Offerto dall'Autore

SERIE II - TOMO XVIII **ANNO 1969**

RENDICONTI
DEL
CIRCOLO MATEMATICO
DI PALERMO

DIRETTORE: B. PETTINEO

TUDOR ZAMFIRESCO

Sur les points multiples d'une famille continue de courbes

Estratto

DIREZIONE E REDAZIONE:
VIA ARCHIRAFI, 34 - PALERMO (ITALIA)

SUR LES POINTS MULTIPLES D'UNE FAMILLE CONTINUE DE COURBES

par **Tudor Zamfiresco** (Bucarest, Romania)

1. Introduction

L'histoire des courbes dont nous allons parler commence certainement avec un article de Grünbaum de 1966 [4]. Mais leur préhistoire est sensiblement plus ancienne et se trouve constituée par des traveaux parmi lesquels ceux de Zindler [12], Hammer et Sobczyk [5], Zarankiewicz [11], Piegat [7], Goldberg [2], Grünbaum [3], Ceder [1], Smith [8], Menon [6]. Tous ces auteurs ont considéré et étudié des cas particuliers de ce que Grünbaum appelle *famille continue de courbes,* définie dans un cadre topologique, beaucoup plus large, dans [4]. En nous bornant d'ajouter seulement que presque tous les cas spéciaux de la préhistoire appartenaient à la géométrie des corps convexes plans, nous renvoyons pour une exposition plus complète à [4].

Soit C une courbe de Jordan fermée sur laquelle un certain sens est fixé, D la composante bornée de son complémentaire et $\mathcal{L}$ une famille d'arcs de Jordan ouverts satisfaisant aux conditions suivantes:

1^0) chaque élément de $\mathcal{L}$ se trouve dans D, à l'exception de ses extrémités, qui, par conséquent, appartiennent à C;

2^0) chaque point $p \in C$ est l'extrémité de précisément un élément $L(p) \in \mathcal{L}$;

3^0) si p_1, $p_2 \in C$ n'appartiennent pas à un même élément de $\mathcal{L}$, alors $L(p_1) \cap L(p_2)$ est formée d'un seul point;

4^0) $L(p)$ dépend continûment de $p \in C$.

$\mathcal{L}$ est appelée *famille continue de courbes* et ses éléments *courbes.*

N signifiera l'ensemble des nombres naturels ($\geqslant 1$). $N_2 = N - \{1\}$.

Désignons par $-p$ l'extrémité de $L(p)$ différente de p.

Si l'intersection de trois courbes de $\mathcal{L}$ est vide, alors la composante bornée du complémentaire de leure réunion est appelée *triangle.* Soit T la réunion de tous les triangles.

Soit α un nombre cardinal. Définissons

$$M_\alpha(\mathcal{L}) = \bigcup_{\operatorname{card} A = \alpha} \bigcap_{p \in A} L(p)$$

et soit $M_f(\mathcal{L})$ l'ensemble des points $x \in D$ avec la propriété qu'il existe un arc non-dégénéré $\gamma_x \subset C$ tel que $x \in \bigcap_{p \in \gamma_x} L(p)$. Evidemment,

$$M_f(\mathcal{L}) \subset M_{\mathfrak{c}}(\mathcal{L}) \subset M_{\aleph_0}(\mathcal{L}) \subset M_n(\mathcal{L}) \subset M_1(\mathcal{L}) = D \qquad (n \in N_2).$$

Soit maintenant $p \in C$. $L(p)$ et l'arc des points rencontrés en parcourant C dans le sens fixé de p à $-p$ forment une courbe de Jordan fermée, dont la composante bornée du complémentaire sera notée par $\Phi_d(p)$. Soit encore

$$\Phi_g(p) = D - \overline{\Phi_d(p)}.$$

Nous allons continuer dans le travail présent la suite de certaines investigations de [4] et [10]. Notre attention sera principalement concentrée sur les relations entre les ensembles $M_n(\mathcal{L})$ et T. Un type intéressant d'alternative observé déjà par Grünbaum dans [4] sera également discuté et quelques résultats le mettant en évidence seront présentés.

2. Un type d'alternative

Le type d'alternative présent chez Steinhaus [9] se retrouve dans le corollaire 3 de Grünbaum [4], d'après lequel $M_3(\mathcal{L})$ soit contient un point de $M_{\mathfrak{c}}(\mathcal{L})$, soit contient $\mathfrak{c}$ points différents. Puisque $M_2(\mathcal{L})$ est un "$L_2(\mathcal{L})$*-set*", c.-à-d. que pour tout couple de points x, $y \in M_2(\mathcal{L})$ il y a deux points $a, b \in C$ et un arc γ joignant x avec y, tels que

$$\gamma \subset (L(a) \cup L(b)) \cap M_2(\mathcal{L})$$

(pour une démonstration voir le théorème 3 de Grünbaum [4]), si $\operatorname{card} M_2(\mathcal{L}) \geqslant 2$, alors $\operatorname{card} M_2(\mathcal{L}) = \mathfrak{c}$. D'autre part, si $M_2(\mathcal{L})$ contient un seul point p, alors évidemment $p \in M_{\mathfrak{c}}(\mathcal{L})$, ainsi que le même type d'alternative reste valable à l'égard de $M_2(\mathcal{L})$.

Plus significatif du point de vue topologique est pourtant le type suivant d'alternative (formulé ici pour $M_3(\mathcal{L})$ et démontré plus loin), qui en essence ne diffère pas de celui que nous venons de rappeler:

On a l'alternative: soit $M_f(\mathcal{L}) \neq \emptyset$, *soit* $\operatorname{int} M_3(\mathcal{L}) \neq \emptyset$.

Qu'est ce qu'on peut dire en général, sur les $M_n(\mathcal{L})$? Une formulation tout à fait similaire de l'alternative serait évidemment incorrecte, parce que $M_n(\mathcal{L})$ peut être vide pour $n \geqslant 4$. Mais on a le

THÉORÈME 1. *Soit* $n \in N_2$. *Si* $M_n(\mathcal{L}) \neq \emptyset$ *(condition automatiquement remplie si* $n = 2$ *ou* 3), *alors soit* $M_f(\mathcal{L}) \neq \emptyset$, *soit* $\operatorname{int} M_n(\mathcal{L}) \neq \emptyset$.

Démonstration. Nous nous baserons sur le théorème 2 de [10]. En supposant que $M_f(\mathcal{L}) = \emptyset$, nous allons prouver que $\operatorname{int} M_n(\mathcal{L}) \neq \emptyset$. Si n est un nombre paire, alors $M_n(\mathcal{L}) - M_f(\mathcal{L}) \neq \emptyset$ et selon le théorème mentionné, $\operatorname{int} M_{n+1}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$, d'où $\operatorname{int} M_n(\mathcal{L}) \neq \emptyset$. Si n est impaire, alors de l'inclusion $M_n(\mathcal{L}) \subset M_{n-1}(\mathcal{L})$ il résulte que $M_{n-1}(\mathcal{L}) - M_f(\mathcal{L}) \neq \emptyset$ et en appliquant de nouveau le même théorème, on retrouve que $\operatorname{int} M_n(\mathcal{L}) \neq \emptyset$.

Nous reviendrons dans le dernier chapitre au sujet de ces alternatives.

3. RELATIONS ENTRE $M_2(\mathcal{L})$, $M_3(\mathcal{L})$ ET T

Du lemme 3 de Grünbaum [4], qui affirme que pour tout point $x \in M_2(\mathcal{L})$ il existe un triangle Δ tel que $x \in \bar{\Delta}$ (si $\cap\, \mathcal{L} = \emptyset$), il s'en suit que $M_2(\mathcal{L}) \subset \bar{T}$, d'où $\operatorname{int} M_2(\mathcal{L}) \subset \operatorname{int} \bar{T}$. Le lemme 2 de Grünbaum [4] montre que $T \subset M_3(\mathcal{L})$, d'où $T \subset M_2(\mathcal{L})$. Il résulte de là que

$$T \subset \operatorname{int} M_2(\mathcal{L}) \subset \operatorname{int} \bar{T}.$$

Nous allons préciser la situation en démontrant le

THÉORÈME 2. $\operatorname{int} M_2(\mathcal{L}) = T$.

Démonstration. Il reste à prouver que $\operatorname{int} M_2(\mathcal{L}) \subset T$.

Soit $a \in \operatorname{int} M_2(\mathcal{L})$. Il y a alors deux points $x, y \in C$ tels que $x, y, -x, -y$ soient rencontrés dans cet ordre lorsque C est parcouru dans le sens fixé et que

$$L(x) \cap L(y) = \{a\}.$$

Puisque

$$a \in \operatorname{int} (L(x) \cap M_2(\mathcal{L})),$$

il y a deux points (différents de a)

$$b, c \in L(x) \cap M_2(\mathcal{L})$$

tels que x, b, a, c, $-x$ se trouvent dans cet ordre sur $L(x)$. Soient u_1, $u_2 \in C$ tels que

$$L(u_1) \cap L(x) = \{b\}; \qquad L(u_2) \cap L(x) = \{c\}.$$

Si u_1 et u_2 sont séparés par précisément une des quatre extrémités des courbes $L(x)$ et $L(y)$, alors on peut supposer sans altérer la généralité de la démonstration que $u_1 \in xy$ et $u_2 \in y(-x)$. Dans le cas contraire, il existe une autre courbe passant par a qui peut être prise comme $L(y)$, de façon que l'on peut de nouveau supposer que u_1 et u_2 se trouvent respectivement sur xy et $y(-x)$.

Soit $u_3 \in u_1 u_2$ le point le plus proche de u_2 tel que pour tout voisinage $U \subset C$ de u_3, il existe un point $z \in U$ avec

$$L(z) \cap \operatorname{int} xa \neq \emptyset.$$

Evidemment, $a \in L(u_3)$. Soit encore $u_4 \in u_3 u_2$ le point le plus proche de u_2 tel que $a \in L(u)$ pour tout $u \in u_3 u_4$ (l'arc $u_3 u_4$ n'est pas dégénéré seulement si $a \in M_f(\mathcal{L})$).

Puisque

$$a \in \operatorname{int}(L(u_3) \cap M_2(\mathcal{L})),$$

il y a deux points (différents de a)

$$d, e \in L(u_3) \cap M_2(\mathcal{L})$$

tels que les points u_3, d, a, e, $-u_3$ se trouvent dans cet ordre sur $L(u_3)$. Soient v_1, v_2 deux points dans l'intérieur de l'arc $u_3(-u_3) \subset C$ (celui passant par u_2 et $-x$), tels que

$$L(v_1) \cap L(u_3) = \{d\}; \qquad L(v_2) \cap L(u_3) = \{e\}.$$

Ces points appartiennent à l'intérieur de l'arc $u_4(-u_3)$ car

$$L(v) \cap L(u_3) \not\subset \{d, e\}$$

pour tout point $v \in u_3 u_4$.

Choisissons les voisinages $V_i \subset C$ de u_i $(i = 3, 4)$ tels qu'ils soient connexes et que

$$\{v_1, v_2, -v_1, -v_2\} \cap (V_3 \cup V_4) = \emptyset$$

et trouvons les points $w_3 \in V_3$ et $w_4 \in V_4$ tels que

$$a \in \Phi_d(w_3) \cap \Phi_g(w_4).$$

Il s'en suit du théorème de Jordan que

$$L(v_1) \cap L(v_2) \subset (\Phi_g(u_3) \cap \Phi_g(u_4)) \cup (\Phi_d(u_3) \cap \Phi_d(u_4)).$$

En effet, en supposant, par l'absurde, que l'inclusion précédente ne serait pas vraie, on aurait l'un des cas suivants:

a) $L(v_1) \cap L(v_2) \subset L(u_3)$, d'où

$$L(v_1) \cap L(u_3) = L(v_2) \cap L(u_3)$$

ce qui signifierait que $d = e$, absurde.

b) (*) $L(v_1) \cap L(v_2) \subset \operatorname{int} a\, u_4$, d'où $L(v_1)$ et $L(v_2)$ intersectent $\Phi_d(u_3) \cap \Phi_g(u_4)$ (autrement, selon le théorème de Jordan, $L(v_1)$ ou $L(v_2)$ rencontrerait une deuxième fois $L(u_4)$ dans un point du sous-arc $a(-u_4)$). En appliquant de nouveau le théorème de Jordan et en tenant compte que chacune des courbes $L(v_1)$ et $L(v_2)$ ne peut couper $L(u_4)$ que dans un seul point, on a

$$L(v_i) \cap a\, u_3 \neq \emptyset \qquad (i = 1,\ 2).$$

Mais d'ici il résulterait que e n'appartient ni à $L(v_1)$, ni à $L(v_2)$, ce qui est absurde.

c) $L(v_1) \cap L(v_2) \subset \operatorname{int} a(-u_4)$ (voir b)).

d) $L(v_1) \cap L(v_2) \subset \Phi_d(u_3) \cap \Phi_g(u_4)$ (si le membre droit n'est pas vide). La démonstration découle comme au point b).

e) $L(v_1) \cap L(v_2) \subset \Phi_d(u_4) \cap \Phi_g(u_3)$ (si le membre droit n'est pas vide). Pour une démonstration de l'absurdité, voir d).

Si

$$L(v_1) \cap L(v_2) \subset \Phi_g(u_3) \cap \Phi_g(u_4),$$

alors a se trouve dans le triangle déterminé par $L(v_1)$, $L(v_2)$ et $L(w_4)$. Si

$$L(v_1) \cap L(v_2) \subset \Phi_d(u_3) \cap \Phi_d(u_4),$$

alors a se trouve dans le triangle déterminé par $L(v_1)$, $L(v_2)$ et $L(w_3)$. Donc, de toute façon, $a \in T$.

COROLLAIRE. *Pour tout* $n \in N_2$, *on a* $\operatorname{int} M_n(\mathcal{L}) \subset T$.

THÉORÈME 3. *On a les égalités:*

$$\operatorname{int} M_2(\mathcal{L}) = \operatorname{int} M_3(\mathcal{L}) = T; \qquad \operatorname{bd} M_2(\mathcal{L}) = \operatorname{bd} M_3(\mathcal{L}).$$

Si, en outre, $\cap \mathcal{L} = \emptyset$, *alors*

$$\operatorname{bd} M_2(\mathcal{L}) = \operatorname{bd} M_3(\mathcal{L}) = \operatorname{bd} T.$$

(*) Les cas b)-e) sont à considérer seulement si $u_3 \neq u_4$.

Démonstration. Si $\cap \mathcal{L} \neq \emptyset$, alors

$$\operatorname{int} M_2(\mathcal{L}) = \operatorname{int} M_3(\mathcal{L}) = T = \emptyset$$

et

$$\operatorname{bd} M_2(\mathcal{L}) = \operatorname{bd} M_3(\mathcal{L}) = \cap \mathcal{L}.$$

Supposons maintenant que $\cap \mathcal{L} = \emptyset$. Selon les résultats de Grünbaum mentionnés avant le théorème 2, on a d'un côté $M_3(\mathcal{L}) \subset M_2(\mathcal{L}) \subset \overline{T}$, d'où

$$\overline{M_3(\mathcal{L})} \subset \overline{M_2(\mathcal{L})} \subset \overline{T}$$

et de l'autre côté $T \subset M_3(\mathcal{L})$, d'où

$$\overline{T} \subset \overline{M_3(\mathcal{L})};$$

par conséquent

$$\overline{M_2(\mathcal{L})} = \overline{M_3(\mathcal{L})} = \overline{T}.$$

De $T \subset M_3(\mathcal{L})$ il s'en suit aussi que

$$T \subset \operatorname{int} M_3(\mathcal{L}).$$

De l'inclusion évidente $M_3(\mathcal{L}) \subset M_2(\mathcal{L})$, on a

$$\operatorname{int} M_3(\mathcal{L}) \subset \operatorname{int} M_2(\mathcal{L}),$$

et selon le théorème 2

$$\operatorname{int} M_2(\mathcal{L}) = T;$$

par conséquent

$$\operatorname{int} M_2(\mathcal{L}) = \operatorname{int} M_3(\mathcal{L}) = T.$$

Il résulte aussi que les frontières de $M_2(\mathcal{L})$, $M_3(\mathcal{L})$ et T coïncident et le théorème 3 est prouvé.

4. Relations entre $M_n(\mathcal{L})$ et T

Selon le théorème 3, l'inclusion $M_2(\mathcal{L}) \subset \overline{T}$ s'écrit aussi

$$M_2(\mathcal{L}) \subset T \cup \operatorname{bd} M_3(\mathcal{L})$$

(si $\cap \mathcal{L} \neq \emptyset$, alors $M_2(\mathcal{L}) = \operatorname{bd} M_3(\mathcal{L}) = \cap \mathcal{L}$).

Nous allons généraliser cette inclusion, en prouvant le théorème suivant (voir son corollaire 1):

THÉORÈME 4. *Pour tout $n \in N_2$, on a*

$$M_n(\mathcal{L}) \subset T \cup M_f(\mathcal{L}) \cup \operatorname{bd} \operatorname{int} M_{2n-1}(\mathcal{L}).$$

Démonstration. Soit $a \in M_n(\mathcal{L})$ et supposons que $a \notin M_f(\mathcal{L})$. Alors il y a $2n+1$ points

$$x_1,\ y_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_n,\ x_{n+1} \in C,$$

tels que

$$\bigcap_{i=1}^{n} L(x_i) = \{a\}; \qquad x_{n+1} = -x_1;$$

$$y_i \in x_i x_{i+1}; \qquad a \notin L(y_i) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Définissons la fonction $h\colon \{1, \ldots, n\} \to \{-1, 1\}$ par

$$h(i) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \in \Phi_g(y_i) \\ -1 & \text{si} \quad a \in \Phi_d(y_i) \end{cases}$$

et convenons de dire qu'on a la situation $(h(1), \ldots, h(n))$.

LEMME 1. *La situation* $(-h(n), h(1), \ldots, h(n-1))$ *se réduit à la situation* $(h(1), \ldots, h(n))$.

En effet, si l'on renote (note) les points x_i avec x_{i-1} $(i = 2, \ldots, n+1)$, $-x_2$ avec x_{n+1}, y_j avec y_{j-1} $(j = 2, \ldots, n)$ et $-y_1$ avec y_n, alors la situation $(-h(n), h(1), \ldots, h(n-1))$ se transforme en $(h(1), \ldots, h(n))$.

LEMME 2. *Si la variation totale de* h *est supérieure à* 2, *alors* $a \in T$.

Si la variation totale de h est supérieure à 2, alors il y a trois nombres $p_1, p_2, p_3 \in N$ tels que $p_1 < p_2 < p_3 \leqslant n$ et

$$h(p_1) = h(p_3) \neq h(p_2),$$

c.-à-d. que soit

$$a \in \Phi_g(y_{p_1}) \cap \Phi_d(y_{p_2}) \cap \Phi_g(y_{p_3}),$$

soit

$$a \in \Phi_d(y_{p_1}) \cap \Phi_g(y_{p_2}) \cap \Phi_d(y_{p_3}).$$

En tout cas, a appartient à l'intérieur du triangle déterminé par $L(y_{p_1})$, $L(y_{p_2})$ et $L(y_{p_3})$, d'où $a \in T$.

LEMME 3. *Si la variation totale de* h *est* 0 *ou* 2, *alors la situation se réduit à* $(1, 1, \ldots, 1)$.

Si la variation totale de h ne dépasse pas 2, alors la situation est

$$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, -1, \ldots, -1) \qquad (0 \leqslant k < n)$$

ou

$$(\underbrace{-1, \ldots, -1}_{l}, 1, \ldots, 1) \qquad (0 \leqslant l < n).$$

On obtient la situation désirée en appliquant m fois le lemme 1, où $m = k + n$ dans le premier cas, ou $m = l$ dans le second.

Selon les lemmes 2 et 3 il nous reste pour accomplir la démonstration du théorème, de prouver que dans la situation (1, 1, ..., 1),

$$a \in T \cup \operatorname{bd} \operatorname{int} M_{2n-1}(\mathcal{L}).$$

Soit V un voisinage ouvert et connexe de a disjoint de chaque courbe $L(y_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Alors, selon le lemme 1 de Grünbaum [4], pour tout point $b \in W$, où

$$W = V \cap \Phi_g(x_1) \cap \Phi_d(x_2),$$

on peut trouver $z_i \in y_i x_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ et $z_{n+j-1} \in x_j y_j$ $(j = 2, \ldots, n)$ tels que

$$\bigcap_{i=1}^{2n-1} L(z_i) = \{b\}.$$

Puisque $a \in \operatorname{bd} W$ et $W \subset M_{2n-1}(\mathcal{L})$, il s'en suit que

$$a \in \overline{\operatorname{int} M_{2n-1}(\mathcal{L})}.$$

En vertu du corollaire du théorème 2, $\operatorname{int} M_{2n-1}(\mathcal{L}) \subset T$, d'où

$$a \in T \cup \operatorname{bd} \operatorname{int} M_{2n-1}(\mathcal{L})$$

et le théorème 4 est complètement prouvé.

Puisque

$$M_f(\mathcal{L}) \subset M_{2n-1}(\mathcal{L}) \subset \operatorname{int} M_{2n-1}(\mathcal{L}) \cup \operatorname{bd} M_{2n-1}(\mathcal{L}) \subset T \cup \operatorname{bd} M_{2n-1}(\mathcal{L})$$

(selon le corollaire du théorème 2) et

$$\operatorname{bd} \operatorname{int} M_{2n-1}(\mathcal{L}) \subset \operatorname{bd} M_{2n-1}(\mathcal{L}),$$

on a le

COROLLAIRE 1. *Pour tout $n \in N_2$,*

$$M_n(\mathcal{L}) \subset T \cup \operatorname{bd} M_{2n-1}(\mathcal{L}).$$

Du théorème 4 il s'en suit qu'on peut également formuler l'alternative suivante:

COROLLAIRE 2. *Si* $n \in N_2$ *et* $M_n(\mathcal{L}) - T \neq \emptyset$, *alors soit* $M_f(\mathcal{L}) \neq \emptyset$, *soit* int $M_{2n-1}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$.

Une alternative plus similaire à celle établie par Steinhaus et par Grünbaum dans certaines circonstances et évoquée par nous avant le théorème 1 constituera un troisième corollaire du théorème 4.

Notons

$$M_\alpha^*(\mathcal{L}) = M_\alpha(\mathcal{L}) - T,$$

où α est un nombre cardinal.

COROLLAIRE 3. *Si* $\log_2(m-1) \in N$ *et* $M_m^*(\mathcal{L}) = \emptyset$ *impliquent* $M_m(\mathcal{L}) = \emptyset$, *alors soit* $M_{\aleph_0}^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset$, *soit* card $M_n^*(\mathcal{L}) \geqslant \aleph_0$ *pour tout* $n \in N$.

Donnons une démonstration au corollaire 3. Supposons à cet effet que $M_{\aleph_0}^*(\mathcal{L}) = \emptyset$ et prouvons que, dans les conditions du corollaire, $M_n^*(\mathcal{L})$ contient une suite infinie de points, quel que soit n. Définissons la suite de points $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ de la manière suivante: Puisque $M_{\aleph_0}^*(\mathcal{L}) = \emptyset$, on a $\cap \mathcal{L} = \emptyset$, d'où $T \neq \emptyset$ donc on a aussi $M_3(\mathcal{L}) \neq \emptyset$, d'où $M_3^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset$ et choisissons $a_1 \in M_3^*(\mathcal{L})$. Si (en procédant par induction) le point a_i a déjà été choisi dans $M_{2^i+1}^*(\mathcal{L})$, alors selon le théorème 4,

$$a_i \in (M_f(\mathcal{L}) - T) \cup \text{bd int} M_{2^{i+1}+1};$$

mais $M_{\aleph_0}^*(\mathcal{L}) = \emptyset$ implique $M_f(\mathcal{L}) - T = \emptyset$, donc int $M_{2^{i+1}+1}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$, d'où, en fin, $M_{2^{i+1}+1}^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset$ et l'on choisit $a_{i+1} \in M_{2^{i+1}+1}^*(\mathcal{L})$.

S'il existe une suite partielle $\{a_{q_i}\}_{i=1}^\infty$ de la suite définie auparavant, dont tous les termes coïncident, alors $a_{q_1} \in M_{2^i+1}^*(\mathcal{L})$ pour tout $i \in N$, c.-à-d. que $a_{q_1} \in M_{\aleph_0}^*(\mathcal{L})$, ce qui est absurde. Donc $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ a une infinité de points distincts. Il s'en suit que pour tout $n \in N$, la suite partielle $\{a_{n+i}\}_{i=1}^\infty$ a une infinité de points distincts. D'autre part,

$$a_{n+i} \in M_{2^{n+i}+1}^*(\mathcal{L}); \qquad M_{2^{n+i}+1}^*(\mathcal{L}) \subset M_n^*(\mathcal{L}).$$

Donc card $M_n^*(\mathcal{L}) \geqslant \aleph_0$.

Bochum (Germania), Avril 1969.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Ceder, *On outwardly simple line families,* Can. J. Math. *16* (1964), 1-11.

[2] M. Goldberg, *On area-bisectors of plane convex sets,* Amer. Math. Monthly *70* (1963), 529-531.

[3] B. Grünbaum, *Measures of symmetry for convex sets,* Proc. Symp. Pure Math. *7 (Convexity)* (1963), 233-270.

[4] B. Grünbaum, *Continuous families of curves,* Can. J. Math. *18* (1966), 529-537.

[5] P. C. Hammer and A. Sobczyk, *Planar line families I, II,* Proc. Amer. Math. Soc. *4* (1953), 226-233, 341-349.

[6] V. V. Menon, *A theorem on partitions of mass-distributions,* Pacific J. Math. *16* (1966), 133-137.

[7] E. Piegat, *O srednicach figur wypuklych plaskich,* Roczn. Polsk. Towarz. Mat., Ser. 2 7 (1963), 51-56.

[8] T. J. Smith, *Planar line families,* Ph. D. Thesis, University of Wisconsin, 1961.

[9] H. Steinhaus, *Quelques applications des principes topologiques à la géométrie des corps convexes,* Fund. Math. 41 (1955), 284-290.

[10] T. Zamfiresco, *On planar continuous families of curves,* Can. J. Math. *21* (1969), 513-530.

[11] K. Zarankiewicz, *Bisection d'ensembles convexes plans par des droites,* Wiadom. Mat., Ser. 2, *2* (1959), 228-234 (en polonais).

[12] K. Zindler, *Über konvexe Gebilde I, II, III,* Monatsh. Math. *30* (1920), 87-102; *31* (1921), 25-56; *32* (1922), 107-138.