^{f_V}\right\| + \left\|I_{y_{x_V}}^{g_V}\right\|} \leqslant \eta$$

lorsque x_V et V varient.

L'énoncé du théorème 7 de [4] a été un peu modifié, mais la démonstration de la suffisance reste essentiellement la même.

Démonstration de la nécessité. Supposons que les conditions du théorème ne sont pas remplies. Nous allons prouver que, dans ce cas, le voisinage $K(C, \rho) \in \mathfrak{N}(C)$ est irréductible.

Soit $\nu \in (0, 1)$. Choisissons $\xi \in (\nu, 1)$. Alors, soit

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \limsup\limits_{i \to \infty} \left(R^{f_V}_{h_i}(x_V) + R^{g_V}_{l_{h_i}}(y_{x_V}) \right); \\ \lim\limits_{h_i \to 0} \dfrac{\max\left\{ R^{f_V}_{h_i}(x_V),\ R^{g_V}_{l_{h_i}}(y_{x_V}) \right\}}{R^{f_V}_{h_i}(x_V) + R^{g_V}_{l_{h_i}}(y_{x_V})} \geqslant \xi \end{array} \right\}$$

n'est pas borné lorsque x_V et V varient, soit

$$2) \quad \frac{\max\left\{ \left\| I^{f_V}_{x_V} \right\|, \left\| I^{g_V}_{y_{x_V}} \right\| \right\}}{\left\| I^{f_V}_{x_V} \right\| + \left\| I^{g_V}_{y_{x_V}} \right\|} > \xi$$

pour une certaine position V_1 de V et pour une certaine position de x_V.

Étudions successivement les deux cas :

1) Il existe un plan V_2, un point x_{V_2} et une suite convergente vers zéro $\{j_i\}_{i=1}^{\infty}$, tels que

$$\lim_{i \to \infty} \left(R^{f_{V_2}}_{j_i}(x_{V_2}) + R^{g_{V_2}}_{l_{j_i}}(y_{x_{V_2}}) \right) > \frac{\rho(2\nu - 1)}{\xi - \nu}$$

et

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\max\left\{ R^{f_{V_2}}_{j_i}(x_{V_2}),\ R^{g_{V_2}}_{l_{j_i}}(y_{x_{V_2}}) \right\}}{R^{f_{V_2}}_{j_i}(x_{V_2}) + R^{g_{V_2}}_{l_{j_i}}(y_{x_{V_2}})} \geqslant \xi .$$

Il résulte immédiatement que

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\max\left\{ R^{f_{V_2}}_{j_i}(x_{V_2}),\ R^{g_{V_2}}_{l_{j_i}}(y_{x_{V_2}}) \right\} + \rho}{R^{f_{V_2}}_{j_i}(x_{V_2}) + R^{g_{V_2}}_{l_{j_i}}(y_{x_{V_2}}) + 2\rho} \geqslant \nu ,$$

donc $r_{K(C_{V_2}, \rho)}$ (le nombre de réductibilité de $K(C_{V_2}, \rho)$, voir [2], [3], [4]) satisfait, selon le théorème 13 de [3], à l'inégalité

$$r_{K(C_{V_2}, \rho)} \geqslant \nu .$$

2) En vertu du même théorème de [3],

$$r_{K(C_{V_1}, \rho)} > \xi > \nu .$$

Si on utilise maintenant le théorème 2 de [4] on constate que les deux cas 1) et 2) conduisent à l'inégalité

$$r_{K(C, \rho)} \geqslant \nu .$$

Comme ν a été choisi arbitrairement dans l'intervalle $(0, 1)$, il s'ensuit que

$$r_{K(C,\rho)} = 1\,,$$

donc $K(C, \rho)$ est irréductible et le théorème est complètement démontré.

Reçu le 17 septembre 1966

Institut de Mathématiques de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie, Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. H. G. Eggleston, *Convexity*. Cambridge University Press, 1958.
2. P. C. Hammer, *Convex Bodies Associated with a Convex Body*. Proc. Amer. Math. Soc., 1951, **2**, *5*.
3. T. I. Zamfirescu, *Reducibility of Convex Bodies*. Proc. London Math. Soc., 1967.
4. — *Sur la réductibilité des corps convexes*. Math. Zeitschr., 1966.
5. — *Subsemigroups and Ideals of the Semigroup of Convex Sets* (à paraître).