ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Estratto dai *Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*
Serie VIII, vol. L, fasc. 6 - Giugno 1971

Matematica. — *Convexité par rapport à une famille continue de courbes*. Nota I di TUDOR ZAMFIRESCO, presentata [*] dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

RIASSUNTO. — L'Autore inizia lo studio della convessità rispetto ad una famiglia di curve continua secondo Grünbaum in senso generalizzato: indica risultati e pone problemi.

Soient S et T deux espaces tels que chaque élément $\tau \in T$ soit un sous-ensemble de S, muni d'une topologie μ_τ. Nous dirons que *l'ensemble* E *de l'espace* S *est convexe par rapport à* T *si* $E \cap \tau$ *est connexe* (*dans* μ_τ) *pour tout* $\tau \in T$.

Cette définition nous conduit à la notion connue de convexité dans un espace linéaire réel si S est un tel espace et T la famille des droites de S. D'autre part, elle nous permet également d'entreprendre l'étude de la convexité dans beaucoup d'autres cas spéciaux et il ne manque pas d'intérêt de comparer les résultats y obtenus avec ceux bien connus pour la convexité au sens usuel.

CONVEXITÉ PAR RAPPORT A UNE F.C.C.G.

Faisons dans cette note une courte incursion dans un modèle bidimensionnel de convexité par rapport à une famille de courbes à un paramètre. Par " modèle bidimensionnel " nous voulons dire que S est une variété à deux dimensions; " un paramètre " signifie que T est une variété à une dimension.

(*) Nella seduta del 18 giugno 1971.

Plus précisément, concentrons-nous ici sur le modèle bidimensionnel suivant: S est un disque compact, chaque $\tau \in T$ est un arc de Jordan ayant les extrémités sur frS et l'espace T est (topologiquement) un cercle $\mathfrak{L}$ tel que l'intersection de chaque paire de ses éléments (arcs) soit connexe et contenue dans l'intérieur D de S. Nous laissons au lecteur le soin de prouver que $\mathfrak{L}$ *est une F.C.C.G. au sens de* [3] (là-bas *generalized continuous family of curves*; voir aussi [4]), c.-à-d. que les conditions suivantes sont remplies:

- Chaque point $p \in fr$S est l'extrémité d'une courbe $L(p)$ et d'une seule.
- Si $L_1, L_2 \in \mathfrak{L}$, alors $L_1 \cap L_2$ est connexe.
- La courbe $L(p)$ dépend continûment de $p \in fr$S.

La convexité définie dans $\bar{D}$ par rapport à $\mathfrak{L}$ est appelée *$\mathfrak{L}$-convexité* (Grünbaum [1]). Nous utiliserons dans la suite le mot *convexe* pour un ensemble simultanément $\mathfrak{L}$-convexe et connexe.

Théorème du type de Helly

Lemme 1. *Si $\{\mathcal{E}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille d'ensembles $\mathfrak{L}$-convexes à intersection non-vide, alors $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{E}_\lambda$ est également $\mathfrak{L}$-convexe.*

Lemme 2. *Tout ensemble convexe est simplement connexe.*

Les démonstrations de ces deux lemmes étant immédiates, elles seront omises.

Lemme 3 (Molnar [2]). *Soit $\{\mathcal{E}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'ensembles compacts et simplement connexes dans le plan* (card $\Lambda \geq 3$). *Si $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{E}_\lambda$ est connexe et si $\bigcap_{\lambda \in B} \mathcal{E}_\lambda \neq \varnothing$ quels que soient les sous-ensembles* $A, B \subset \Lambda$ *avec* card $A = 2$, card $B = 3$, *alors $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{E}_\lambda$ est un ensemble non-vide simplement connexe.*

Théorème 1. *Soit $\{\mathcal{E}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'ensembles compacts convexes* (card $\Lambda \geq 3$). *Si $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{E}_\lambda$ est connexe et si $\bigcap_{\lambda \in B} \mathcal{E}_\lambda \neq \varnothing$ quels que soient les sous-ensemble* $A, B \subset \Lambda$ *avec* card $A = 2$, card $B = 3$, *alors $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{E}_\lambda$ est un ensemble non-vide convexe.*

Démonstration. En vertu du Lemme 2, les ensembles $\mathcal{E}_\lambda$ sont simplement connexes. Il résulte alors du Lemme 3 que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{E}_\lambda$ est non-vide et connexe. L'$\mathfrak{L}$-convexité de cette intersection est assurée par le Lemme 1.

Sur les courbes d'appui

Disons que l'élément $L \in \mathfrak{L}$ est une *courbe d'appui global* pour l'ensemble E, avec $\bar{E} \subset D$, si E se trouve dans la fermeture d'une des deux composantes de $D - L$.

L'élément $L \in \mathfrak{L}$ est une *courbe d'appui local* pour l'ensemble E, avec $\bar{E} \subset D$, s'il y a un arc c sur L joignant deux points extérieurs à E, avec la propriété que $c \cap \bar{E} \neq \varnothing$ et que pour une certaine composante C de $D - L$, chaque point de $c \cap \bar{E}$ admet un voisinage V tel que

$$V \cap E \cap C = \varnothing .$$

THÉORÈME 2. *Si* $\mathcal{E}$ *est convexe,* $\bar{\mathcal{E}} \subset D$ *et* $M_2(\mathfrak{L}) \subset \mathcal{E}$ (1), *alors chaque courbe d'appui local de* $\mathcal{E}$ *est aussi d'appui global.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{E}$ est convexe, mais qu'il y a une courbe $L_0 \in \mathfrak{L}$ qui soit d'appui local, mais pas d'appui global pour $\mathcal{E}$. Soit C la composante de $D - L_0$ donnée par la définition des courbes d'appui local. Puisque $\mathcal{E}$ est connexe,

$$\overline{\mathcal{E} \cap C} \cap \mathcal{E} - C \neq \varnothing .$$

Si x appartient à l'ensemble ci-dessus, alors

$$x \in \bar{C} \cap D - C = \operatorname{int} L_0 .$$

L'appartenance de x au sous-arc c de L_0 donné par la définition d'une courbe d'appui local impliquerait

$$x \in \overline{\mathcal{E} \cap C} ,$$

ce qui contredit l'existence d'un voisinage V de x tel que

$$V \cap \mathcal{E} \cap C = \varnothing .$$

Donc $x \notin c$. Dans ce cas, l'existence d'un point de $\mathcal{E}$ sur c contredirait l'$\mathfrak{L}$-convexité de $\mathcal{E}$, parce que les extrémités de c n'appartiennent pas à $\mathcal{E}$. Donc

$$\mathcal{E} \cap c = \varnothing .$$

Soit $W \subset D$ un voisinage ouvert connexe de l'extrémité y_0 de c qui est plus proche de x sur L_0, tel que

$$W \cap \mathcal{E} = \varnothing ,$$

et soit $\mathfrak{W}$ un voisinage de L_0 dans $\mathfrak{L}$ tel que $L \cap W \neq \varnothing$ pour tout $L \in \mathfrak{W}$. Soit α_0 le sous-arc maximal de L_0 ayant une extrémité dans y_0 et contenant c. Puisque $\mathcal{E}$ est $\mathfrak{L}$-convexe,

$$\mathcal{E} \cap \alpha_0 = \varnothing .$$

Considérons maintenant dans $\mathfrak{W}$ une courbe L_1 telle que son extrémité e qui est séparée de $L_0 \cap L_1$ par les points de $W \cap L_1$ soit à l'extérieur de C. Puisque $M_2(\mathfrak{L}) \subset \mathcal{E}$, on a

$$L_0 \cap L_1 \subset \mathcal{E} .$$

Soient

$$y_1 \in W \cap L_1 ,$$

(1) $M_n(\mathfrak{L})$ est l'ensemble des points de D par lesquels passent au moins n courbes différentes de $\mathfrak{L}$ [3].

α_1 le sous-arc de L_1 d'extrémités e et y_1 et β un arc de Jordan d'extrémités y_0 et y_1, inclus dans W. Nous pouvons supposer que l'arc $\alpha_0 \cup \beta \cup \alpha_1$ soit simple. Evidemment,

$$\mathcal{E} \cap F \neq \varnothing ,$$

où F est la composante de $D - (\alpha_0 \cup \beta \cup \alpha_1)$ qui ne contient pas $L_0 \cap L_1$ et

$$\mathcal{E} \not\subset F .$$

Il résulte ensuite, de la connexité de $\mathcal{E}$ et de

$$\mathcal{E} \cap W = \mathcal{E} \cap \alpha_0 = \varnothing$$

que

$$\mathcal{E} \cap \alpha_1 \neq \varnothing .$$

Mais $\mathcal{E} \cap \alpha_1$ et $L_0 \cap L_1$ sont séparés par $y_1 \in W$, ce qui contredit l'$\mathfrak{L}$-convexité de $\mathcal{E}$. La démonstration est achevée.

Problèmes ouverts

Appelons *segment* tout sous-arc (dégénéré ou non) d'un élément (arc) de $\mathfrak{L}$.

Les deux définitions suivantes du point extrémal sont, comme dans la convexité ordinaire, equivalentes:

Un point p de l'ensemble compact $\mathfrak{L}$-convexe E est extrémal si:

I) *il n'y a aucun segment non-dégénéré* $\sigma \subset E$ *tel que* $p \in \operatorname{int} \sigma$;

II) *l'ensemble* $E - \{p\}$ *est* $\mathfrak{L}$*-convexe.*

L'*enveloppe* $\mathfrak{L}$*-convexe* d'un ensemble G est l'intersection de tous les ensembles $\mathfrak{L}$-convexes contenant G.

Problème 1. *Est-il tout ensemble compact et* $\mathfrak{L}$*-convexe l'enveloppe* $\mathfrak{L}$*-convexe du sous-ensemble de ses points extrémaux*? (Analogue du théorème de Krein-Milman).

Un point, un segment ou la fermeture de la composante bornée du complémentaire de la réunion de trois courbes de $\mathfrak{L}$ non-concurrentes est, par définition, un *triangle*.

L'ensemble $E \subset D$ est appelé *2-s.* $\mathfrak{L}$*-c.* (resp. *3-s.* $\mathfrak{L}$*-c.*) (2) s'il existe un sous-ensemble $F \subset E$ tel que E soit la réunion $\mathcal{S}_2(F)$ (resp. $\mathcal{S}_3(F)$) de tous les segments (resp. triangles) aux extrémité (sommets) dans F (voir [5]).

Problème 2. *Est-il tout ensemble compact* $\mathfrak{L}$*-convexe la réunion des triangles aux sommets dans l'ensemble des points extrémaux*? (Une réponse affirmative serait impliquée par des réponses affirmatives aux problèmes 1 et 3).

Problème 3. *Est-elle l'enveloppe* $\mathfrak{L}$*-convexe de* G *la réunion* $\mathcal{S}_3(G)$ *de tous les triangles aux sommets dans* G? (Analogue du théorème de Carathéodory).

(2) 2-simplicialement $\mathfrak{L}$-convexe (resp. 3-simplicialement $\mathfrak{L}$-convexe).

Evidemment, tout ensemble 3–*s.* $\mathfrak{L}$–*c.* est aussi 2–*s.* $\mathfrak{L}$–*c.*, mais la réciproque ne subsiste pas.

Tout ensemble $\mathfrak{L}$–convexe est en même temps 2–*s.* $\mathfrak{L}$–*c.* et 3–*s.* $\mathfrak{L}$–*c.*; mais il y a des ensembles 2–*s.* $\mathfrak{L}$–*c.* qui ne sont pas $\mathfrak{L}$–convexes (par exemple, la frontière d'un triangle non–dégénéré).

PROBLÈME 4. *Y a–t–il des ensembles 3–s. $\mathfrak{L}$–c. qui ne soient pas $\mathfrak{L}$–convexes*? (Une réponse affirmative au problème 3 impliquerait une négative pour celui–ci).

Soient E un ensemble 2–*s.* $\mathfrak{L}$–*c.* et

$$\omega_2(\mathrm{E}) = \sup_{\mathrm{F}} \min \{ j : \mathfrak{S}_2^j(\mathrm{F}) = \mathrm{E} \} .$$

PROBLÈME 5. *A–t–on*

$$\mathfrak{S}_2(\mathrm{E}) \leq 2 \ ?$$

(Analogue du Théorème 3 de [5]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. GRÜNBAUM, *Continuous families of curves*, « Can. J. Math. », *18*, 529–537 (1966).

[2] J. MOLNAR, *Über den zweidimensionalen topologischen Satz von Helly*, « Mat. Lapok », *8*, 108–114 (1957).

[3] T. ZAMFIRESCO, *On planar continuous families of curves*, « Can. J. Math. », *21*, 513–530 (1969).

[4] T. ZAMFIRESCO, *Théorème dual concernant les familles continues de courbes*, « Bull. Ac. royale de Belgique », *53*, 1385–1391 (1967).

[5] T. ZAMFIRESCO, *Simplicial convexity in vector spaces*, « Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. R. », *9* (57), 137–149 (1965).

ROMA, 1971 — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei