Académie royale de Belgique — Koninklijke Academie van België

BULLETIN DE LA CLASSE DES SCIENCES — MEDEDELINGEN VAN DE KLASSE DER WETENSCHAPPEN

5e Série. — Tome LIII — 5de Reeks. — Boek LIII

1967 — 12

EXTRAIT — UITTREKSEL

Théorème dual concernant les Familles continues de courbes

par Tudor ZAMFIRESCO

BRUXELLES
PALAIS DES ACADÉMIES
Rue Ducale, 1

BRUSSEL
PALEIS DER ACADEMIËN
Hertogsstraat, 1

1967

Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Procès-verbal de la séance du samedi 2 décembre 1967.

Théorème dual concernant les Familles continues de courbes

par TUDOR ZAMFIRESCO (*)

M. B. Grünbaum a défini (voir [1]) la notion de famille continue de courbes, et en a fait connaître de nombreuses et belles propriétés. Dans l'article [2] nous avons généralisé cette notion, et observé que plusieurs de ces propriétés restent valables dans le cadre élargi. Le travail actuel poursuit cette étude.

On appelle *famille continue de courbes généralisée (F.C.C.G.)* l'ensemble $\mathfrak{L}$ des images du segment $I = [0,1]$ par les éléments de la famille $\mathcal{L} \subset \pi^{I}$, des homéomorphismes de I dans le plan topologique π, satisfaisant aux conditions suivantes :

i) Il existe un cercle topologique $C \subset \pi$ tel que pour chaque élément $f \epsilon \mathcal{L}$, $f((0,1))$ soit contenu dans la composante bornée D de la complémentaire de C.

ii) Pour chaque élément $f \epsilon \mathcal{L}$, $f(0)$ et $f(1)$ appartiennent à C ; pour chaque point $p \epsilon C$, il existe deux et seulement deux éléments f_p, $g_p \epsilon \mathcal{L}$ tels que $f_p(0) = g_p(1) = p$; pour tout point $p \epsilon C$, $f_p(I) = g_p(I)$. Désignons $f_p(I)$ par $L(p)$.

iii) Si $p_1, p_2 \epsilon C$, alors $L(p_1) \cap L(p_2)$ est connexe.

iv) L'application $p \to f_p$ est continue si $\mathcal{L}$ est munie de la topologie induite par la topologie compact-ouverte de π^{I}.

On observe que de la condition ii) il résulte que $f_p(t) = g_{f_p(1)}(t)$ pour tout nombre $t \epsilon I$.

$M_q(\mathfrak{L})$ désigne l'ensemble des points de D par lesquels passent au moins q courbes de $\mathfrak{L}$.

(*) Présenté par M. L. GODEAUX, le 2 décembre 1967.

On peut définir dans D une notion de convexité à l'aide de la famille $\mathfrak{L}$, à savoir $M \subset D$ est convexe si pour chaque courbe $L_\iota \in \mathfrak{L}$, $L_\iota \cap M$ est soit vide, soit connexe. Une courbe fermée Γ incluse dans D est

1° $\mathfrak{L}$-CONVEXE si la complémentaire Δ_Γ de la composante non-bornée de sa complémentaire est convexe ;

2° FORTEMENT $\mathfrak{L}$-CONVEXE si la réunion D_Γ des composantes bornées de sa complémentaire est convexe ;

3° À SENS DIRECT si $M_2(\mathfrak{L}) \subset \Delta_\Gamma$;

4° À SENS FORTEMENT DIRECT si $M_2(\mathfrak{L}) \subset D_\Gamma$.

Si $q : C \to D$ est une fonction continue, telle que $q(p) \in L(p)$ quel que soit $p \in C$, on dira que $\{ q(p) : p \in C \}$ est une COURBE FERMÉE ASSOCIÉE à $\mathfrak{L}$.

En [5] nous avons prouvé que si une courbe fermée associée à une famille continue de courbes au sens de M. Grünbaum est à sens fortement direct, elle est fortement $\mathfrak{L}$-convexe, et nous nous sommes demandé si un pareil résultat subsiste sous la forme duale, c.-à-d. si l'on remplace le sens fortement direct par le sens direct et l'$\mathfrak{L}$-convexité forte par l'$\mathfrak{L}$-convexité ordinaire. Nous allons démontrer ici que le résultat ci-dessus est valable même pour une F.C.C.G. Il sera fait usage de la topologie compact-ouverte de $\mathcal{L}$, mais tous les raisonnements de [1], [2], [3], [4], [5] gardent leur validité pour toute topologie usuelle de la famille $\mathfrak{L}$, par exemple, pour la topologie induite par la distance de Hausdorff.

SI LA COURBE FERMÉE Γ ASSOCIÉE À LA F.C.C.G. $\mathfrak{L}$ EST À SENS DIRECT, ALORS ELLE EST $\mathfrak{L}$-CONVEXE.

Raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe un point $p \in C$ et trois nombres α, β, $\gamma \in I$ tels que $\alpha < \beta < \gamma$; $f_p(\alpha), f_p(\gamma) \in \Delta_\Gamma$ et $f_p(\beta) \notin \Delta_\Gamma$. Soient

$$a = \sup \{ \alpha : f_p(\alpha) \in \Delta_\Gamma \,;\, \alpha < \beta \} \qquad (\beta \text{ fixé}),$$

$$c = \inf \{ \gamma : f_p(\gamma) \in \Delta_\Gamma \,;\, \beta < \gamma \} \,;$$

on a évidemment $f_p(a), f_p(c) \in L(p) \cap \Gamma$.

Soit t un autre point de C. Puisque $M_2(\mathfrak{L}) \subset \Delta_\Gamma$, on a

$$\max f_p^{-1}(L(p) \cap L(t)) \leqslant a$$

ou

$$\min f_p^{-1}(L(p) \cap L(t)) \geqslant c.$$

Supposons par exemple que l'on soit dans le premier cas. Soit alors t' un point de C différent de $p, f_p(1)$, t et $f_t(1)$. Si

$$\min f_p^{-1}(L(p) \cap L(t')) \geqslant c,$$

alors, en vertu du lemme 1 de Grünbaum [1], chaque point $f_p(b)$ de $L(p)$ avec

$$\max f_p^{-1}(L(p) \cap L(t)) < b < \min f_p^{-1}(L(p) \cap L(t'))$$

appartient à $M_2(\mathfrak{L})$, ce qui est absurde. Donc

$$\max f_p^{-1}(L(p) \cap L(t')) \leqslant a,$$

c.-à-d.

(1) $$\max f_p^{-1}(L(p) \cap M_2(\mathfrak{L})) \leqslant a.$$

Il résulte de là que $f_p(c) \notin M_2(\mathfrak{L})$, on a donc $q(p) = f_p(c)$ ou $q(f_p(1)) = f_p(c)$; admettons, par exemple la deuxième égalité.

Soient A et B les deux arcs de Jordan ouverts aux extrémités $p, f_p(1)$ qui composent C. Puisque

(2) $$\{ f_p(b) : a < b < c \} \not\subset \Delta_\Gamma,$$

l'un des deux arcs A ou B appartient à la frontière de la composante connexe de

$$D - \Gamma - \{ f_p(b) : b \in I - (a,c) \}$$

qui contient l'arc $\{ f_p(b) : a < b < c \}$; supposons que ce soit A.

L'existence d'un point de Γ dans la composante D_1 de $D - L(p)$ dont la frontière contient A, contredirait (1) ou (2) ; si donc $\{ x_n \}_{n=1}^\infty$ est une suite de points sur A tendant vers $f_p(1)$, on a $q(x_n) \in D - D_1$ et $q(x_n) \to f_p(c)$.

Puisque $q(x_n) \in L(x_n)$, il existe une suite $\{ c_n \}_{n=1}^\infty \subset I$ telle que $g_{x_n}(c_n) = q(x_n)$. Mais

$$\max f_p^{-1}(L(p) \cap L(x_n)) \leqslant a,$$

d'où l'existence d'une suite $\{ d_n \}_{n=1}^\infty$ telle que

1° $c_n < d_n < 1$,

2° $g_{x_n}(d_n) \in L(p)$,

3° $\sup \{ f_p^{-1}(g_{x_n}(d_n)) \}_{n=1}^{\infty} \leqslant a$.

Soit $\{ x_{n_m} \}_{m=1}^{\infty}$ une suite partielle telle que $\{ d_{n_m} \}_{m=1}^{\infty}$, $\{ g_{x_{n_m}}(d_{n_m}) \}_{m=1}^{\infty}$ et $\{ f_p^{-1}(g_{x_{n_m}}(d_{n_m})) \}_{m=1}^{\infty}$ soient toutes les trois convergentes. En vertu de la continuité de $f_p : I \to D \cup C$,

$$\lim_{m\to\infty} g_{x_{n_m}}(d_{n_m}) = f_p(\lim_{m\to\infty} f_p^{-1}(g_{x_{n_m}}(d_{n_m}))).$$

De la continuité de la fonction $p \to g_p$ dans la topologie compact-ouverte de $\mathcal{L}$ il suit que

$$\lim_{n\to\infty} g_{x_n}(c_n) = f_p(\lim_{n\to\infty} c_n)$$

et

$$\lim_{m\to\infty} g_{x_{n_m}}(d_{n_m}) = f_p(\lim_{m\to\infty} d_{n_m}).$$

La fonction f_p étant un homéomorphisme,

$$c = \lim_{n\to\infty} c_n \; ; \quad \lim_{m\to\infty} f_p^{-1}(g_{x_{n_m}}(d_{n_m})) = \lim_{m\to\infty} d_{n_m}.$$

D'après les inégalités $a < c$ et 1°,

$$a < \lim_{m\to\infty} f_p^{-1}(g_{x_{n_m}}(d_{n_m})),$$

en contradiction avec l'inégalité 3°. Le théorème énoncé se trouve ainsi établi.

Rappelons qu'on appelle SIMPLE toute courbe fermée Γ associée à $\mathfrak{L}$ telle que l'application q soit un homéomorphisme. On peut alors énoncer le nouveau théorème suivant :

Si $\mathfrak{L}$ est une famille continue de courbes (F.C.C.) au sens de M. Grünbaum, c.-à-d. une F.C.C.G. dans laquelle tout couple de courbes admet un seul point commun, et si Γ est une courbe fermée associée simple, alors pour cette courbe l' $\mathfrak{L}$-convexité et le sens direct sont des notions équivalentes.

Ce résultat est une conséquence du théorème précédent et du dernier théorème de [5].

Si $\mathfrak{L}$ est une F.C.C. et si Γ est une courbe fermée associée à sens fortement direct, alors Γ est simultanément simple, $\mathfrak{L}$-convexe et fortement $\mathfrak{L}$-convexe.

En effet, Γ est simple en vertu du Théorème 3 de [5] ; elle est aussi, évidemment, à sens direct, donc $\mathfrak{L}$-convexe, suivant le théorème précédent et, enfin, fortement $\mathfrak{L}$-convexe d'après le Théorème 4 de [5].

Nous pouvons maintenant démontrer également le théorème qui suit :

Si $\mathfrak{L}$ est une F.C.C. et si Γ est une courbe fermée associée, alors

$$\mathfrak{L}_\Gamma = \{ L(p) \cap \Delta_\Gamma : p \in C \}$$

est elle-même une F.C.C. si et seulement si Γ est à sens fortement direct.

Supposons d'abord que $\mathfrak{L}_\Gamma$ est une F.C.C. ; on a évidemment,

$$\bigcup_{p \in C} (L(p) \cap \Delta_\Gamma) = \Delta_\Gamma ;$$

la frontière ($\mathrm{fr}\,\Delta_\Gamma$) de Δ_Γ est un cercle topologique et $M_2(\mathfrak{L})$ est contenu à l'intérieur ($\mathrm{int}\,\Delta_\Gamma$) de Δ_Γ. Si l'on démontre que

$$\Gamma \cap \mathrm{int}\,\Delta_\Gamma = \phi,$$

il s'ensuivra que Γ est à sens direct. Évidemment $\mathrm{fr}\,\Delta_\Gamma \subset \Gamma$ et si l'on suppose, par absurde, qu'il y a un point de Γ dans $\mathrm{int}\,\Delta_\Gamma$, on aura

$$q^{-1}(\mathrm{fr}\,\Delta_\Gamma) \neq C ;$$

$q \mid q^{-1}(\mathrm{fr}\,\Delta_\Gamma)$ n'est alors pas un homéomorphisme et il existe par conséquent deux points $a, b \epsilon C$ tels que $q(a) = q(b) \in \mathrm{fr}\,\Delta_\Gamma$. Si $L(a) \neq L(b)$, le point commun appartiendrait à $\mathrm{fr}\,\Delta_\Gamma$, d'où $M_2(\mathfrak{L}_\Gamma) \not\subset \mathrm{int}\,\Delta_\Gamma$, ce qui est absurde. Si $L(a) = L(b)$, soit t l'autre extrémité de $L(a) \cap \Delta_\Gamma \in \mathfrak{L}_\Gamma$. Puisque $t \in \Gamma$, et que $q(a) = q(b) \neq t$, il n'y a qu'un seul point $c \in C$, différent de a et b, tel que $q(c) = t$. $L(b) \cap L(c)$ appartient alors à $\mathrm{fr}\,\Delta_\Gamma$, ce qui contredit de nouveau l'inclusion

$$M_2(\mathfrak{L}_\Gamma) \subset \mathrm{int}\,\Delta_\Gamma.$$

Supposons enfin que la courbe Γ soit à sens fortement direct. En vertu du résultat précédent, Γ est simple, et est par suite un cercle topologique. Supposons que

$$f^{-1}_{q^{-1}(p)}(p) < f^{-1}_{q^{-1}(p)}(q(f_{q^{-1}(p)}(1)))$$

pour un certain point $p \in \Gamma$; la même chose a alors lieu pour tout point de Γ. Soit

$$\mathcal{L}_\Gamma = \{ (f_\Gamma)_p : p \in \Gamma, (f_\Gamma)_p(r) =$$

$$= (1 - r) f_{q^{-1}}^{-1}(p) + r \cdot f_{q^{-1}(p)}^{-1}(q(f_{q^{-1}(p)}(1))), r \in I \}.$$

La courbe Γ, étant simple, est aussi $\mathfrak{L}$-convexe, donc

$$(f_\Gamma)_p((0,1)) \subset \Delta_\Gamma$$

pour tout $p \in \Gamma$. Si $(f_\Gamma)_p(r_0) \in \Gamma$ pour un certain nombre $r_0 \in (0,1)$, alors, $(f_\Gamma)_p$ étant un homéomorphisme,

$$(f_\Gamma)_p(0) \neq (f_\Gamma)_p(r_0) \neq (f_\Gamma)_p(1),$$

donc $M_2(\mathfrak{L}) \cap \Gamma \neq \phi$, ce qui est absurde. Par conséquent,

$$(f_\Gamma)_p((0,1)) \subset D_\Gamma$$

(ici $D_\Gamma = \operatorname{int} \Delta_\Gamma$) et la condition (i) pour que $\mathfrak{L}'_\Gamma = \{ f(I) : f \in \mathcal{L}_\Gamma \}$ soit une F.C.C.G. est établie.

La condition (ii) est évidemment remplie.

La condition (iii) est elle aussi remplie, l'intersection de deux courbes de $\mathfrak{L}$ étant un seul point.

L'application $p \to (f_\Gamma)_p$ est continue en tenant compte de la définition de $\mathcal{L}_\Gamma$, donc (iv) est remplie et $\mathfrak{L}'_\Gamma$ est une F.C.C.

Enfin, le fait que $\mathfrak{L}_\Gamma = \mathfrak{L}'_\Gamma$ est immédiat et ce dernier théorème est lui-aussi prouvé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. GRÜNBAUM, Continuous families of curves. *Can. J. Math.*, 18, 529-537 (1966).

[2] T. ZAMFIRESCO, On planar continuous families of curves. *Can. J. Math.* (à paraître).

[3] T. ZAMFIRESCO, Sur les familles continues de courbes (Note I). *Rend. Lincei*, Serie VIII, vol. XLII, 6, 771-774 (1967).

[4] T. ZAMFIRESCO, Sur les familles continues de courbes (Note II). *Rend. Lincei*, Serie VIII, vol. XLIII, 1-2, 13-17 (1967).

[5] T. ZAMFIRESCO, Sur les familles continues de courbes (Note III). *Rend. Lincei* (à paraître).