ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Estratto dai *Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*
Serie VIII, vol. XLIX, fasc. 1-2 (Luglio-Agosto) - Ferie 1970

Matematica. — *Sur quelques généralisations par F. Browder du principe de contraction de Picard-Banach.* Nota (*) di TUDOR ZAMFIRESCO, presentata dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

RIASSUNTO. — Questa Nota riguarda una generalizzazione del ben noto teorema di contrazione di Picard–Banach impiegando preliminarmente risultati di F. Browder e R. Cacciopoli.

En 1967 M. Felix Browder a fait publier dans [1] un nombre de généralisations du bien connu théorème de Picard–Banach. Voici la première d'entre elles:

Soient X *un espace métrique complet,* M *un sous-ensemble borné de* X, T *une application de* M *dans* M. *Supposons qu'il existe une fonction croissante* $\psi : \{0\} \cup R_+ \rightarrow R_+$ *continue à droite, telle que* $\psi(r) < r$ *pour tout* $r > 0$ *et*

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y))$$

pour tous $x, y \in M$ (R_+ *étant l'ensemble des nombres réels strictement positifs et* d *la distance dans* X).

Alors: Pour tout $x_0 \in M$, $\{T^n x_0\}$ *converge vers un élément* $\xi \in X$ *indépendent de* x_0 *et* $d(T^n x_0, \xi) \leq \psi^n(d_0)$, *où* d_0 *est le diamètre de* M, ψ^n *la n-ième itérée de* ψ *et* $\psi^n(d_0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$.

L'attention dans cette généralisation a évidemment été dirigée vers la fonction ψ. Dans la note présente, cette fonction va paraître sous une forme encore plus générale. Aussi, nous allons améliorer l'inégalité de contraction (qui, naturellement, va admettre des dilatations temporaires, suivant l'idée de Cacciopoli [2]). Puisque nous nous bornerons ici à l'aspect qualitatif du théorème, il est bon de rappeler également le théorème suivant de Rakotch [3]:

Soient X *un espace métrique complet,* M *un sous-ensemble de* X, T *une application de* M *dans* M. *Supposons que pour chaque* $s > 0$, *il existe* $\psi(s) < s$ *tel que pour* $x, y \in M$ *avec* $x \neq y$,

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)).$$

Supposons encore que $s^{-1}\psi(s)$ *est décroissante en* s *pour* $s > 0$. *Alors pour tout* $x_0 \in M$, $\{T^n x_0\}$ *converge dans* X.

Le fait que $s^{-1}\psi(s)$ est décroissante est ici utilisé seulement afin de prouver que l'orbite de x_0 est bornée.

Ajoutons maintenant que R_+ et N désigneront respectivement l'ensemble des nombres réels strictement positifs et celui des nombres naturels et passons à l'ennoncé et à la démonstration de notre principal résultat.

(*) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1970.

Soient X *un espace métrique complet,* $M \subset X$, $T : M \to M$ *une fonction qui n'est involutive dans aucun point de* M, $p, q : M \times M \to N$, $\psi : R_+ \to R_+$. *Si*

$$\max \{\psi(r), \limsup_{t \to r} \psi(t)\} < r$$

pour tout $r \in R_+$ *et*

$$p(Tx, y) = p(x, Ty) = p(x, y),$$

$$q(Tx, y) = q(x, Ty) = q(x, y),$$

$$d(T^{p(x,y)} x, T^{q(x,y)} y) \leq \psi(d(x, y))$$

pour chaque couple de points différents $x, y \in M$ *(d étant la distance dans* X*), alors pour tout* $x_0 \in M$ *dont l'orbite est bornée,* $\{T^n x_0\}$ *converge vers un élément de* X*, indépendent de* x_0.

Démonstration: La fonction $\varphi : R_+ \to R_+$ definie par

$$\varphi(r) = \lim_{t \to r+} \sup_{s \leq t} \psi(s)$$

est croissante et continue à droite. Aussi,

$$\psi(r) \leq \varphi(r) < r \qquad (r \in R_+).$$

Soit $x \in M$, d'orbite bornée. Si

$$\lambda_n = \sup_{j,k \geq n} d(T^j x, T^k x),$$

alors, évidemment, la suite $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ est décroissante. Prouvons qu'elle contient une suite partielle convergente vers zéro.

Les fonctions p et q sont constantes sur tout produit cartésien de deux orbites, sauf, peut-être, sur le couple des têtes des orbites si celles-ci sont identiques. En effet, si les points x et y ont leurs orbites complètement disjointes, alors, si nous nous concentrons par exemple sur la fonction p, nous voyons (par induction) que:

$$p(T^n x, T^m y) = p(x, T^m y) = p(x, y).$$

Si $T^a x = T^b y$, où a et b sont minimaux et $a > 0$ (le cas $b > 0$ est analogue) et si l'on note avec n' et m' les nombres minimaux tels que $T^n x = T^{n'} x$ et $T^m y = T^{m'} y$, alors pour $n - a \leq m - b$

$$p(T^n x, T^m y) = p(T^{n'} x, T^{m'} y) = p(x, T^{m'} y) = p(x, y)$$

et pour $n - a > m - b$

$$p(T^n x, T^m y) = p(T^{n'} x, T^{m'} y) = p(T^{n'} x, T^{b+n'-a} y) =$$

$$= p(x, T^{b+n'-a} y) = p(x, y).$$

Si, en fin, $x = y$, alors pour x et Ty nous sommes dans la situation précédente, c.-à-d. que

$$p(T^n x, T^m y) = p(x, Ty)$$

pour $n \geq 0$, $m > 0$. Aussi,

$$p(T^n x, y) = p(T^n x, Ty) = p(x, Ty)$$

pour $n > 0$. De façon identique on procède à l'égard de q.

Supposons qu'il existe une orbite dont les éléments ne sont pas tous différents. Alors il y a un point $w \in M$ tel que $T^n w = w$, où n est un nombre naturel, supposé minimal. On a $n \geq 3$ parce que T n'est pas une involution dans w. Sur le produit cartésien de la sous-orbite commençant en w avec elle-même, p et q sont constantes, sans exceptions. Evidemment, au moins une des deux inégalités

$$p \neq q + 1 \pmod{n} \quad ; \quad p \neq q + 2 \pmod{n}$$

est valable. Si

$$v = \begin{cases} Tw & si \quad p \neq q + 1 \pmod{n} \\ T^2 w & si \quad p = q + 1 \pmod{n}, \end{cases}$$

alors, pour tout $m \in N$,

$$T^{m(p+q)-p} v \neq T^{m(p+q)-q} w,$$

d'où

$$d(T^{m(p+q)} v, T^{m(p+q)} w) \leq \psi(d(T^{m(p+q)-p} v, T^{m(p+q)-q} w)).$$

Aussi,

$$d(T^{m(p+q)-q} w, T^{m(p+q)-p} v) \leq \psi(d(T^{(m-1)(p+q)} w, T^{(m-1)(p+q)} v)),$$

car

$$T^{(m-1)(p+q)} w \neq T^{(m-1)(p+q)} v.$$

Donc

$$d(T^{m(p+q)} v, T^{m(p+q)} w) < d(T^{(m-1)(p+q)} v, T^{(m-1)(p+q)} w).$$

Par induction, on obtient

$$\begin{aligned} d(v, w) &= d(T^{n(p+q)} v, T^{n(p+q)} w) \\ &< d(T^{(n-1)(p+q)} v, T^{(n-1)(p+q)} w) \\ &< \cdots < d(v, w), \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Il s'ensuit que toute orbite consiste de points différents.

Revenons maintenant à l'orbite de x. Puisque les fonctions p et q sont constantes sur $\{T^n x\}_{n=1}^{\infty} \times \{T^n x\}_{n=1}^{\infty}$, notons ici avec les mêmes lettres p et q ces constantes et soit

$$Q = \max\{p, q\}.$$

Alors,

$$\lambda_{n+Q} = \sup_{j,k\geq n} d\,(T^{j+Q}\,x\,,\,T^{k+Q}\,x)\,.$$

Considérons un terme arbitraire

$$d\,(T^{j+Q}\,x\,,\,T^{k+Q}\,x),$$

où $j \neq k$. Notons

$$y_1 = T^{j+Q-p}\,x \quad , \quad y_2 = T^{k+Q-q}\,x\,,$$
$$z_1 = T^{k+Q-p}\,x \quad , \quad z_2 = T^{j+Q-q}\,x\,.$$

Si j et k sont tels que

$$j - p \neq k - q\,,$$

alors $y_1 \neq y_2$ parce que y_1 et y_2 font partie d'une même orbite. Danc ce cas,

$$d\,(T^{j+Q}\,x\,,\,T^{k+Q}\,x) = d\,(T^p\,y_1\,,\,T^q\,y_2) \leq \psi\,(d\,(y_1\,,\,y_2))\,.$$

Si j et k sont tels que

$$j - p = k - q\,,$$

alors $k - p \neq j - q$, donc $z_1 \neq z_2$ et

$$\begin{aligned} d\,(T^{j+Q}\,x\,,\,T^{k+Q}\,x) &= d\,(T^{k+Q}\,x\,,\,T^{j+Q}\,x) \\ &= d\,(T^p\,z_1\,,\,T^q\,z_2) \\ &\leq \psi\,(d\,(z_1\,,\,z_2))\,. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lambda_{n+Q} &\leq \sup_{j,k\geq n} \psi\,(d\,(T^j\,x\,,\,T^k\,x)) \\ &\leq \sup_{j,k\geq n} \varphi\,(d\,(T^j\,x\,,\,T^k\,x)) \\ &\leq \varphi\,(\sup_{j,k\geq n} d\,(T^j\,x\,,\,T^k\,x)) \\ &= \varphi\,(\lambda_n)\,. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$0 \leq \lambda_{mQ} \leq \varphi^m\,(\lambda_0)\,.$$

Puisque la suite $\{\varphi^m\,(\lambda_0)\}_{m=1}^{\infty}$ est décroissante, elle est convergente:

$$\varphi^m\,(\lambda_0) \to \lambda_\infty \geq 0\,.$$

Supposons que $\lambda_\infty > 0$; alors, d'après la continuité à droite de φ,

$$\varphi\,(\varphi^m\,(\lambda_0)) \to \varphi\,(\lambda_\infty)\,, \qquad \text{c.-à-d.} \quad \varphi\,(\lambda_\infty) = \lambda_\infty\,,$$

ce qui contredit l'une des propriétés de φ. Donc $\lambda_\infty = 0$ et

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_{mQ} = 0 .$$

Nous avons donc trouvé la suite partielle $\{\lambda_{mQ}\}_{m=1}^{\infty}$ de $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente vers zéro, ce qui implique que $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge elle-même vers zéro. Alors $\{T^n x\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy et donc elle admet un élément $\xi \in X$ comme limite.

Soit maintenant y un autre point de M. Si $\{T^n y\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée, alors elle converge aussi, disons vers l'élément $\zeta \in X$. Si les orbites de x et y ne sont pas disjointes, alors, évidemment, $\xi = \zeta$. Supposons dans la suite que les deux orbites sont disjointes. On a

$$\lim_{n\to\infty} d\,(T^{np(x,y)}\,x\,,\,T^{nq(x,y)}\,y) = d\,(\xi\,,\,\zeta)\,.$$

Mais

$$\begin{aligned} & d\,(T^{np(x,y)}\,x\,,\,T^{nq(x,y)}\,y) \\ & \quad = d\,(T^{p(x,y)}\,(T^{(n-1)\,p(x,y)}\,x)\,,\,T^{q(x,y)}\,(T^{(n-1)\,q(x,y)}\,y)) \\ & \quad = d\,(T^{p(T^{(n-1)\,p(x,y)}x,\,T^{(n-1)\,q(x,y)}y)}\,(T^{(n-1)\,p(x,y)}\,x)\,, \\ & \qquad\quad T^{q(T^{(n-1)\,p(x,y)}x,\,T^{(n-1)\,q(x,y)}y)}\,(T^{(n-1)\,q(x,y)}\,y)) \\ & \quad \le \varphi\,(d\,(T^{(n-1)\,p(x,y)}\,x\,,\,T^{(n-1)\,q(x,y)}\,y))\,, \end{aligned}$$

d'où

$$d\,(T^{np(x,y)}\,x\,,\,T^{nq(x,y)}\,y) \le \varphi^n\,(d\,(x\,,\,y))\,.$$

Puisque $\varphi^n\,(d\,(x\,,\,y)) \to 0$, les points ξ et ζ doivent coïncider. Le théorème est complètement démontré.

On peut être gené par la condition imposant à T d'être noninvolutive, surtout parce qu'elle se présente comme supplémentaire par rapport aux formulations déjà connues. On peut alors la transformer en une condition sur p et q qui, en revanche, garde le caractère de plus grande généralité de ces deux fonctions (ordinairement, $p\,(x\,,y) = q\,(x\,,y) = c$ sur $M \times M$, où $c = 1$ ou, dans le meilleur cas, c est une autre constante naturelle):

Soient X *un espace métrique complet*, $M \subset X\,, T : M \to M\,,\, p\,, q : M \times M \to N$, $\psi : R_+ \to R_+$. *Si*

$$\max\,\{\psi\,(r)\,,\,\limsup_{t\to r}\,\psi\,(t)\} < r$$

pour tout $r \in R_+$, $p\,(x\,,Tx)$ *et* $q\,(x\,,Tx)$ *sont de la même parité quel que soit* $x \in M$ *et*

$$p\,(x\,,Ty) = p\,(Tx\,,y) = p\,(x\,,y)\,,$$

$$q\,(x\,,Ty) = q\,(Tx\,,y) = q\,(x\,,y)\,,$$

$$d\,(T^{p(x,y)}\,x\,,\,T^{q(x,y)}\,y) \le \psi\,(d\,(x\,,\,y))$$

pour chaque couple de points différents $x, y \in M$ (*d étant la distance dans* X), *alors pour tout* $x_0 \in M$ *dont l'orbite est bornée*, $\{T^n x_0\}$ *converge vers un élément de* X *indépendant de* x_0.

Bibliographie

[1] F. Browder, *On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations*, « Indag. Math. », *30*, 27–35 (1968).

[2] R. Caccioppoli, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale*, « Rend. Accad. Naz. Lincei » (6), *11*, 794–799 (1930).

[3] E. Rakotch, *A note on contractive mappings*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *13*, 459–465 (1962).

ROMA, 1970 — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei