ATTI DELL'ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI
Anno acc. 1971-72 - Tomo CXXX - Classe di scienze matematiche e naturali.

TROIS CARACTÉRISATIONS DES ENSEMBLES CONVEXES

TUDOR ZAMFIRESCO (*)

Nota presentata dal s. c. Prof. Giovanni Zacher, nell'adunanza ordinaria del 20 febbraio 1972.

RIASSUNTO. - Si danno 3 caratterizzazioni per la convessità di sottoinsiemi di uno spazio euclideo n-dimensionale.

La présente Note a pour but de présenter des définitions équivalentes pour la convexité d'un ensemble dans l'espace euclidien n-dimensionnel, lorsque cet ensemble jouit de certaines propriétés topologiques élémentaires. Les définitions ainsi obtenues pour les ensembles convexes sont exprimées par des propriétés évidemment plus faibles que la condition bien connue déterminant usuellement la convexité d'un ensemble.

Notations. E^n désigne l'espace euclidien à n-dimensions; $[x, y]$ est le segment joignant les points $x, y \in E^n$; (x, y) est la droite contenant x et y; $\|x\|$ représente la norme euclidienne de x; $S(x, r)$ est le disque de centre x et de rayon $r \in R$(**).

Si $M \subset E^n$, alors $\overline{M}$ désigne la fermeture, ∂M la frontière, int M

(*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Institut. Universität Dortmund. 46 Dortmund - Hombruch. Germania.

(**) R dénote l'ensemble des nombres réels. $S(x, r) = \{x' : \|x' - x\| \leq r\}$.

l'intérieur et $[M]$ l'enveloppe convexe de l'ensemble M; nous utiliserons aussi les notations suivantes:

$$d(x, M) = \inf_{y \in M} \| x - y \|,$$

$$K(M, r) = \{ z : d(z, M) \leq r \},$$

où $x \in E^n$ et $r \in R$.

Si $C \subset E^n$ est un corps convexe (*), alors exp C signifiera l'ensemble de ceux points exposés de C, où ∂C est différentiable.

Définition. Soient Γ un arc de cercle et a, b ses extrémités. Lorsque $[\Gamma]$ tourne autour de (a, b), il décrit un ensemble que nous appellerons *fuseau*. a et b sont les *extrémités* du fuseau. Soit $\Phi(a, b)$ l'ensemble de tous les fuseaux aux extrémités a, b.

(Dans tous les théorèmes qui seront énnoncés, on prendra E^n comme espace ambiant, mais chacun d'entre eux est (ou peut être adapté pour être) valable dans des espaces plus généraux.)

THÉORÈME 1. *Soient* γ *un nombre réel positif et* M *un ensemble fermé. L'ensemble* M *est convexe si et seulement si* $K(M, \gamma)$ *est connexe* (**) *et pour toute paire de points* x, $y \in M$ *avec* $\| x - y \| \leq 2\gamma$, $[x, y] \subset M$.

Démonstration. Une implication est évidente. Pour une démonstration de l'autre, prouvons d'abord que M est connexe. En effet, supposons que M n'est pas connexe; alors, choisissons le point $a \in M$ et soit A le sous-ensemble des points de M qui peuvent être joints avec a par un arc inclus dans M. On a $M - A \neq \varnothing$. Soient $b \in M - A$ et $\gamma \subset K(M, k)$ un arc d'extrémités a et b. Soit

$$\beta = \gamma \cap K(A, k).$$

(*) C.-à-d. un ensemble convexe possédant des points intérieurs.

(**) Par « connexité » on comprendra dans cette Note la connexité par arcs (exceptant là où l'on fait la mention contraire).

Alors

$$\gamma - \beta \subset K(M - A, k).$$

Puisque γ est connexe (au sens usuel du mot),

$$(\bar{\beta} \cap \gamma - \beta) \cap (\beta \cap \overline{\gamma - \beta}) \neq \varnothing$$

Supposons, par exemple, que $\bar{\beta} \cap \gamma - \beta \neq \varnothing$, la démonstration dans la deuxième situation étant similaire. Si $x \in \bar{\beta}$, alors

$$d(x, A) \leq k$$

et si, en outre, $x \in \gamma - \beta$, alors

$$d(x, M - A) \leq k.$$

Considérons les points $a_1 \in \bar{A}$, $a_2 \in A$, $b_1 \in \overline{M - A}$, $b_2 \in M - A$ tels que

$$\|x - a_1\| = d(x, A); \ \|a_1 - a_2\| \leq 2k,$$

$$\|x - b_1\| = d(x, M - A); \ \|b_1 - b_2\| \leq 2k.$$

L'ensemble M étant fermé, $\bar{A} \subset M$, donc $a_1, a_2 \in M$; de façon analogue, $b_1, b_2 \in M$. On a alors $[a_1, a_2] \subset M$, d'où $a_1 \in A$ et $[b_1, b_2] \subset M$, d'où $b_1 \in M - A$. Mais

$$\|a_1 - b_1\| \leq \|a_1 - x\| + \|x - b_1\| \leq 2k,$$

d'où $[a_1, b_1] \subset M$ et puisque $a_1 \in A$, résulterait aussi $b_1 \in A$: une contradiction est obtenue.

Maintenant, en sachant que M est connexe, démontrons aussi qu'il est convexe. Supposons, par l'absurde, que M n'est pas convexe. Soient $p, q \in M$ tels que $[p, q] \not\subset M$. Les points p et q sont liés par un arc de Jordan $\delta \subset M$ (voir le Théorème 5.1 de [3]). Considérons les points de δ ordonnés de telle manière que $p < q$. Evidemment, il y a un voisinage V de p tel que pour tout point $r \in V \cap \delta$, on ait $[p, r] \subset M$. Soit

$$s = \inf \{ x \in \delta : [p, x] \not\subset M \} .$$

Puisque M est fermé,

$$[p, s] \subset M .$$

Choisissons $t \in S(s, 2k) \cap \delta$, tel que $[p, t] \not\subset M$. Mais $\| s - t \| \leq \leq 2k$, d'où $[s, t] \subset M$. Considérons le segment $[s, t]$ ordonné tel que $s < t$. Soit

$$u = \inf \{ x \in [s, t] : [p, x] \not\subset M \};$$

l'ensemble M étant fermé,

$$[p, u] \subset M .$$

Prenons les points

$$v_0 = u , v_1 , v_2 , \ldots , v_{n-1} , v_n = p$$

dans cet ordre sur $[u, p]$, tels que

$$\| v_i - v_{i-1} \| \leq k \ (i = 1 , \ldots , n) .$$

On a

$$\| (u + t) / 2 - v_1 \| \leq \| t - u \| / 2 + \\ + \| u - v_1 \| \leq \| t - s \| / 2 + \| v_0 - v_1 \| \leq 2k ,$$

donc $[v_1, w_1] \subset M$, où $w_1 = (u + t) / 2$, et même

$$[\{ v_0 , v_1 , w_1 \}] \subset M .$$

On prouve d'une manière analogue que

$$[\{v_{i-1}, v_i, w_i\}] \subset M \qquad (i = 2, \ldots, n),$$

où

$$w_i = (v_{i-1} + w_{i-1}) / 2 .$$

Il s'ensuit que

$$[\{u, p, z\}] \subset M ,$$

où

$$\{z\} = [u, t] \cap (w_n, p) .$$

Mais, suivant la définition de u, il y a un point $y \in [u, z]$ tel que

$$[p, y] \not\subset M ,$$

ce qui est absurde.

Ce théorème a pour corollaire (*) le bien connu résultat suivant (voir le Théorème 4.4 de [2]).

COROLLAIRE. *Un continu* M *est convexe si et seulement s'il existe* $\gamma \in R$ *tel que pour toute paire de points* $x, y \in M$ *avec* $\| x - y \| \leq \gamma$, $[x, y] \subset M$.

THÉORÈME 2. *Soit* M *un ensemble fermé. L'ensemble* M *est convexe si et seulement si pour toute paire de points* $x, y \in M$ *et tout fuseau* $F \in \Phi(x, y)$, *on a*

$$M \cap \operatorname{int} F \neq \varnothing .$$

Le lemme suivant, dont la vérification est à la portée du lecteur, sera utile à la démonstration du Théorème 2.

(*) M étant un continu, $K(M, r)$ est connexe pour tout $r > 0$.

LEMME. *Si* C *est un corps convexe compact et si* p *et* q *sont points de sa frontière* ∂C, *tels que* $[p, q] \not\subset \partial C$, *alors on peut trouver dans* $\Phi(p, q)$ *un fuseau inclus dans* C.

Démonstration (*du Théorème 2*). On a évidemment à prouver une seule implication. Supposons, par l'absurde, que, dans les conditions du théorème, M ne serait pourtant pas convexe. Il y a alors deux points $x, y \in M$, tels que $[x, y] \not\subset M$. Si $a \in [x, y] - M$, alors, puisque M est fermé, il y a un nombre $k > o$ tel que

$$\operatorname{int} S(a, k) \cap M = \varnothing ,$$

mais

$$S(a, k) \cap M \neq \varnothing .$$

Si $b \in S(a, k) \cap M$, alors, évidemment,

$$b \in \exp [S(a, k) \cup \{x\}] \cup \exp [S(a, k) \cup \{y\}] .$$

Supposons, par exemple, que $b \in \exp [S(a, k) \cup \{x\}]$. Il y a alors un nombre $l \geq k$ tel que

$$\operatorname{int} A \cap M = \varnothing ,$$

mais

$$A \cap M - \{b\} \neq \varnothing ,$$

où

$$A = S(a, l) \cap [S(a, k) \cup \{x\}] .$$

Si

$$c \in A \cap M - \{b\} ,$$

alors de

$$b \neq c;\ b \in \exp A;\ c \in \partial A ,$$

il résulte que

$$[b, c] \not\subset \partial A$$

et, en vertu du Lemme, il y a un fuseau $F_0 \in \Phi(x, y)$ inclus dans A; alors

$$M \cap \operatorname{int} F_0 = \varnothing ,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

THÉORÈME 3. *Soit* M *un ensemble compact tel que son complémentaire n'ait pas de composantes bornées. L'ensemble* M *est convexe si et seulement si pour toute paire de points* $x, y \in M$, *soit*

$$[x, y] \subset M ,$$

soit

$$H \cap \operatorname{int} M \neq \varnothing ,$$

quel que soit l'hyperplan H *passant par* x *et* y.

Démonstration. Supposons que, dans les conditions de l'ennoncé, M ne serait pas convexe. Alors

$$M \neq [M] .$$

Mais $M \subset [M]$, donc il y a un point $a \in [M] - M$. Si $\partial [M] \subset \partial M$, alors $a \in \operatorname{int} [M] - M$, d'où a appartiendrait à une composante bornée du complémentaire de M. Par conséquent, $\partial [M] - \partial M \neq \varnothing$. Soient $b \in \partial [M] - \partial M$ et H_0 un hyperplan d'appui de $[M]$ passant par b (voir le Théorème 2.15 de [2]). Puisque

$$b \in H_0 \cap [M] = [H_0 \cap M] ,$$

il y a un simplexe de sommets $c_1, \dots, c_s \in H_0 \cap M$ $(s \leq n)$ qui contient b dans son intérieur relatif, selon le Théorème de Carathéodory (voir le Théorème 1.21 de [2], généralisant le résultat original de Carathéodory [1]). Définissons les points $d_0, d_1, \dots, d_{s-1}$ de la manière suivante:

$$d_0 = b,$$

$$d_i = (d_{i-1}, c_i) \cap [\{c_{i+1}, \dots, c_s\}] \quad (i = 1, \dots, s-1).$$

Evidemment, $d_0 = b$ appartient au complémentaire de M et $d_{s-1} = c_s$ appartient à M. Déterminons

$$j = \min \{t \in \{1, \dots, s-1\} : d_t \in M\}.$$

Nous avons ainsi trouvé les points $c_j, d_j \in M$, tels que

$$[c_j, d_j] \not\subset M$$

(parce que $d_{j-1} \in [c_j, d_j] - M$) et que

$$c_j, d_j \in H_0; \ H_0 \cap \operatorname{int} M = \varnothing$$

(l'hyperplan H_0 passe par d_j parce que $\{d_j\} \subset [\{c_1, \dots, c_s\}] \subset H_0$), ce qui contredit l'hypothèse du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annähmen*, Math. Ann., *64*, 95-115 (1907).

[2] F. A. Valentine, *Convex sets*, McGraw-Hill, Inc. (1964).

[3] G. T. Whyburn, *Analytic topology*, A.M.S. Colloq. Publ. vol. XXVIII (1942, 1963).

(Licenziate le bozze per la stampa il 18 agosto 1972)