ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Estratto dai *Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*
Serie VIII, vol. LI, fasc. 3-4 (Settembre-Ottobre) - Ferie 1971

Matematica. — *Convexité par rapport à une famille continue de courbes*. Nota II (*) di TUDOR ZAMFIRESCO, presentata dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

RIASSUNTO. — L'Autore prosegue le sue ricerche sulla convessità di un insieme rispetto ad una famiglia continua di curve.

1. Dans la présente Note il s'agit d'une famille continue de courbes généralisée, définie premièrement dans [2] de la façon suivante.

Soient C une courbe de Jordan fermée dans le plan et D le domaine borné ayant C comme frontière. L'ensemble $\mathfrak{L}$ d'arcs de Jordan fermés (nommés *courbes*) sera appelé *famille continue de courbes généralisée* s'il satisfait aux propriétés suivantes:

1) Chaque courbe de $\mathfrak{L}$ est incluse (exceptant les extrémités) dans D, ses extrémités appartenant à C;

2) Chaque point v de C est une extrémité de précisément une courbe de $\mathfrak{L}$, notée $L(v)$;

3) L'intersection de deux courbes arbitraires de $\mathfrak{L}$ est connexe;

4) $L(v)$ dépend continûment de v.

$M_n(\mathfrak{L})$ signifie l'ensemble des points de D par lesquels passent au moins n courbes de $\mathfrak{L}$.

Un ensemble est $\mathfrak{L}$–*convexe* si son intersection avec chaque courbe de $\mathfrak{L}$ est vide ou connexe. Un ensemble est *convexe* lorsqu'il est $\mathfrak{L}$–convexe et connexe.

(*) Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1971.

Dans la Note I nous introduisions aussi les définitions suivantes:

La courbe $L \in \mathfrak{L}$ est une *courbe d'appui global* pour l'ensemble E, avec $\bar{E} \subset D$, si E se trouve dans la fermeture d'une des deux composantes de $D - L$. La courbe $L \in \mathfrak{L}$ est une *courbe d'appui local* pour l'ensemble E, avec $\bar{E} \subset D$, s'il y a un arc c sur L joignant deux points extérieurs à E, avec la propriété que $c \cap \bar{E} \neq \varnothing$ et que pour une certaine composante D^* de $D - L$, chaque point de $c \cap \bar{E}$ admet un voisinage V tel que

$$V \cap E \cap D^* = \varnothing .$$

2. Pour ce que nous allons prouver, il nous servira de rappeler d'abord deux résultats sur les ensembles $\mathfrak{L}$–convexes:

LEMME 1 (Grünbaum [1]). *L'ensemble* $M_2(\mathfrak{L})$ *est* $\mathfrak{L}$*–convexe.*

LEMME 2 [3]. *Si* $\mathcal{E}$ *est convexe,* $\bar{\mathcal{E}} \subset D$ *et* $M_2(\mathfrak{L}) \subset \mathcal{E}$, *alors chaque courbe d'appui local de* $\mathcal{E}$ *est aussi d'appui global.*

3. THÉORÈME. *Si* $\mathcal{E} \subset D$ *est fermé, simplement connexe et sans courbes d'appui local et si*

$$M_2(\mathfrak{L}) \subset \mathcal{E},$$

alors $\mathcal{E}$ *est convexe.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{E}$ n'est pas convexe: soit L_0 une courbe de $\mathfrak{L}$ telle que $L_0 \cap \mathcal{E}$ ne soit pas connexe. Suivant le Lemme 1, $L_0 \cap M_2(\mathfrak{L})$ se trouve dans une seule des composantes de $L_0 \cap \mathcal{E}$. Considérons un point b sur L_0 séparant deux composantes différentes de $L_0 \cap \mathcal{E}$ et un arc de Jordan $\gamma \subset D$ joignant b avec un point $d \in C$ de façon que

$$\gamma \cap \mathcal{E} = \varnothing .$$

Soit p un point sur γ. On sait que $D = M_1(\mathfrak{L})$, donc il existe une courbe $L^p \in \mathfrak{L}$ contenant p. Cette courbe est aussi unique, car $p \notin \mathcal{E}$ et $M_2(\mathfrak{L}) \subset \mathcal{E}$. Soit $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de points sur γ, convergente vers p. Si $\{L^{p_n}\}_{n=1}^{\infty}$ ne convergeait pas vers L^p, alors elle aurait une suite partielle $\{L^{p_{n_m}}\}_{m=1}^{\infty}$ convergente vers la courbe L^* différente de L^p. Mais alors p, comme limite de $\{p_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$, se trouverait à la fois sur L^* et sur L^p, ce qui vient d'être prouvé comme impossible. Donc L^p varie continûment avec p.

Considérons la fonction continue $f : \gamma \to C$, telle que $f(p)$ soit une extrémité de L^p et $f(d) = d$. Soient $a, b \in L^p$. Nous écrirons

$$a <_p b$$

ou, plus court,

$$a < b$$

si a se trouve entre $f(p)$ et b sur L^p.

Démontrons que $p < x$ quel que soit $x \in L^p \cap M_2(\mathfrak{L})$. En effet, puisque $L^p \cap M_2(\mathfrak{L})$ est connexe et $p \notin M_2(\mathfrak{L})$, il y a une extrémité $e(p)$ de L^p telle que $M_2(\mathfrak{L})$ soit entièrement entre p et $e(p)$ sur L^p. Prouvons que e est une fonction continue.

Soient $p_0 \in \gamma$, V un voisinage de $e(p_0)$ sur C, $\mathfrak{W}$ un voisinage de L^{p_0} dans $\mathfrak{L}$ tel que chaque courbe de $\mathfrak{W}$ ait une extrémité dans V, et W un voisinage de p_0 sur γ tel que $L^p \in \mathfrak{W}$ quel que soit $p \in W$. Définissons $W_0 = W$ si pour tout $p \in W$, $e(p) \in V$. Supposons que pour un certain $p' \in W$, $e(p') \notin V$. Alors [1], $-e(p') \in V$. Soient W' un arc dans W, qui est disjoint de $L^{p'}$ et contient p_0 dans son intérieur relatif, et W'' un voisinage de p_0 sur γ tel que $L^p \in \mathfrak{W}$ et que l'extrémité de L^p qui se trouve dans V ne soit pas séparée de $e(p_0)$ par $-e(p')$, quel que soit $p \in W''$. Définissons dans ce cas $W_0 = W' \cap W''$. Puisque, en vertu du théorème de Jordan, tout arc joignant un point de $W' \cap W''$ avec un point de V qui n'est pas séparé de $e(p_0)$ par $-e(p')$ doit couper $L^{p'}$ (dans ce deuxième cas), il s'en suit que $e(p) \in V$ pour tout $p \in W_0$.

Maintenant, puisque e et f sont continues et $e(d) = -f(d)$, on a généralement

$$e(p) = -f(p) \qquad (p \in \gamma)$$

et, d'après la définition de la fonction e,

$$p < x \qquad (x \in L^p \cap M_2(\mathfrak{L})).$$

Soit p^* le point le plus proche de d sur γ tel que pour tout voisinage V de p^* sur γ il y a $p \in V$ et $x \in L^p \cap \mathfrak{S}$ satisfaisant à l'inégalité $x < p$. Soit $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de points sur γ convergente vers p^*, telle qu'il existe $x_n \in L^{p_n} \cap \mathfrak{S}$ avec $x_n < p_n$. Soit x^* un point limite de la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Evidemment, $x^* \in L^{p^*}$.

Supposons que

$$x^* > p^*.$$

Soit V un voisinage de $e(p^*)$ disjoint de $-V$ [2]. Soient encore W un voisinage de p^* sur γ et X un voisinage de x^* dans D tels que $e(p) \in V$ pour tout $p \in W$ et

$$X \cap (W \cup \delta_{p^*}) = \varnothing,$$

où δ_p est le sous-arc de L^p joignant p avec $f(p)$. Soit $\{p_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ une suite partielle de $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que

$$p_{n_m} \in W \quad ; \quad \lim_{m \to \infty} x_{n_m} = x^* \quad ; \quad x_{n_m} \in X.$$

Supposons qu'il y a un indice n_m tel que p_{n_m} et $f(p_{n_m})$ soient séparés dans $\bar{D}$ par L^{p^*}. Soient W' un sous-arc de W contenant p^* dans son intérieur relatif

(1) Si $v \in C$, alors $-v$ signifie l'autre extrémité de $L(v)$.

(2) Si $V \subset C$, alors $-V = \{x \in C : -x \in V\}$.

et ne rencontrant pas $L^{p_{n_m}}$, et $W'' \subset W$ un voisinage de p^* sur γ tel que $e(p)$ ne soit pas séparé de $e(p^*)$ par $e(p_{n_m})$ sur V quel que soit $p \in W''$. Il y a un nombre naturel N tel que pour tout $q \geq N$, $p_{n_q} \in W_0$, où $W_0 = W' \cap W''$. Pour tous ces q, p_{n_q} et $f(p_{n_q})$ ne sont pas séparés dans $\bar{D}$ par L^{p^*}, car autrement L^{p^*} intersecterait le sous-arc de $L^{p_{n_q}}$ joignant p_{n_q} avec $f(p_{n_q})$ dans un point (de $\mathcal{E}$) a, $L^{p_{n_m}}$ intersecterait le sous-arc de $L^{p_{n_q}}$ joignant p_{n_q} avec $e(p_{n_q})$ dans un point (de $\mathcal{E}$) b et le point $p_{n_q} \in \mathcal{E}$ séparerait a et b sur $L^{p_{n_q}}$, ce qui contredit l'$\mathfrak{L}$-convexité de $\mathcal{E}$. (On peut choisir $N = 1$ et $W_0 = W$ s'il n'y a aucun indice n_m tel que p_{n_m} et $f(p_{n_m})$ soient séparés dans $\bar{D}$ par L^{p^*}.) Soit $\{p'_r\}_{r=1}^{\infty}$ une suite partielle de $\{p_{n_q}\}_{q=N}^{\infty}$ telle que tous ses membres se trouvent dans une seule composante D' de $D - L^{p^*}$ et soit $\{x'_r\}_{r=1}^{\infty}$ la suite partielle de $\{x_{n_q}\}_{q=N}^{\infty}$ correspondante. Soit A un domaine de Jordan contenant L^{p^*} et tel que $fr\, A \cap D' \cap W_0$ consiste de précisément un point. Soient aussi $\mathfrak{W}_0 \subset \mathfrak{L}$ tel que tout $L \in \mathfrak{W}_0$ soit inclus dans A et $W_1 \subset W_0$ tel que $p^* \in \operatorname{int} W_1$ et $L^p \in \mathfrak{W}_0$ pour tout $p \in W_1$. Dès que r dépasse un certain nombre naturel, $p'_r \in W_1$. Pour un tel r, donc,

$$p'_r\, , f(p'_r) \in \overline{D'}\, ; \qquad x'_r \in X\, .$$

Du théorème de Jordan il s'en suit qu'il existe des points de W_0 entre $f(p'_r)$ et x'_r sur $L^{p'_r}$: soit p''_{r_1} le point le plus proche de p^* jouant ce rôle. Disons qu'on a le cas (a) pour r si x'_r se trouve dans une (la) composante bornée de $D - (L^{p^*} \cup W_0 \cup \varepsilon_r)$, où

$$\varepsilon_r = \{x \in L^{p'_r} : x \geq p'_r\}$$

et désignons avec (b) le cas contraire. Soit p'_{r_2} un point de $\{p'_r\}_{r=1}^{\infty}$ tel qu'il n'y ait aucun point de $W_0 \cap L^{p'_{r_1}}$ entre p'_{r_2} et p^*; construisons de cette manière la suite partielle $\{p'_{r_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Supposons qu'on a le cas (a) pour r_2. Alors pour tout $x \in -V$ situé entre $f(p'_{r_1})$ et $f(p'_{r_2})$, $L(x)$ ne rencontre pas $\delta_{p'_{r_2}}$. Aussi, $L(f(p'_{r_1}))$ ne rencontre pas le sous-arc de γ joignant p'_{r_2} avec p''_{r_2}. Soit E le domaine de Jordan dont la frontière contient x'_{r_2} et se trouve sur (ou coïncide avec) le sous-arc de $L^{p'_{r_2}}$ joignant p'_{r_2} avec p''_{r_2} plus le sous-arc de γ aux mêmes extrémités. Pour $x = f(p'_{r_1})$, $L(x)$ ne rencontre pas $\overline{E \cap \mathcal{E}}$, parce qu'elle ne rencontre pas $fr\, E$, mais pour $x = f(p'_{r_2})$, $L(x)$ contient $x'_{r_2} \in \overline{E \cap \mathcal{E}}$. Donc il y a un point x_0 entre $f(p'_{r_1})$ et $f(p'_{r_2})$ sur $-V$, tel que

$$L(x) \cap \overline{E \cap \mathcal{E}} = \emptyset$$

pour tout x entre $f(p'_{r_1})$ et x_0 et

$$L(x'_j) \cap \overline{E \cap \mathcal{E}} \neq \emptyset$$

pour tout membre d'une certaine suite $\{x_j''\}_{j=1}^{\infty}$ convergente vers x_0, chaque x_j'' étant situé entre x_0 et $f(p'_{r_1})$ ou coïncidant avec x_0. Puisque $\mathcal{E}$ est fermé,

$$L(x_0) \cap \overline{E \cap \mathcal{E}} \neq \varnothing .$$

Soit D_x la composante de $D - L(x)$ qui ne contient pas x'_{r_2} et choisissons arbitrairement le point

$$a \in D_{x_0} \cap E .$$

Il y a alors un point x entre $f(p'_{r_1})$ et x_0 sur $-V$ tel que $a \in D_x$. Mais alors

$$fr(D_x \cap E) \cap \mathcal{E} = \varnothing$$

et

$$a \in D_x \cap E ,$$

d'où, puisque $\mathcal{E}$ est connexe, $a \notin \mathcal{E}$. Donc

$$D_{x_0} \cap E \cap \mathcal{E} = \varnothing$$

et $L(x_0)$ est une courbe d'appui de $\mathcal{E}$, le rôle de l'arc c de la définition étant joué par une (la) composante de $L(x_0) \cap \overline{E}$ qui n'est pas disjointe de $\mathcal{E}$ (les extrémités de cet arc sont extérieures à $\mathcal{E}$ simplement parce qu'elles appartiennent à γ). Supposons maintenant qu'on a le cas (b) pour r_2. Alors la démonstration se fait de façon analogue, en remplaçant seulement r_1 par r_3. L'existence d'une courbe d'appui pour $\mathcal{E}$ contrevenant à l'hypothèse, il résulte que l'inégalité supposée a été fausse, donc aucun point limite de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ n'est plus grand que p^*. Il s'en suit que $\delta_{p^*} \cap \mathcal{E} \neq \varnothing$ et $d \neq p^*$.

Soient μ le sous-arc de γ avec une extrémité dans p^* et l'autre dans d, V un voisinage de $f(p^*)$ disjoint de $-V$ et ne contenant pas d, μ' un sous-arc de μ avec une extrémité dans p^*, tel que $f(p) \in V$ quel que soit $p \in \mu'$, D' la composante de $D - L^{p^*}$ qui contient $\mu' - \{p^*\}$, y un point arbitraire de $\delta_{p^*} \cap \mathcal{E}$, p^+ un point sur μ' différent de p^*, Y un voisinage connexe de y n'intersectant pas L^{p^+} et z un point arbitraire de $Y \cap D'$. En vertu de la continuité de la famille $\mathfrak{L}$, il y a $z' \in V$ entre $f(p^*)$ et $f(p^+)$ tel que z se trouve dans la composante nonbornée de $D - (L^{p^*} \cup L(z') \cup V)$. Alors z appartient au domaine de Jordan F avec $fr\, F \subset V \cup L(z') \cup L^{p^+} \cup \mu'$. Puisque

$$V \subset C \quad \text{et} \quad C \cap \mathcal{E} = \varnothing ,$$

$$fr\, F \cap L(z') \subset \delta_{p^\times} \quad \text{et} \quad \delta_{p^\times} \cap \mathcal{E} = \varnothing ,$$

où $p^\times \in L(z') \cap \mu'$,

$$fr\, F \cap L^{p^+} \subset \delta_{p^+} \quad \text{et} \quad \delta_{p^+} \cap \mathcal{E} = \varnothing$$

et

$$\mu' \subset \gamma \quad \text{et} \quad \gamma \cap \mathcal{E} = \varnothing ,$$

il résulte de la connexité de $\mathcal{E}$ que $z \notin \mathcal{E}$. Donc $Y \cap D' \cap \mathcal{E} = \varnothing$ et L^{p^*} est une courbe d'appui de $\mathcal{E}$, le rôle de l'arc c étant joué cette fois par δ_{p^*}, ce qui contredit une hypothèse du théorème. La démonstration est achevée.

COROLLAIRE. *Soit* $\mathcal{E} \subset \mathrm{D}$ *un ensemble fermé et simplement connexe, tel que*

$$\mathrm{M}_2(\mathfrak{L}) \subset \operatorname{int} \mathcal{E}.$$

Alors $\mathcal{E}$ *est convexe si et seulement s'il n'a pas de courbes d'appui local.*

Démonstration. Une implication résulte du Théorème précédent. Afin de prouver l'autre implication, soit $\mathcal{E}$ convexe et supposons que L serait une courbe d'appui local de $\mathcal{E}$. En vertu du Lemme 2, L serait aussi une courbe d'appui global pour $\mathcal{E}$, ce qui est contredit par le couple suivant de relations:

$$\mathrm{L} \cap \mathrm{M}_2(\mathfrak{L}) \neq \varnothing \quad ; \quad \mathrm{M}_2(\mathfrak{L}) \subset \operatorname{int} \mathcal{E}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] GRÜNBAUM B., *Continuous families of curves*, « Can. J. Math. », *18*, 529–537 (1966).

[2] ZAMFIRESCO T., *On planar continuous families of curves*, « Can. J. Math. », *21*, 513–530 (1969).

[3] ZAMFIRESCO T., *Convexité par rapport à une famille continue de courbes* (Nota I), « Rend. Acc. Naz. Lincei », *50*, 625–629 (1971).

ROMA, 1971 — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei